Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 3, 403 – 426

Збіжність на дійсній осі рядів Фур'є по системах раціональних функцій

Станіслав О. Чайченко

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. В роботі розглядаються ортонормовані на дійсній осі $\mathbb{R}$ системи раціональних функцій $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, які визначаються фіксованими наборами точок $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k > 0)$ і $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} b_k < 0)$. Наводиться компактний вигляд аналогів ядер Діріхле систем $\{\Phi_n(t)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, на дійсній осі $\mathbb{R}$, а також досліджуються питання збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах $\{\Phi_n(t)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, за умови виконання певних обмежень на послідовності полюсів цих систем. Отримуються твердження, які є аналогами класичних ознак Жордана–Діріхле та Діні–Ліпшиця збіжності рядів Фур'є за тригонометричною системою.

2010 MSC. 46E30, 42A10, 41A17, 41A20, 41A25, 41A27, 41A30.

Ключові слова та фрази. Раціональна функція, система Такенаки–Мальмквіста, умова Бляшке.

1. Ортонормована система раціональних функцій на дійсній осі

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k > 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать в верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді

$$\Phi_0^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_0}}{z - \overline{a}_0}, \ \Phi_n^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_n}}{z - \overline{a}_n} B_n^+(z), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де

$$B_0^+(z) := 1, \ B_n^+(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \chi_k^+ \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k}, \ \chi_k^+ := \frac{|1 + a_k^2|}{1 + a_k^2}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках a_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Стаття надійшла в редакцію 17.10.2015

Систему функцій $\{\Phi_n^+(z)\}_0^\infty$ запровадив М.М. Джрбашян [1] за аналогією, як це зробили С. Такенака і Ф. Мальмквіст (див. [2,3]) у випадку простору Гарді H_2 в одиничному крузі. Зокрема, в [1] показано, що система $\{\Phi_n^+(z)\}_0^\infty$ є ортонормованою на дійсній осі $\mathbb{R}$, тобто

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^+(x)\overline{\Phi_m^+(x)}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нехай, далі, $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^\infty$, $(\operatorname{Im} b_k < 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать в нижній півплощині $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$. Тоді

$$\Phi_1^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_1}}{z - \bar{b}_1},\ \Phi_n^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_n}}{z - \bar{b}_n} B_n^-(z),\ n = 2, 3, \ldots,$$

де

$$B_1^-(z) := 1,\ B_n^-(z) := \prod_{k=1}^{n-1} \chi_k^- \frac{z - b_k}{z - \bar{b}_k},\ \chi_k^- := \frac{|1 + b_k^2|}{1 + b_k^2},\ n = 2, 3, \ldots .$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках b_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Лема 1. *Система функцій $\{\Phi_n^-(z)\}_1^\infty$ є ортонормованою на дійсній осі $\mathbb{R}$, тобто*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n, m = 1, 2, \ldots .$$

Доведення. Відзначимо спочатку, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^-(x)\overline{\Phi_n^-(x)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n^-(x)|^2 dx$$

$$= \frac{-\operatorname{Im} b_n}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x - \bar{b}_n|^2} = 1, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Покладаючи тепер, що $1 \le m \le n-1$, $(n \ge 2)$, розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} b_n \operatorname{Im} b_m}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}(x - b_k)\chi_k^-}{\prod\limits_{k=m}^{n}(x - \bar{b}_k)} dx.$$

В цій рівності праворуч під знаком інтегралу стоїть раціональний дріб з полюсами в точках $\overline{b}_k$, $k = m, m+1, \ldots, n$, які лежать в верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ комплексної площини. При цьому очевидно, що при $|z| \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$, цей дріб має порядок $\mathcal{O}(|z|^{-2})$, що гарантує збіжність інтегралу. Тому застосовуючи інтегральну теорему Коші для нижньої півплощини $\mathbb{C}_-$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = 0.$$

Нарешті, перейшовши до спряжених значень, переконуємося в тому, що остання рівність виконується для довільних натуральних $n \neq m$. Лему доведено. $\square$

Лема 2. *Для довільних* $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $z \neq \overline{\zeta}$ *і* $n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, *справджуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\Phi_k^+(\zeta)}\Phi_k^+(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)}\left[1 - \overline{B_n^+(\zeta)}B_n^+(z)\right], \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \overline{\Phi_k^-(\zeta)}\Phi_k^-(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)}\left[\overline{B_m^-(\zeta)}B_m^-(z) - 1\right], \tag{3}$$

де $\sum_{k=0}^{-1} = \sum_{k=1}^{0} = 0$.

Рівності (2) і (3) є аналогами формули Христофеля–Дарбу для ортогональних многочленів. Вони також відомі в літературі під назвою тотожності М.М. Джрбашяна. Доведення рівності (2) наведено в роботах [1,4]. Для того, щоб переконатися в справедливості рівності (3) скористаємося методом, запропонованим в [4].

Доведення. Розглянемо тотожність

$$(1 - x_1) + (1 - x_2)x_1 + (1 - x_3)x_1x_2 + \ldots + (1 - x_{m-1})x_1x_2\cdots x_{m-2} =$$

$$= 1 - x_1x_2\cdots x_{m-1}, \tag{4}$$

яка справджується для будь-яких комплексних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$.

