УДК 517.5

©2016. **В. С. Шпаковский**

ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Построены аналитические решения одного уравнения гидродинамики и получены их представления в виде действительнозначных компонент от некоторых функций со значениями в двумерной коммутативной алгебре.

Ключевые слова: *уравнение гидродинамики, аналитические решения, двумерная коммутативная ассоциативная алгебра.*

1. Введение.

Методы комплексного и гиперкомплексного анализа зачастую являются удобным инструментом для представления решений уравнений и систем уравнений в частных производных. Этот подход предполагает выполнение следующих взаимосвязанных этапов [1]:

1) нахождение подходящей коммутативной (или некоммутативной) алгебры;

2) нахождение процедуры построения решений заданного уравнения (системы уравнений) в частных производных;

3) описание классов тех решений заданного уравнения (системы уравнений), которые могут быть построены предложенной процедурой.

Так, например, каждая гармоническая функция может быть представлена в виде действительнозначной компоненты от некоторой аналитической функции комплексного переменного. Здесь алгебра — это алгебра комплексных чисел, процедура — взятие действительной или мнимой части, и класс решений — любая гармоническая функция.

Подобный подход реализован для построения решений трехмерного уравнения Лапласа (см. [2, 3, 4]), бигармонического уравнения (см. [5, 6]) и эллиптического уравнения с вырождением на оси, которое описывает осесимметричные потенциальные поля (см. [3]). В работе [7] этапы 2) – 3) приведенной выше схемы реализованы для любого линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами у которого производные во всех слагаемых одного и того же порядка. Кроме того, в работе [1] с использованием гиперкомплексных представлений описаны аналитические решения следующей системы уравнений

$$\Delta^2 u(x,y) - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \Delta v(x,y) + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0,$$

где $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа, которая применяется в моделировании эффектов приливного торможения в системе Сатурна (см. [8]).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U001528).

В данной работе описанный выше подход реализован для линейного уравнения в частных производных третьего порядка, связанного с известными моделями гидродинамики.

Рассмотрим следующую систему уравнений гидродинамики в лагранжевых координатах

$$V_t(t,x) - u_x(t,x) = 0, \quad u_t(t,x) + p_x(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$p(t,x) = a - bV(t,x) - \tau p_t(t,x)\,, \;\; a, b > 0, \tag{2}$$

где $V(t,x)$, $u(t,x)$, $p(t,x)$ — объем, скорость и давление, соответственно, τ — время релаксации, и приняты обозначения $V_t(t,x) := \partial V/\partial t$ и т. д. Уравнения (1) являются, соответственно, законами сохранения массы и импульса и имеют достаточно общий характер. Система уравнений движения (1) замыкается уравнением состояния среды (2), несущее информацию о конкретной модели гидродинамики, о свойствах среды.

Следует отметить, что динамическое уравнение состояния (2) является частным случаем модели Кельвина–Фойгта [9, с. 31] линейной вязкоупругой среды и используется при описании волновых процессов в грунтах и горных породах при малых нагрузках.

Уравнение состояния, подобное уравнению (2), рассматривалось также в работе [10], где изучались автомодельные решения одной общей системы уравнений гидродинамики.

Отметим, что система уравнений (1)–(2) при достаточной дифференцируемости функций V, u, p сводится к уравнению

$$D[V](t,x) := V_{ttt}(t,x) + \alpha V_{tt}(t,x) - \beta V_{xx}(t,x) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha := 1/\tau > 0$, $\beta := b/\tau > 0$. Структура решений уравнения (3) является основным объектом исследования данной статьи.

В этой работе с помощью коммутативной алгебры, изоморфной алгебре двойных чисел, описаны все полиномиальные и аналитические решения уравнения (3).

2. Полиномиальные решения.

