УДК 517.9

©2016. **С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба**

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОМОЩИ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТИПА INTERFACE CONDITIONS

Найдены достаточные условия регуляризации линейной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным влиянием типа “interface conditions”. Построен обобщенный оператор Грина и найден вид линейного импульсного возмущения регуляризованой линейной краевой задачи типа “interface conditions”.

Ключевые слова: *условия регуляризации, обобщенный оператор Грина, импульсное воздействие.*

1. Постановка задачи.

Предположим линейную нетерову ($m \neq n$) краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \ \ell z(\cdot) = \alpha \tag{1}$$

не разрешимой для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$:

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} \neq 0, \ Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ \mathrm{rank}\ Q := n_1$$

в пространстве $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$. Здесь $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывные по t на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $X_0(t)$– фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (1), $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*)$. Исследуем задачу о регуляризации [3, 4] краевой задачи (1) при помощи импульсного воздействия [1, 2, 5, 6, 7, 8] В отличие от монографии [1] и статьи [8] поставим задачу не об условиях разрешимости линейной нетеровой краевой задачи (1) с фиксированным импульсным воздействием, а о нахождении импульсного воздействия, которое бы гарантировало разрешимость этой задачи для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора α, а также решения

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}, \ i = 1, \ 2, \ \dots, \ p, \ \tau_i \in [a,b]$$

этой задачи. Линейный ограниченный векторный функционал

$$\mathcal{L}z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

представим в виде

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i z(\cdot),\ \ell_0 z(\cdot) : \mathbb{C}[a, \tau_1] \to \mathbb{R}^m,\ \ell_p z(\cdot) : \mathbb{C}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^m,$$

$$\ell_i z(\cdot) : \mathbb{C}[\tau_{i-1}, \tau_i[\to \mathbb{R}^m,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ p.$$

Таким образом, получаем краевую задачу с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [5, 6, 7]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t),\ \mathcal{L}z(\cdot) = \check{\alpha}, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}z(\cdot) : = \begin{pmatrix} \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) \\ \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \ell_2 z(\cdot) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \ \dots\ + \ell_p z(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \alpha \end{pmatrix} := \check{\alpha}\ .$$

Исследуем задачу о регуляризации краевой задачи (2) в пространстве [1]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\},\ a < \tau_1 <\ \dots\ < \tau_p < b.$$

Поставленная задача продолжает исследование условий регуляризации линейных нетеровых краевых задач с импульсным воздействием, приведенных в монографии [1, с. 248] и статье [8], причем, в отличие от статьи [9], регуляризация краевой задачи происходит не при помощи вырожденного импульсного воздействия [10, 11, 12], а при помощи импульсного воздействия более общего вида [5, 6, 7].

2. Условия разрешимости задачи о регуляризации.

Обозначим матрицу

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t - \tau_1), & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t - \tau_p), & t \in [\tau_p, b]\ , \end{cases}$$

где $X_0(t)$ — нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (1). Обозначим также матрицы

$$\Theta := \begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & O & \dots & O \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & O \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \cdot m \times n \cdot (p+1)},\ \theta := \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \dots \\ \theta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}\ ,$$

ортопроектор $P_{\Theta^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\Theta^*)$, а также матрицы

$$Q_0 := \ell_0 X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \dots\ ,\ Q_p := \ell_p X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Общее решение

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a,b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\}$$

дифференциальной системы (2) представимо в виде

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s) \Big](t), \ t \in [a,b], \ t \neq \tau_i \in [a,b], \ c \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\mathcal{K}\Big[f(s) \Big](t) := X_0(t) \int_0^t X_0^{-1}(s) f(s) ds, \ t \in [a,b], \ t \neq \tau_i \in [a,b]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциальной системы (2). Подставляя общее решение

$$z_0(t,c_i) = X(t) \cdot c_i = \left\{ \begin{array}{cc} X_0(t) \cdot c_0, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t - \tau_1) \cdot c_1, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t - \tau_p) \cdot c_p, & t \in [\tau_p, b] \end{array} \right.$$