Покладемо

$$x_k = \frac{(z - b_k)(\overline{\zeta} - \overline{b}_k)}{(z - \overline{b}_k)(\overline{\zeta} - b_k)}.$$

Тоді

$$1 - x_k = \frac{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)-(z-b_k)(\overline{\zeta}-\overline{b}_k)}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)} = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)}(\overline{\zeta}-z)$$

і згідно з (4)

$$\sum_{k=1}^{m-1}(1-x_k)\prod_{j=1}^{k-1}x_j = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{2i\,\mathrm{Im}\,b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)}(\overline{\zeta}-z)\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)}$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{m-1}\frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)}.$$

Розділивши обидві частини рівності на $2i(\overline{\zeta}-z)$ і врахувавши те, що

$$\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)} = \prod_{j=1}^{k-1}\chi_j^-\frac{z-b_j}{z-\overline{b}_j}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\overline{\chi}_j{}^-\frac{\overline{\zeta}-\overline{b}_j}{\overline{\zeta}-b_j} = B_k^-(z)\overline{B_k^-(\zeta)}$$

$b_k \in \mathbb{C}_-$ і

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\mathrm{Im}\,b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-d_k)}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}$$

$$= -\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\sqrt{-\mathrm{Im}\,b_k}}{z-\overline{b}_k}B_k(z)\frac{\sqrt{-\mathrm{Im}\,b_k}}{\overline{\zeta}-b_k}\overline{B_k(\zeta)} = -\sum_{k=1}^{m-1}\Phi_k^-(z)\overline{\Phi_k^-(\zeta)},$$

одержимо (3). Лему доведено. □

Позначимо тепер

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \Phi_n^+(z), & n = 0,1,2,\ldots, \\ \Phi_{-n}^-(z), & n = -1,-2,\ldots. \end{cases} \tag{5}$$

Лема 3. *Система функцій* $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ *є ортонормованою на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *тобто*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n,m \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Доведення. Якщо $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, або $n, m = -1, -2, \ldots$, то рівність (6) випливає з ортонормованості систем функцій $\{\Phi_n^+(z)\}_0^\infty$ і $\{\Phi_k^-(z)\}_1^\infty$. Нехай тепер $n = -1, -2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{-n}^-(x)\overline{\Phi_m^+(x)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_{-n}\operatorname{Im} a_m}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-\overline{b}_{-n}}\prod_{j=1}^{-n-1}\chi_j^-\frac{x-b_j}{x-\overline{b}_j}$$

$$\times\overline{\frac{1}{x-\overline{a}_m}\prod_{l=0}^{m-1}\chi_l^+\frac{x-a_l}{x-\overline{a}_l}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_{-n}\operatorname{Im} a_m}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-\overline{b}_{-n}}\prod_{j=1}^{-n-1}\chi_j^-\frac{x-b_j}{x-\overline{b}_j}$$

$$\times\frac{1}{x-a_m}\prod_{l=0}^{m-1}\chi_l^+\frac{x-\overline{a}_l}{x-a_l}\,dx. \tag{7}$$

В рівності (7) під знаком інтегралу стоїть раціональний дріб з полюсами в точках $\overline{b}_j$, $j = 1, 2, \ldots, -n$, та a_l, $l = 0, 1, \ldots, m$, які лежать в верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ комплексної площини. При цьому очевидно, що при $|z| \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$, цей дріб має порядок $\mathcal{O}(|z|^{-2})$, що гарантує збіжність інтегралу. Тому застосовуючи інтегральну теорему Коші для нижньої півплощини $\mathbb{C}_-$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{-n}^-(x)\overline{\Phi_m^+(x)}dx = 0, \quad n = -1, -2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Міркуючи аналогічно у випадку $m = -1, -2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, остаточно переконуємося в справедливості рівності (6). Лему доведено. □

З формул (2) і (3), отримуємо рівність

$$\sum_{k=-m+1}^{n-1}\overline{\Phi_k(\zeta)}\Phi_k(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta}-z)}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\frac{z-b_k}{z-\overline{b}_k}\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\overline{\zeta}-\overline{b}_k}{\overline{\zeta}-b_k}\right.$$

$$\left.-\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-a_k}{z-\overline{a}_k}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\zeta}-\overline{a}_k}{\overline{\zeta}-a_k}\right] = \frac{1}{2i(\overline{\zeta}-z)}\left[B_m^-(z)\overline{B_m^-(\zeta)} - B_n^+(z)\overline{B_n^+(\zeta)}\right].$$

2. Зображення ядра Діріхле системи $\{\Phi_n(z)\}$ на дійсній осі

Позначимо через

$$D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t) := \sum_{k=-m+1}^{n-1} \overline{\Phi_k(x)}\Phi_k(t), \quad x,t\in\mathbb{R}, \quad m,\, n\in\mathbb{N},$$

— ядро системи $\{\Phi_n(z)\}$, $n\in\mathbb{Z}$ на дійсній осі $\mathbb{R}$.

Отримаємо зручне для подальших досліджень зображення для величини $D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t)$. Має місце наступне твердження.