Опишем здесь все полиномиальные решения уравнения (3) в виде действительнозначных компонент от гиперкомплексных функций. Итак, пусть $\mathbb{D}(\alpha,\beta)$ — коммутативная ассоциативная алгебра над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, \boldsymbol{e}\}$, причем $\boldsymbol{e}^2 = \alpha/\beta$. Пусть $\zeta := t + x\boldsymbol{e}$, где $t, x \in \mathbb{R}$. Число $t =: \mathrm{Re}\,\zeta$ назовем действительной частью елемента ζ, а число $x =: \mathrm{Im}\,\zeta$ — его мнимой частью. Заметим, что алгебра $\mathbb{D}(\alpha,\beta)$ изоморфна алгебре двойных чисел (см., например, [11]) с базисом $\{1, j\}$, $j^2 = 1$ и при этом $\boldsymbol{e} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, j$. Пусть $z := t + xj$, где $t, x \in \mathbb{R}$. Тогда, имея, например, представление степенной функции

$$z^n = (t+xj)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} t^{n-2k} x^{2k} + j \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} t^{n-2k-1} x^{2k+1},$$

пользуясь изоморфизмом, получаем

$$\zeta^n = (t + xe)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k t^{n-2k} x^{2k} + \boldsymbol{e} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k t^{n-2k-1} x^{2k+1} . \quad (4)$$

Согласно [12, с. 21] любое аналитическое решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$V(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, M^k[f(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\, M^k[g(t)]\,, \quad (5)$$

где $M := \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial^3}{\partial t^3} + \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, $M^k[\cdot] = M\left[M^{k-1}[\cdot]\right]$, а $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции, при условии, что ряды в равенстве (5) сходятся. Очевидно, что для получения решений в виде полиномов степени n достаточно в качестве функции f принять полином n-й степени, а в качестве функции g — полином $(n-1)$-й степени. А также вместо рядов в равенстве (5) рассмотреть конечные суммы. Таким образом, имеем

$$Q_n(t,x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, M^k \left[\sum_{m=0}^{n} a_m t^m\right] + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\, M^k \left[\sum_{m=0}^{n-1} b_m t^m\right]. \quad (6)$$

Поскольку оператор M^k линейный, т. е. $M^k \left[\sum\limits_{m=0}^{n} a_m t^m\right] = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m M^k[t^m]$, то равенство (6) переписывается в виде

$$Q_n(t,x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, M^k[t^m] + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\, M^k[t^m]. \quad (7)$$

Так как $M^k[t^m] = 0$ при $k > [m/2]$, то полиномиальные решения (7) приобретают вид

$$Q_n(t,x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \widetilde{R}_m(t,x) + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \widetilde{\widetilde{R}}_m(t,x), \quad (8)$$

где

$$\widetilde{R}_m(t,x) := \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, M^k[t^m], \quad \widetilde{\widetilde{R}}_m(t,x) := \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\, M^k[t^m]. \quad (9)$$

Приходим к выводу, что все решения уравнения (3) в виде полиномов степени n являются линейными комбинациями решений вида (9). Рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$1.\ \ \widetilde{R}_m(t,x) = \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Re}(\zeta^m)\right]; \quad (10)$$

$$2.\ \ \widetilde{\widetilde{R}}_m(t,x)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{[m/3]}\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^{2k}}{\partial t^k\partial\alpha^k}\left[\mathrm{Im}(\zeta^{m+1})\right]. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем соотношение (10) пользуясь равенством (4). Мы имеем

$$\widetilde{R}_m(t,x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,M^k[t^m]=t^m+\frac{x^2}{2!}\left\{\frac{\alpha}{\beta}\,m(m-1)t^{m-2}+\frac{1}{\beta}\,m(m-1)(m-2)t^{m-3}\right\}+$$

$$+\frac{x^4}{4!}\left\{\frac{\alpha^2}{\beta^2}\,(t^m)^{(4)}+2\frac{\alpha}{\beta^2}\,(t^m)^{(5)}+\frac{1}{\beta^2}\,(t^m)^{(6)}\right\}+$$

$$+\frac{x^6}{6!}\left\{\frac{\alpha^3}{\beta^3}\,(t^m)^{(6)}+3\frac{\alpha^2}{\beta^3}\,(t^m)^{(7)}+3\frac{\alpha}{\beta^3}\,(t^m)^{(8)}+\frac{1}{\beta^3}\,(t^m)^{(9)}\right\}+$$

$$+\frac{x^8}{8!}\left\{\frac{\alpha^4}{\beta^4}\,(t^m)^{(8)}+4\frac{\alpha^3}{\beta^4}\,(t^m)^{(9)}+6\frac{\alpha^2}{\beta^4}\,(t^m)^{(10)}+4\frac{\alpha}{\beta^4}\,(t^m)^{(11)}+\frac{1}{\beta^4}\,(t^m)^{(12)}\right\}+\cdots$$

$$\cdots+x^{2[m/2]}\frac{\alpha^{[m/2]}}{\beta^{[m/2]}}\,. \tag{12}$$

Суммируя первые слагаемые во всех фигурных скобках равенства (12), получим значение $\sum_{k=0}^{[m/2]}C_m^{2k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k t^{m-2k}x^{2k}$. Сравнивая последнее выражение с формулой (4), получаем

$$\sum_{k=0}^{[m/2]}C_m^{2k}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k t^{m-2k}x^{2k}=\mathrm{Re}\,(\zeta^m).$$