однородной части дифференциальной системы (2) в краевое условие (2) приходим к уравнению $\Theta \cdot \theta = 0$, общее решение которого

$$\theta = P_\Theta \cdot \check{\theta}, \ \check{\theta} \in \mathbb{R}^{n(p+1)};$$

здесь P_Θ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{n(p+1)} \to \mathbb{N}(\Theta)$. Обозначим матрицу P_{Θ_r}, составленную из $r \leq n$ линейно независимых столбцов ортопроектора P_Θ и матрицы

$$W_0 := (\ I_n \ O \ \ldots \ O \ ) \cdot P_{\Theta_r}, \ \ldots \ , \ W_p := (\ O \ O \ \ldots \ I_n \ ) \cdot P_{\Theta_r}.$$

Таким образом, получаем общее решение

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) \cdot c_r, \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

однородной части краевой задачи (2), где

$$X_r(t) := \left\{ \begin{array}{cc} X_0(t) \cdot W_0, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t - \tau_1) \cdot W_1, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t - \tau_p) \cdot W_p, & t \in [\tau_p, b] \end{array} \right.$$

— фундаментальная матрица однородной части краевой задачи (2). Для решения неоднородной краевой задачи (2) достаточно удовлетворить краевое условие

$$\mathcal{L}z(\cdot) := \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \ \ldots \ + \ell_p z(\cdot) = \check{\alpha}. \tag{3}$$

Подставляя общее решение дифференциальной системы (2)

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)$$

в краевое условие (3), приходим к уравнению

$$\mathcal{Q}\cdot c = \check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot),\ \mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\tau) := \mathcal{L}X(\cdot),\ \tau := [\ \tau_1,\ \tau_2,\ \dots\ ,\ \tau_p\ ]\ ,$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}^*}\Big\{\check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0;$$

здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$.

3. Решение задачи о регуляризации.

Разрешимость краевой задачи (2) для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ гарантирует условие $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, равносильное уравнению

$$\mathcal{F}(\tau) := \mathcal{Q}(\tau)\cdot\mathcal{Q}^+(\tau) = I_m \tag{4}$$

относительно неизвестного вектора $\tau \in \mathbb{R}^p$. Заметим, что в критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) уравнение (4) разрешимо лишь для фредгольмовой ($m = n$), либо недоопределенной ($m < n$) краевой задачи (2). Действительно, предположим задачу (2) переопределенной ($m > n$), при этом

$$\text{rank}\ \mathcal{Q}(\tau)\cdot\mathcal{Q}^+(\tau) \le \text{rank}\ \mathcal{Q}(\tau) = \text{rank}\ \mathcal{Q}^+(\tau) \le n < m,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (4). Уравнение (4), в частности, разрешимо для фредгольмовой ($m = n$) краевой задачи (2) при условии $\det\mathcal{Q}(\tau) \neq 0$, при этом существует по меньшей мере один вектор τ, являющийся решением уравнения (4). Таким образом, доказано следующее условие регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия.

Теорема. *Если краевая задача* (1) *в классе* $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ *является не разрешимой для произвольной непрерывной функции* $f(t)$ *и произвольного вектора* $\alpha \in \mathbb{R}^m$:

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} \neq 0,$$

то для каждого вектора $\tau \in \mathbb{R}^p$, *являющегося решением уравнения* (4), *краевая задача* (2) *в классе*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\},\ p = \min_{j\in\mathbb{N}} p_j,\ \max_{0\le i\le p_j} \text{rank}\ \Big[\mathcal{Q}(\tau)\Big] = m \le n$$

имеет по меньшей мере одно решение

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t),\ t \in [a, b],\ t \neq \tau_i \in [a, b],\ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\mathcal{Q}^+\Big\{\check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации при помощи импульсного воздействия (2),

$$X_r(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & W_0 = (\ I_n\ O\ \ldots\ O\ ) \cdot P_{\Theta_r}, \quad t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t - \tau_1)W_1, & W_1 = (\ O\ I_n\ \ldots\ O\ ) \cdot P_{\Theta_r}, \quad t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t - \tau_p)W_p, & W_p := (\ O\ O\ \ldots\ I_n\ ) \cdot P_{\Theta_r}, \quad t \in [\tau_p, b] \end{cases}$$

— фундаментальная матрица однородной части задачи (2).