Лема 4. *Нехай* $\mathbf{a}=\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *(*$Im\, a_k>0$*) і* $b_0=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *(*$Im\, b_k<0$*) — довільні послідовності комплексних чисел, які лежать, відповідно, в верхній* $\mathbb{C}_+$ *і нижній* $\mathbb{C}_-$ *півплощинах комплексної площини.*

Тоді для довільних x, $t\in\mathbb{R}$ *і* m, $n\in\mathbb{N}$ *справджується формула*

$$D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t) = \frac{1}{2i(t-x)}\Bigg[\exp\Bigg(-2i\int_x^t\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\operatorname{Im} b_k\; du}{(u-\operatorname{Re} b_k)^2+(\operatorname{Im} b_k)^2}\Bigg)$$

$$-\exp\Bigg(-2i\int_x^t\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\operatorname{Im} a_k\; du}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg)\Bigg]. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $b_k=\beta_k+i\gamma_k$, $\beta_k\in\mathbb{R},\gamma_k<0$. Виконуючи перетворення, з урахуванням того, що $x,t\in\mathbb{R}$, знаходимо

$$B_m^-(x)\overline{B_m^-(t)} = \prod_{k=1}^{m-1}\frac{x-b_k}{x-\overline{b}_k}\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\frac{t-\overline{b}_k}{t-b_k}$$

$$=\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(x-\beta_k)-i\gamma_k}{(x-\beta_k)+i\gamma_k}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(t-\beta_k)+i\gamma_k}{(t-\beta_k)-i\gamma_k}$$

$$=\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(x-\beta_k)-i\gamma_k}{(x-\beta_k)+i\gamma_k}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(t-\beta_k)+i\gamma_k}{(t-\beta_k)-i\gamma_k}$$

$$=\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\sqrt{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{x-\beta_k}-i\sin\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{x-\beta_k})}{\sqrt{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{x-\beta_k}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{x-\beta_k})}$$

$$\times\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\sqrt{(t-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{t-\beta_k}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}{\sqrt{(t-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{t-\beta_k}-i\sin\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}{(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \exp\left[2i\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k}\right)\right].$$

Помітивши, що

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{\cdot - \beta_k}\right)' = -\frac{\gamma_k}{(\cdot - \beta_k)^2 + \gamma_k^2},$$

отримуємо

$$\prod_{k=1}^{m-1} \frac{x-b_k}{x-\bar{b}_k} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{t-\bar{b}_k}{t-b_k} = \prod_{k=1}^{m-1} \exp\left[2i\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k}\right)\right]$$

$$= \exp\left[2i \sum_{k=1}^{m-1}\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-2i \sum_{k=1}^{m-1} \int_x^t \frac{\gamma_k du}{(u-\beta_k)^2 + \gamma_k^2}\right].$$

Використовуючи аналогічні міркування для величини $B_n^+(z)\overline{B_n^+(\zeta)}$ отримуємо рівність (8). Лему доведено. $\square$

3. Постановка задачі, історична довідка та формулювання основних результатів

Нехай, як і раніше,

$$\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty},\ (\operatorname{Im} a_k > 0), \quad \mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty},\ (\operatorname{Im} b_k < 0)$$

— довільні послідовності комплексних чисел, які лежать, відповідно, в верхній $\mathbb{C}_+$ і нижній $\mathbb{C}_-$ півплощинах комплексної площини $\mathbb{C}$.

В роботі [5] було показано, що система раціональних функцій

$$\frac{1}{z-\bar{a}_0}, \quad \frac{1}{z-\bar{b}_1}, \quad \frac{1}{z-\bar{a}_1}, \quad \frac{1}{z-\bar{b}_1}, \ldots, \tag{9}$$

буде замкненою відносно простору $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, тоді і тільки тоді, коли ряди

$$\sigma(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}, \quad \sigma(\mathbf{b}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} b_k|}{1+|b_k|^2},$$

розбігаються. Ортогоналізація системи (9) на дійсній осі $\mathbb{R}$ приводить до системи $\{\Phi_n(x)\},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, тому довільній функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ можна поставити у відповідність її ряд Фур'є за системою $\{\Phi_n(x)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\Phi_k(x)}dx, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

частинні суми якого

$$S_{n,m}(f; \mathbf{a}; \mathbf{b}; x) = \sum_{k=-m+1}^{n-1} c_k \Phi_k(x),$$

за умови розбіжності рядів $\sigma(\mathbf{a})$ і $\sigma(\mathbf{b})$ збігаються в середньо квадратичному до функції $f(x)$, тобто

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_{n,m}(f; x)|^2 dx = 0.$$

Проте формальний ряд Фур'є вигляду (10) може бути записаний для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ і для частиних сум цього ряду будемо мати

$$S_{n,m}(f; \mathbf{a}; \mathbf{b}; x) = \sum_{k=-m}^{n} c_k \Phi_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Big[\sum_{k=-m}^{n} \overline{\Phi_k(t)} \Phi_k(x) \Big] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_{n,m}(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x; t)\ dt. \tag{11}$$

Наша мета — дослідити питання збіжності в метриках просторів $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, а також поточкової збіжності частинних сум $S_{n,m}(f; \mathbf{a}; \mathbf{b}; x)$ ряду Фур'є (10) до відповідної функції f при $m, n \to \infty$.