Теперь суммируя вторые слагаемые во всех фигурных скобках равенства (12), получим сумму

$$\frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{[m/2]}C_m^{2k}k(m-2k)\frac{\alpha^{k-1}}{\beta^k}t^{m-2k-1}x^{2k}=\frac{1}{1!}\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\alpha}\left[\mathrm{Re}\,(\zeta^m)\right].$$

Поступая аналогичным образом с третьеми слагаемыми в фигурных скобках равенства (12), получаем такую сумму

$$\frac{1}{2!}\sum_{k=2}^{[m/2]}C_m^{2k}k(k-1)(m-2k)(m-2k-1)\frac{\alpha^{k-2}}{\beta^k}t^{m-2k-2}x^{2k}=\frac{1}{2!}\,\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial\alpha^2}\left[\mathrm{Re}\,(\zeta^m)\right].$$

Продолжая этот процесс суммирования $[m/3]+1$ раз, получим $[m/3]+1$ равенство, сложив которые, убеждаемся в справедливости равенства (10). Подобным образом доказывается равенство (11). □

Теорема 1. *Все полиномы степени* n*, являющиеся решениями уравнения* (3)*, могут быть представлены в виде действительной части функции*

$$Q_n(\zeta) = \widetilde{M}_n[P_n(\zeta)], \tag{13}$$

где $\widetilde{M}_n := \sum\limits_{k=0}^{[n/3]} \dfrac{1}{k!}\, \dfrac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k}$, $P_n(\zeta) := \sum\limits_{m=0}^{n} d_m \zeta^m$, $d_m := a_m + \frac{\beta}{\alpha} c_m \boldsymbol{e}$, $a_m, c_m \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидным следствием равенства (8) и леммы является равенство

$$Q_n(t,x) = Q_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Re}(\zeta^m)\right] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{b_m}{m+1} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Im}(\zeta^{m+1})\right] = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[a_m \mathrm{Re}(\zeta^m)\right] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{[\frac{m+1}{3}]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\frac{b_m}{m+1} \mathrm{Im}(\zeta^{m+1})\right]. \tag{14}$$

При этом во второй сумме равенства (14) мы прибавили некоторое число слагаемых вида $\frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\frac{b_m}{m+1} \mathrm{Im}(\zeta^{m+1})\right]$ при $k = [\frac{m+1}{3}]$, тождественно равных нулю при всех $m = 0, 1, \ldots, n-1$ таких, что $[\frac{m+1}{3}] \neq [\frac{m}{3}]$. Переобозначая $\frac{b_m}{m+1} =: c_{m+1}$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$ и учитывая, что $\mathrm{Im}(\zeta^0) = 0$, имеем

$$Q_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Re}(a_m \zeta^m)\right] + \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Im}(c_m \zeta^m)\right].$$

Далее, принимая во внимание очевидное тождество

$$\mathrm{Im}(\zeta^m) = \frac{\beta}{\alpha}\, \mathrm{Re}(\boldsymbol{e}\, \zeta^m) \tag{15}$$

имеем

$$Q_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Re}\left(\left(a_m + \frac{\beta}{\alpha}\, c_m \boldsymbol{e}\right) \zeta^m\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left[\mathrm{Re}\,(d_m \zeta^m)\right] = \mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{[m/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k}\, d_m \zeta^m\right),$$

где $d_m := a_m + \frac{\beta}{\alpha}\, c_m \boldsymbol{e}$. Изменим порядок суммирования:

$$Q_n(\zeta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{[n/3]} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k} \left(\sum_{m=3k}^{n} d_m \zeta^m\right)\right). \tag{16}$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k}(d_m \zeta^m) = 0$ при $m < 3k$, поэтому соотношению (16) можно придать вид (13). $\Box$

Подобным до теоремы 1 образом доказывается следующее утверждение: *все полиномиальные решения уравнения* (3) *могут быть получены в виде мнимой части функции* (13).