Зазначимо, що екстремальні задачі про наближення на дійсній осі за допомогою раціональних функцій з фіксованими полюсами беруть свій початок з робот С.Н. Бернштейна. Так в монографії [6] було побудовано раціональний дріб, який найменше відхиляється від нуля на дійсній осі, а також вперше наведено розв'язок задачі щодо наближення в рівномірній метриці функцій, за допомогою раціональних дробів, знаменники яких задані і не змінюють знака на дійсній осі, а чисельники — поліноми фіксованого степеня з невизначеними коефіцієнтами. Питання, пов'язані з дослідженням умов повноти систем вигляду (9), збіжності в метриках просторів $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1;\infty]$, наближуючих агрегатів, побудованих за цими системами, розглядались в роботі [5]. Н.І. Ахиєзер [7], досліджуючи задачі вагового поліноміального наближення, вперше встановив точні величини найкращих вагових наближень на дійсній осі ядер

$$\frac{Ax+D}{x^2+\lambda}, \quad (\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} D = 0,\ \lambda > 0) \tag{12}$$

для ваги певного вигляду.

Розкладом в ряд Фур'є за системою (1) вперше займався М.М. Джрбашян [1]. Ним був розвинений метод, що дозволив отримати розв'язання екстремальних задач про найкращі раціональні наближення ядра Коші

$$\frac{1}{z-x}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0$$

на всій дійсній осі $-\infty < x < \infty$ як в рівномірній, так і в середньо квадратичній метриці. Запропонований метод базувався на використанні ортогональної системи (1) та певних біортогональних на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ систем раціональних функцій з фіксованими полюсами. Використовуючи метод М.М. Джрбашяна в роботі [8] було розв'язано аналогічні екстремальні задачі для ядер (12). В роботах В.М. Русака (див. монографію [9]) були побудовані раціональні оператори типу Фейєра, Валле–Пуссена та Джексона та досліджено апроксимаційні властивості цих операторів. В роботі [4] обчислено величини найкращих наближень ядра Коші на дійсній осі $\mathbb{R}$ деякими підпросторами з $L_q(\mathbb{R})$. Наведено застосування отриманого результату до обчислення точних верхніх меж поточкових відхилень функцій з одиничної кулі простору Гарді H_p, $2 \le p < \infty$, від певних інтерполяційних операторів з вузлами інтерполяції в заданій системі точок верхньої півплощини і певних лінійних середніх рядів Фур'є за системою (1).

Для спрощення міркувань, в цій роботі будемо вважати, що відповідні члени послідовностей $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ є взаємоспряженими, тобто $b_k = \bar{a}_{k-1}$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Тоді, зображення спектральної функції (8) і частинної суми (11) у випадку $m = n+1$ приймають вигляд

$$D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x;t) = \frac{1}{(t-x)} \sin\left(\int_x^t \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2} \right] du \right), \tag{13}$$

і

$$S_{n,n+1}(f;\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x) := S_n(f;\mathbf{a};x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x;t)\,dt,$$

де $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\bar{\mathbf{a}} = \{\bar{a}_{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$.

Сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2} = +\infty. \tag{14}$$

Тоді для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *її ряд Фур'є за системою (5) збігається до цієї функції в метриці простору* $L_p(\mathbb{R})$, *тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x) - S_n(f;\mathbf{a};x)|^p dx = 0, \quad 1 < p < \infty.$$

Позначимо

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}, \quad \varsigma_n := \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2}. \tag{15}$$

Теорема 2. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і має обмежену варіацію на* $\mathbb{R}$. *Тоді якщо послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (14) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$, *то в кожній точці* $x_0 \in \mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Наслідок 1. *Якщо виконані всі умови теореми 2 і* x_0 *— точка неперервності функції* f, *то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = f(x_0).$$

Теорема 3. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і в точці* x_0 *існують граничні значення* $f(x_0-0)$ *і* $f(x_0+0)$. *Тоді якщо існують інтеграли*

$$\int\limits_0^{\delta}\frac{f(x_0-y)-f(x_0-0)}{y}dy, \quad \int\limits_0^{\delta}\frac{f(x_0+y)-f(x_0+0)}{y}dy, \tag{16}$$

а послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$*, задовольняє умову (14) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Якщо для послідовності $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ знайдуться додатні сталі C_1 і C_2, які не залежать від k і такі, що $0 < C_1 \le |a_k| \le C_2,\ k \in \mathbb{N}$, то очевидно, що така послідовність задовольняє умовам теорем 2 і 3. Відзначимо також, що умови цих теорем можуть виконуватись і для послідовностей, у яких $|a_k| \to \infty,\ n \to \infty$. Наприклад, якщо для дійсної та уявної частин $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ при $n \to \infty$ справджуються рівності

$$|\operatorname{Re} a_k| = \mathcal{O}(k^{\alpha}),\ 0 \le \alpha \le \frac{3}{4}, \quad |\operatorname{Im} a_k| = \mathcal{O}(k^{\beta}),\ \frac{1}{2} < \beta \le 1,$$

то, як нескладно переконатись, послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ не має граничних точок на дійсній осі $\mathbb{R}$, задовольняє умову (14) і $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$.

4. Допоміжні твердження

Отримаємо спочатку зручне інтегральне зображення для частинних сум $S_n(f;\mathbf{a};x)$ ряду Фур'є за системою (5). Має місце наступне твердження.

Лема 5. *Якщо* $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, *то для довільного* $x \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x-y)\frac{\sin y\mu_n(-y;x)}{y}\,dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x+y)\frac{\sin y\mu_n(y;x)}{y}\,dy, \tag{17}$$

де

$$\mu_n(y;x) := \frac{1}{y}\int\limits_x^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\right]du. \tag{18}$$

Доведення. Розіб'ємо інтеграл по всій осі на два інтеграли по проміжках $(-\infty; x)$ і $(x; \infty)$, після чого виконаємо заміну змінних. Беручи до уваги (13), знаходимо

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};t;x)\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{\infty}\Big) f(t) D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};t;x)\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(x-y) D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x-y;x)\ dy$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(x+y) D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x+y;x)\ dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\sin\left(\int\limits_{x-y}^{x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2}\right]du\right)dy$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x+y)}{y}\sin\left(\int\limits_{x}^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2}\right]du\right)dy.$$

Звідси, враховуючи позначення (18), отримуємо рівність (17). Лему доведено. □

Лема 6. *При кожних фіксованих $x \in \mathbb{R}$ і $y > 0$ справджуються оцінки:*

$$\left|[y\mu_n(\pm y;x)]'_y\right| \ge \frac{1}{1+(|x|+y)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}, \tag{19}$$

$$|\mu_n(\pm y;x)| \ge \frac{1}{1+(|x|+y)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}. \tag{20}$$

Доведення. На підставі співвідношення (18) знаходимо

$$[y\mu_n(y;x)]'_y = \frac{d}{dy}\int\limits_{x}^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2}\right]du$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\,\mathrm{Im}\,a_k}{([y+x]-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2}. \tag{21}$$

Звідси, враховуючи нерівність

$$(1+(|x|+y)^2)(1+(\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2) \geq ([t+x]-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2, \tag{22}$$

яка виконується для довільних $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ і $0 \leq t \leq y$, отримуємо оцінку (19) для величини $[y\mu_n(y;x)]'_y$. Величина $|[y\mu_n(-y;x)]'_y|$ оцінюється аналогічно.

Оскільки

$$\mu_n(y;x) = \frac{1}{y}\int_x^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\,\mathrm{Im}\,a_k}{(u-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2}\right]du$$

$$= \frac{1}{y}\int_0^{y}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\,\mathrm{Im}\,a_k}{([t+x]-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2}\right]dt,$$

то знову застосовуючи нерівність (22) одержуємо оцінку (20) для величини $\mu_n(y;x)$. Величина $\mu_n(-y;x)$ оцінюється аналогічно. Лему доведено. $\square$

Лема 7. *Рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$ і $y > 0$ виконуються оцінки:*

$$\left|[y\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mathrm{Im}\,a_k)^2}, \tag{23}$$

$$\left|[\mu_n(\pm y;x)]'_{y}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mathrm{Im}\,a_k)^2}, \tag{24}$$

$$\left|[\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}\right| \leq \frac{8}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mathrm{Im}\,a_k)^3}. \tag{25}$$

Доведення. На підставі співвідношення (21) знаходимо

$$[y\mu_n(y;x)]''_{y^2} = \frac{d}{dy}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\,\mathrm{Im}\,a_k}{([x+y]-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2}\right]$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4\,\mathrm{Im}\,a_k([y+x]-\mathrm{Re}\,a_k)}{\Big(([y+x]-\mathrm{Re}\,a_k)^2+(\mathrm{Im}\,a_k)^2\Big)^2}.$$

Звідси, беручи до уваги очевидні нерівності

$$\frac{2\operatorname{Im} a_k(v-\operatorname{Re} a_k)}{(v-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\leq 1, \tag{26}$$

і

$$\frac{1}{(v-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\leq \frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2}, \tag{27}$$

при $v=t+x$, отримуємо нерівність (23) для величини $|[y\mu_n(y;x)]''_{y^2}|$. Величина $|[y\mu_n(-y;x)]''_{y^2}|$ оцінюється аналогічно.

Для доведення оцінки (24) слід зауважити, що

$$[\mu_n(y;x)]'_y=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg]dt$$

$$=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k(t-y)[(y+x-\operatorname{Re} a_k)+(t+x-\operatorname{Re} a_k)]}{[(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]}$$

$$=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y(t-y)\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[\frac{2\operatorname{Im} a_k(y+x-\operatorname{Re} a_k)}{(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\cdot\frac{1}{(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$+\frac{2\operatorname{Im} a_k(t+x-\operatorname{Re} a_k)}{(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\cdot\frac{1}{(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg]dt.$$

Звідси, знову використовуючи нерівності (26)–(27) при $v=t+x$ і $v=y+x$, отримуємо

$$\Big|[\mu_n(y;x)]'_y\Big|\leq 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2}\cdot\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y(y-t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2},$$

що і доводить оцінку (24) для $[\mu_n(y;x)]'_y$. Модуль величини $[\mu_n(-y;x)]'_y$ оцінюється аналогічно.