Для этого вместо равенства (15) нужно использовать равенство

$$\mathrm{Re}(\zeta^m) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{e}\,\zeta^m). \tag{17}$$

При этом коэффициенты d_m будут определяться равенствами $d_m := a_m \boldsymbol{e} + c_m$.

Заметим, что имея явную формулу (4) для ζ^m, несложно выписать функцию (13) для сколь угодно больших значений n.

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Действительная и мнимая части функции* $\widetilde{M}_n[\zeta^n]$ *удовлетворяют уравнению* (3).

Примеры. 1. Функция

$$\zeta^3 = \left(t^3 + 3\frac{\alpha}{\beta}tx^2\right) + \left(3t^2x + \frac{\alpha}{\beta}x^3\right)\boldsymbol{e}$$

порождает следующие решения уравнения (3):

$$Q_3(\zeta) = \widetilde{M}_3\left[\zeta^3\right] = \zeta^3 + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial t}\,\zeta^3 = \left(t^3 + 3\frac{\alpha}{\beta}tx^2 + \frac{3}{\beta}x^2\right) + \left(3t^2x + \frac{\alpha}{\beta}x^3\right)\boldsymbol{e},$$

т. е.,

$$V_{3,1}(t,x) = \mathrm{Re}\left(Q_3(\zeta)\right) = t^3 + 3\frac{\alpha}{\beta}tx^2 + \frac{3}{\beta}x^2, \qquad V_{3,2}(t,x) = \mathrm{Im}\left(Q_3(\zeta)\right) = 3t^2x + \frac{\alpha}{\beta}x^3.$$

Также их линейная комбинация

$$a_1V_{3,1}(t,x) + a_2V_{3,2}(t,x) \quad \forall\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

удовлетворяет уравнению (3).

2. Функции

$$\zeta^6 = \left(t^6 + 15\frac{\alpha^2}{\beta^2}t^2x^4 + 15\frac{\alpha}{\beta}t^4x^2 + \frac{\alpha^3}{\beta^3}x^6\right) + \left(6t^5x + 20\frac{\alpha}{\beta}t^3x^3 + 6\frac{\alpha^2}{\beta^2}tx^5\right)\boldsymbol{e}$$

соответствует функция

$$Q_6(\zeta) = \widetilde{M}_6\left[\zeta^6\right] = \zeta^6 + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial t}\,\zeta^6 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial t^2}\,\zeta^6 =$$

$$= \left(t^6 + 15\frac{\alpha^2}{\beta^2}t^2x^4 + 15\frac{\alpha}{\beta}t^4x^2 + \frac{\alpha^3}{\beta^3}x^6 + \frac{60}{\beta}t^3x^2 + 60\frac{\alpha}{\beta^2}tx^4 + \frac{30}{\beta^2}x^4\right) +$$

$$+\left(6t^5x+20\frac{\alpha}{\beta}t^3x^3+6\frac{\alpha^2}{\beta^2}tx^5+\frac{10}{\beta}t^2x^3+2\frac{\alpha}{\beta^2}x^5\right)\boldsymbol{e},$$

которая порождает такие решения уравнения (3):

$$V_{6,1}(t,x)=\mathrm{Re}\left(Q_6(\zeta)\right)=$$

$$=t^6+15\frac{\alpha^2}{\beta^2}t^2x^4+15\frac{\alpha}{\beta}t^4x^2+\frac{\alpha^3}{\beta^3}x^6+\frac{60}{\beta}t^3x^2+60\frac{\alpha}{\beta^2}tx^4+\frac{30}{\beta^2}x^4,$$

$$V_{6,2}(t,x)=\mathrm{Im}\left(Q_6(\zeta)\right)=6t^5x+20\frac{\alpha}{\beta}t^3x^3+6\frac{\alpha^2}{\beta^2}tx^5+\frac{10}{\beta}t^2x^3+2\frac{\alpha}{\beta^2}x^5.$$

2.1. Собственные функции оператора D.

Используя аналог формулы Эйлера в двойных числах (см., например, [13, с. 96])

$$e^z=e^{t+xj}=e^t\mathrm{ch}\,x+je^t\mathrm{sh}\,x \tag{18}$$

и изоморфизм алгебр $\{1,j\}$ и $\mathbb{D}(\alpha,\beta)$, получаем формулу Эйлера в алгебре $\mathbb{D}(\alpha,\beta)$:

$$e^{\zeta}=e^{t+x\boldsymbol{e}}=e^t\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,x+\boldsymbol{e}\,\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,e^t\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,x. \tag{19}$$

Путем непосредственной проверки получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Действительная и мнимая части функции e^{ζ} являются собственными функциями оператора D.*

3. Аналитические решения.

В этом пункте описываются все аналитические решения уравнения (3), которые будут представлены в трех эквивалентных формах.

Функцию одной или нескольких действительных переменных называют *аналитической*, если в некоторой окрестности каждой точки ее области определения она представляется в виде суммы своего ряда Тейлора.

Определим постоянные $a_{k,m}$ следующими рекуррентными соотношениями:

i) $a_{m,0}\,,a_{m,1}$ — произвольные действительные числа при всех $m=0,1,2,\ldots,$

ii) $$a_{m,k+2}=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{\beta(k+1)(k+2)}\,a_{m+3,k}+\frac{\alpha(m+1)(m+2)}{\beta(k+1)(k+2)}\,a_{m+2,k}\,,$$
$m=0,1,\ldots,\quad k=2,3,\ldots.$ (20)

Соотношения (20) позволяют вычислить все постоянные $a_{m,k}$ в следующей поочередности: $a_{0,2}$, $a_{1,2}$, $a_{0,3}$, $a_{2,2}$, $a_{1,3}$, $a_{0,4}$, $a_{3,2}$, $a_{2,3}$, $a_{4,2}$, $a_{1,4}$, $a_{3,3}$, $a_{0,5}$, $a_{4,2}$, $a_{3,3}$, $a_{5,2}$, $a_{2,4}$ и т. д.

Теорема 3. *Сходящийся в области $Q\subset\mathbb{R}^2$ степенной ряд*

$$V(t,x)=\sum_{m,k=0}^{\infty}a_{m,k}\,t^mx^k \tag{21}$$

является решением уравнения (3) *в области* Q *тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям* (20).

Доказательство. Подставим функцию (21) в уравнение (3):

$$\sum_{m,k=0}^{\infty}(m+1)(m+2)(m+3)a_{m+3,k}\,t^m x^k+\alpha\sum_{m,k=0}^{\infty}(m+1)(m+2)a_{m+2,k}\,t^m x^k-$$

$$-\beta\sum_{m,k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{m+2,k}\,t^m x^k=0.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при соответствующих степенях $t^m x^k$, имеем равенство

$$(m+1)(m+2)(m+3)a_{m+3,k}+\alpha(m+1)(m+2)a_{m+2,k}-\beta(k+1)(k+2)a_{m+2,k}=0.$$

Теперь выражая $a_{m+2,k}$, получаем второе из условий (20), где для определенности считаем $a_{m,0}\,, a_{m,1}$ произвольными действительными числами при всех $m = 0,1,2,\ldots$ (т. е. первое из условий (20)). $\square$

Далее покажем, что при условиях теоремы 3 решение (21) может быть представлено в виде (5).

Теорема 4. *Пусть сходящийся в области* $Q\subset\mathbb{R}^2$ *степенной ряд* (21) *с коэффициентами вида* (20) *является решением уравнения* (3) *в* Q. *Тогда функция* (21) *представима в виде* (5) *с* $f(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m,0}\,t^m$, $g(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m,1}t^m$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что сходимость рядов для функций f и g вытекает из сходимости двойного ряда (21) (см., например, [14, с. 379]). Во-вторых, представим двойной ряд (21) в виде повторного ряда:

$$V(t,x)=\sum_{m,k=0}^{\infty}a_{m,k}\,t^m x^k=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,0}\,t^m+x\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,1}t^m+x^2\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,2}t^m+\cdots. \quad (22)$$