Далі знаходимо

$$[\mu_n(y;x)]''_{y^2}=\frac{d}{dy}\Bigg[\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$-\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k\ dt}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg]$$

$$= \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k\ dt}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$-\frac{2}{y^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$-\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4\operatorname{Im} a_k(x+y-\operatorname{Re} a_k)}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2},$$

звідки, виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$[\mu_n(y;x)]''_{y^2} = \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y (y-t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k}{(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$\times\left[\frac{y+t+2x-2\operatorname{Re} a_k}{(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2} - \frac{2(y+x-\operatorname{Re} a_k)}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2(\operatorname{Im} a_k)^2}\right]dt$$

$$= \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{4\operatorname{Im} a_k(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2}{[(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]^2}\right.$$

$$+\frac{4\operatorname{Im} a_k(y+x-\operatorname{Re} a_k)(t+x-\operatorname{Re} a_k)}{[(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]^2}$$

$$\left.-\frac{2\operatorname{Im} a_k}{[(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]}\right](y-t)^2dt.$$

Нарешті використовуючи нерівності (26)–(27) при $v = t+x$ і $v = y+x$, отримуємо

$$|[\mu_n(y;x)]''_{y^2}| \le \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4(y-t)^2}{(\operatorname{Im} a_k)^3}\ dt = \frac{8}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^3},$$

що і доводить оцінку (25) для $[\mu_n(y;x)]''_{y^2}$. Величина $[\mu_n(-y;x)]''_{y^2}$ оцінюється аналогічно. Лему доведено. □

Лема 8. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (14) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$. *Тоді, якщо функція* $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\sin[y\mu_n(\pm y;x)]dy = 0. \tag{28}$$

Доведення. Зафіксуємо число $\varepsilon > 0$. Очевидно, що для довільної функції $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, завжди існує число $\theta = \theta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\int\limits_{\theta}^{\infty} |\varphi(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{29}$$

За теоремою Вейєрштрасса на відрізку $[0;\theta]$ можна знайти поліном $P(y) = P(\varphi; y)$, який забезпечує оцінку

$$\int\limits_{0}^{\theta} |\varphi(y) - P(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{30}$$

Зі співвідношень (29) і (30) випливає

$$\left| \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right| = \left| \int\limits_{0}^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\theta}^{\infty} \varphi(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy + \int\limits_{0}^{\theta} [\varphi(y) - P(y)] \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right|$$

$$\leq \left| \int\limits_{0}^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right| + \frac{2\varepsilon}{3},$$

при цьому рівномірно по $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отже, для завершення доведення леми залишилось показати, що існує натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність

$$\left| \int\limits_{0}^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{31}$$

Нехай

$$M_1 = \max_{0 \leq y \leq \theta} |P(y)|, \quad M_2 = \max_{0 \leq y \leq \theta} |P'(y)|.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int\limits_{0}^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy = -\frac{P(y)}{[y\mu_n(\pm y; x)]'_y} \cos[y\mu_n(\pm y; x)] \Big|_{0}^{\theta}$$

$$+\int\limits_0^\theta \frac{P'(y)}{[y\mu_n(\pm y;x)]'_y}\cos[y\mu_n(\pm y;x)]dy$$

$$-\int\limits_0^\theta \frac{P(y)[y\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}}{([y\mu_n(\pm y;x)]'_y)^2}\cos[y\mu_n(\pm y;x)]dy.$$

Застосуємо під знаками інтегралів з правої частини одержаної рівності оцінки (19)–(23). Враховуючи позначення (15), отримуємо

$$\left|\int\limits_0^\theta P(y)\sin[y\mu_n(\pm y;x)]dy\right| \leq \frac{2M_1(1+(|x|+\theta)^2)}{\sigma_n}$$

$$+\frac{M_2\theta(1+(|x|+\theta)^2)}{\sigma_n}+\frac{M_1\theta(1+(|x|+\theta)^2)^2\varsigma_n}{\sigma_n^2}.$$

Звідси, при виконанні (14) і умови $\varsigma_n/\sigma_n \leq \mathrm{const}$ випливає співвідношення (31). Лему доведено. □

Лема 9. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (14) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \leq \mathrm{const}$. *Тоді для довільного* $\delta > 0$ *при кожному фіксованому* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy = \frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і число $\delta > 0$. Маємо рівність

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy = \int\limits_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y\mu_n(\pm y;x)}d[y\mu_n(\pm y;x)]$$

$$-\int\limits_0^\delta \sin[y\mu_n(\pm y;x)]\frac{[\mu_n(\pm y;x)]'}{\mu_n(\pm y;x)}dy := I_1(n;x) - I_2(n;x). \tag{33}$$

Позначивши $v = y\mu_n(\pm y;x)$, отримуємо

$$I_1(n;x) = \int\limits_0^{\delta\mu_n(\pm\delta;x)} \frac{\sin v}{v}dv. \tag{34}$$

Скориставшись нерівністю (22), знаходимо

$$y\mu_n(\pm y; x) = \int\limits_0^y \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\,\mathrm{Im}\,a_k}{([t \pm x] - \mathrm{Re}\,a_k)^2 + (\mathrm{Im}\,a_k)^2}\Bigg] dt$$

$$\geq \frac{y}{1 + (|x| + y)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\,\mathrm{Im}\,a_k|}{1 + |a_k|^2}, \quad y > 0,$$

звідки випливає, що при виконанні умови (14) справджується співвідношення

$$\delta\mu_n(\pm\delta; x) \geq \frac{\delta}{1 + (|x| + \delta)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\,\mathrm{Im}\,a_k|}{1 + |a_k|^2} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Беручи до уваги цей факт, знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n; x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\delta\mu_n(\pm\delta; x)} \frac{\sin v}{v} dv = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Далі, інтегруючи частинами, знаходимо

$$|I_2(n; x)| = \left.\frac{[\mu_n(\pm y; x)]'_y \cos[y\mu_n(\pm y; x)]}{\mu_n(\pm y; x)[y\mu_n(\pm y; x)]'_y}\right|_0^\delta$$

$$- \int\limits_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y; x)] \frac{[\mu_n(\pm y; x)]''_{y^2}}{\mu_n(\pm y; x)[y\mu_n(\pm y; x)]'_y} dy$$

$$+ \int\limits_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y; x)] \frac{\Big([\mu_n(\pm y; x)]'_y\Big)^2}{[\mu_n(\pm y; x)]^2[y\mu_n(\pm y; x)]'_y} dy$$

$$+ \int\limits_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y; x)] \frac{[\mu_n(\pm y; x)]'_y [y\mu_n(\pm y; x)]''_{y^2}}{\mu_n(\pm y; x)([y\mu_n(\pm y; x)]'_y)^2} dy. \tag{36}$$

За умовою теореми послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ не має граничних точок на дійсній осі $\mathbb{R}$, отже

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mathrm{Im}\,a_k)^3} \leq C\varsigma_n.$$

Беручи до уваги цей факт і застосовуючи в правій частині співвідношення (36) нерівності (19)–(20), а також (23)–(25), знаходимо

$$|I_2(n;x)| \le C\left(\frac{\varsigma_n}{\sigma_n^2}[1+(|x|+\delta)^2] + \frac{\varsigma_n}{\sigma_n^2}[1+(|x|+\delta)^2]^2\delta + \right.$$

$$\left. + \frac{\varsigma_n^2}{\sigma_n^3}[1+(|x|+\delta)^2]^3\delta\right), \tag{37}$$

де ς_n і σ_n — послідовності, визначені співвідношеннями (15).

Оскільки за умовою леми $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$, то при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} |I_2(n;x)| = 0. \tag{38}$$

Поєднуючи тепер рівності (33), (35) і (38), отримуємо твердження леми. Лему доведено. □

Нарешті доведемо лему.

Лема 10. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умову (14) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$. *Тоді якщо функція* $g(y) \in L(\mathbb{R}_+)$ *і монотонно зростає на проміжку* $[0;\infty)$, *то для довільного числа* $\delta > 0$ *при кожному фіксованому* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} g(y)\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy = \frac{\pi}{2}g(+0). \tag{39}$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і число $\delta > 0$. Оскільки справджується рівність

$$\int_0^{\delta} g(y)\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy$$

$$= g(+0)\int_0^{\delta} \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy + \int_0^{\delta}[g(y)-g(+0)]\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy,$$

то на підставі леми 9 достатньо довести, що другий інтеграл з правої частини цієї рівності прямує до нуля при $n \to \infty$.

Для доведення цього факту візьмемо $\varepsilon > 0$, виберемо $h < \delta$ так, щоб

$$0 \le g(y) - g(+0) < \varepsilon, \quad 0 < y \le h,$$

і розіб'ємо цей інтеграл на два:

$$i_1(x;n)+i_2(x;n) := (\int\limits_0^h + \int\limits_h^\delta)[g(y)-g(+0)]\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy.$$

Враховуючи обмеженість інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^h \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy, \quad h>0,$$

що є наслідком леми 9, та застосовуючи другу теорему про середнє, при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$|i_1(x;n)| = [g(h)-g(+0)]\left|\int\limits_\theta^h \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy\right| \le \varepsilon C_1(x), \tag{40}$$

при цьому рівномірно відносно $n \in \mathbb{N}$.

Покладемо

$$\varphi(y) := \begin{cases} 0, & 0 \le y < h, \\ \frac{g(y)-g(+0)}{y}, & h \le y. \end{cases}$$

Очевидно, що $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$. Враховуючи це, на підставі леми 8 отримуємо оцінку

$$|i_2(x;n)| < \varepsilon C_2(x), \quad n > n_0(\varepsilon). \tag{41}$$

Зі співвідношень (40)–(41) випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty}(i_1(x;n)+i_2(x;n)) = 0,$$

що і доводить лему. □

5. Доведення основних результатів

Одержимо тепер основні твердження щодо збіжності на дійсній осі рядів Фур'є за ортонормованою системою (5).