Сходящийся ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m,0}\,t^m$ обозначим через $f(t)$, а сходящийся ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m,1}t^m$ — через $g(t)$ и с помощью соотношений (20) выразим остальные ряды из равенства (22) через эти два. Мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,2}t^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2\beta}\,a_{m+3,0}t^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha(m+1)(m+2)}{2\beta}\,a_{m+2,0}t^m=$$

$$=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\,f'''(t)+\frac{\alpha}{\beta}\,f''(t)\right)=\frac{1}{2!}\,M[f(t)]; \quad (23)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,3}t^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2\cdot3\cdot\beta}\,a_{m+3,1}t^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha(m+1)(m+2)}{2\cdot3\cdot\beta}\,a_{m+2,1}t^m=$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\, g'''(t) + \frac{\alpha}{\beta}\, g''(t)\right) = \frac{1}{3!}\, M[g(t)]; \tag{24}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,4} t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3\cdot 4\cdot \beta}\left(\frac{(m+4)(m+5)(m+6)}{2\beta}\, a_{m+6,0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(m+4)(m+5)}{2\beta}\, a_{m+5,0}\right) t^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(m+1)(m+2)}{3\cdot 4\cdot \beta} \times$$

$$\times \left(\frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{2\beta}\, a_{m+5,0} + \frac{\alpha(m+3)(m+4)}{2\beta}\, a_{m+4,0}\right) t^m =$$

$$= \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta^2}\, f^{(6)}(t) + 2\frac{\alpha}{\beta^2}\, f^{(5)}(t) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\, f^{(4)}(t)\right) = \frac{1}{4!}\, M^2[f(t)]; \tag{25}$$

и т. д.

Следствием тождеств (22) – (25) и т. д. является равенство

$$V(t,x) = f(t) + xg(t) + \frac{x^2}{2!}\, M[f(t)] + \frac{x^3}{3!}\, M[g(t)] + \frac{x^4}{4!}\, M^2[f(t)] + \frac{x^5}{5!}\, M^2[g(t)] + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, M^k[f(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\, M^k[g(t)].$$

□

Следствием теоремы 4 и леммы является еще одно представление аналитического решения.

Теорема 5. *Пусть сходящийся в области $Q \subset \mathbb{R}^2$ степенной ряд* (21) *с коэффициентами вида* (20) *является решением уравнения* (3) *в* Q. *Тогда функция* (21) *может быть представлена в виде действительной части функции*

$$\widetilde{M_\infty}[P(\zeta)], \tag{26}$$

где $\widetilde{M_\infty} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^{2k}}{\partial t^k \partial \alpha^k}$, $P(\zeta) := \sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m \zeta^m$, $d_m \in \mathbb{D}(\alpha,\beta)$.

Благодарности. Выражаю искреннюю благодарность С. И. Скуратовскому, обратившему мое внимание на возможность изучения решений уравнения (3), и за обсуждение результатов.

1. *Плакса С. А.* Аналитические решения одной системы эллиптических уравнений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 292– 306.
2. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. — 1975. — Т. 27, № 5. — С. 606–613.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.
4. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 8. — С. 1078–1091.

5. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25–27.
6. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 12. — С. 1587–1596.
7. *Shpakivskyi V. S.* Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. — 2016. — V. 7, № 1. — P. 63–75.
8. *Самойленко Ю. И.* Эффекты приливного торможения в системе Сатурна // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 431–454.
9. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
10. *Danylenko V. A., Sorokina V. V., Vladimirov V. A.* On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993. – V. 26. – P. 7125–7135.
11. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
12. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравненимм математической физики. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
13. *Boccaletti D. etc.* The mathematics of Minkowski space-time and an introduction to commutative hypercomplex numbers. — Springer, 2006. — 181 p.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.–Л.: Гостехизд, 1948. — Т. 2. — 860 с.

V. S. Shpakivskyi

Hypercomplex representation of analytic solutions of one equation of hydrodynamics.

We construct analytic solutions of one equation of hydrodynamics. We obtain representations of mentioned solutions in the form of real-valued components of some functions taking values in a two-dimensional commutative algebra.

Keywords: *equation of hydrodynamics, analytic solutions, two-dimensional commutative associative algebra.*

В. С. Шпаківський

Гіперкомплексне предсталення аналітичних розв'язків одного рівняння гідродинаміки.

Побудовано аналітичні розв'язки одного рівняння гідродинаміки та отримано представлення цих розв'язків у вигляді дійснозначних компонент від деяких функцій зі значеннями в двовимірній комутативній алгебрі.

Ключові слова: *рівняння гідродинаміки, аналітичні розв'язки, двовимірна комутативна асоціативна алгебра.*

Ин-т математики НАН Украины, Киев
shpakivskyi86@gmail.com

Получено 15.11.16