Доведення теореми 1. Покажемо спочатку, що для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R}),\ p>1$, виконується нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |S_n(f;\mathbf{a};x)|^p dx \le M_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx.$$

На підставі леми 5 зображення частинної суми ряду Фур'є за системою $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ може бути записане у вигляді

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(x+y)-g(x-y)}{y} dy, \tag{42}$$

де

$$g(x \pm y) = f(x \pm y) \sin\big(\pm y\mu_n(\pm y;x)\big),$$

а величини $\mu_n(\pm y;x)$ визначаються рівністю (18).

В книзі [10, с. 149] доведено, що для довільної функції $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, $p>1$, формула (яку називають перетворенням Гільберта)

$$H(f;x) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t} dt,$$

майже скрізь визначає функцію $H(f) \in L_p(\mathbb{R})$ і виконується нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f;x)|^p dx \le M_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx,$$

де M_p — додатна стала, яка залежить тільки від p.

Використовуючи факт обмеженості перетворення Гільберта в просторах $L_p(\mathbb{R})$ при $p>1$, з урахуванням того, що функція $g \in L_p(\mathbb{R})$, на підставі співвідношення (42) отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |S_n(f;\mathbf{a};x)|^p dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(g;x)|^p dx \le M_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx,$$

що і треба було довести.

Перейдемо тепер до доведення твердження теореми. Оскільки за умовою $f \in L_p(\mathbb{R})$, то з результатів роботи [5] випливає, що функція f може бути як завгодно точно наближена за допомогою дробів вигляду (9). Тобто для довільного $\varepsilon>0$ існує скінченна лінійна комбінація

$$T_{n_0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} A_k (x-\bar{a}_k)^{-1} + \sum_{k=1}^{n_0} B_k (x-a_k)^{-1},$$

така, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)-T_{n_0}(x)|^p dx \le \varepsilon.$$

Оскільки система (5) є результатом ортогоналізації системи (9), то

$$T_{n_0}(x)=\sum_{k=0}^{n_0}A'_k\Phi_k^+(x)+\sum_{k=1}^{n_0}B'_k\Phi_k^-(x),$$

і

$$S_n(T_{n_0};x)=T_{n_0}(x),\quad n_0\le n.$$

Відзначив це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-S_n(f;x)|^p dx\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-T_{n_0}(x)|^p dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S_n(f-T_{n_0};x)|^p dx\le(1+C_p)\varepsilon.$$

Теорему доведено. □

Доведення теореми 2. Враховуючи факт сумовності функції f на $\mathbb{R}$, з леми 8 випливає, що зображення (17) може бути подане у вигляді

$$S_n(f;\mathbf{a};x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0-y)\frac{\sin y\mu_n(-y;x_0)}{y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0+y)\frac{\sin y\mu_n(y;x_0)}{y}\,dy+o(1),\quad n\to\infty,\tag{43}$$

де δ — довільне додатне число.

За умовою теореми функція $f(\cdot)$ має обмежену варіацію на $\mathbb{R}$, отже може бути поданою у вигляді різниці двох монотонно зростаючих функцій. Застосовуючи лему 10 до кожної монотонної складової функції f, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;\mathbf{a};x_0)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]=\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)],$$

що і треба було довести. Теорему доведено. □

Доведення теореми 3. З теореми 1 випливає, що

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0-0)\frac{\sin y\mu_n(-y;x_0)}{y}\,dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} f(x_0+0)\frac{\sin y\mu_n(y;x_0)}{y}\,dy + o(1), \quad n\to\infty, \tag{44}$$

де δ — довільне додатне число.

Зі співвідношень (43) і (44) отримуємо

$$S_n(f;\mathbf{a};x_0) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x_0)-f(x_0-0)}{y}\sin y\mu_n(-y;x_0)\,dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x_0+y)f(x_0+0)}{y}\sin y\mu_n(y;x_0)\,dy + o(1), \quad n\to\infty,$$

звідки, внаслідок збіжності інтегралів (16) на підставі леми 8 випливає твердження теореми. Теорему доведено. □

Література

[1] М. М. Джрбашян, *Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси* // Матем. сб., **94** (1974), No. 3, 418–444.

[2] S. Takenaka, *On the orthogonal functions and a new formula of interpolation* // Japanese Journal of Mathematics, **2** (1925), 129–145.

[3] F. Malmquist, *Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points* // Comptes rendus du sixiene congres des mathematiciens scandinares, Copenhagen, (1926), 253–259.

[4] В. В. Савчук, С. О. Чайченко, *Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі* // Укр. мат. журн., **66** (2014), No. 11, 1540–1549.

[5] H. Kober, *A note on approximation by rational functions* // Proc. of Edinburg Math. Soc., **7** (1944), No. 3, 123–133.

[6] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной.* Л.-М.: ОНТИ, 1937.

[7] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Наука, 1965.

[8] А. А. Восканян, *О некоторых экстремальных задачах теории приближения на всей вещественной оси* // Изв. АН АрССР, **XIV** (1979), No. 2, 107–123.

[9] В. Н. Русак, *Рациональные функции как аппарат приближения.* Минск: Изд. БГУ им. В.И.Ленина, 1979.

[10] Э. Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.

Відомості про авторів

Станіслав Олегович Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет

E-Mail: `s.chaichenko@gmail.com`