Пример 1. *Условия доказанной теоремы выполняются для трехточечной задачи*

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ \ell z(\cdot) := M_0 z(-\pi) + M_1 z(0) + M_2 z(\pi) = \alpha,\ \alpha := 1, \tag{5}$$

которая для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi; \pi]$ *не имеет решений в классе функций* $z(t) \in \mathbb{C}^1[-\pi; \pi]$; *в то же время в классе*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[-\pi; \pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ \tau_1 := -\frac{\pi}{2},\ \tau_2 := \frac{\pi}{2}$$

трехточечная краевая задача с импульсным воздействием

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ t \neq \tau,\ \mathcal{L}z(\cdot) := M_0 z(-\pi) + M_1 z(0) + M_2 z(\pi) = \alpha \tag{6}$$

разрешима для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi; \pi]$; *здесь*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ M_0 = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_1 = 2M_0.$$

Поскольку

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_{Q^*} = (1),\ P_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

постольку в случае трехточечной задачи для дифференциального уравнения (5) имеет место критический случай, при этом необходимое и достаточное условие существования гладкого решения в классе $z(t) \in \mathbb{C}^1[-\pi; \pi]$ для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi; \pi]$ не выполнено, в то же время в классе

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[-\pi; \pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ \tau_1 := -\frac{\pi}{2},\ \tau_2 := \frac{\pi}{2}$$

трехточечная краевая задача с импульсным воздействием (6) разрешима для произвольной функции

$$f(t) \in \mathbb{C}\Big\{[-\pi;\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}.$$

В том же пространстве нормальная ($X(-\pi) = X(-\frac{\pi}{2}) = X(\frac{\pi}{2}) = I_2$) фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (5) принимает вид

$$X(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}, & t \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}[, \\ \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}, & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Здесь

$$Q_0 := \ell_0 X_0(\cdot) = M_0 X_0(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 := \ell_1 X_0(\cdot) = M_1 X_0(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$Q_2 := \ell_2 X_0(\cdot) = M_2 X_0(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения фундаментальной системы решений $X_r(t)$ однородной части дифференциальной системы (6) используем матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ортопроектор

$$P_\Theta = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

а также матрицу, составленную из двух линейно независимых столбцов последнего ортопроектора

$$P_{\Theta_r} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$; постольку неоднородная задача (6), регуляризованная при помощи импульсного воздействия, разрешима для произвольной функции $f(t)$; здесь

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

При этом трехточечная краевая задача с импульсным воздействием (6), регуляризованная при помощи импульсного воздействия имеет однопараметрическое семейство решений

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t),\ t\in[-\pi;\pi],\ t\neq\tau_1=-\frac{\pi}{2},\ t\neq\tau_2=\frac{\pi}{2},\ c_r\in\mathbb{R}^2,$$

где

$$X_r(t)=\begin{cases} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\cos t+\sin t & 0\\ -\cos t-\sin t & 0\end{pmatrix}, & t\in[-\pi;-\frac{\pi}{2}[,\\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cos t+3\sin t & 0\\ -3\cos t+2\sin t & 0\end{pmatrix}, & t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\cos t-\sin t\\ 0 & \cos t-\sin t\end{pmatrix}, & t\in[\frac{\pi}{2};\pi]\end{cases}$$

— фундаментальная матрица однородной части трехточечной краевой задачи с импульсным воздействием (6),

$$\mathcal{G}\Big[f(s),\alpha\Big](t)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\ -2\cos t+11\sin t\end{bmatrix},\ t\in\Big[-\pi;-\frac{\pi}{2}\Big[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s),\alpha\Big](t)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\ \cos t+12\sin t\end{bmatrix},\ t\in\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s),\alpha\Big](t)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-2\cos t+\sin t\\ -\cos t+8\sin t\end{bmatrix},\ t\in\Big[\frac{\pi}{2};\pi\Big]$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации при помощи импульсного воздействия (5).

Уравнение (4) в частности разрешимо для фредгольмовой ($m=n$) периодической задачи

$$dz(t)/dt = A(t)z(t)+f(t),\ \ell z(\cdot):=z(0)-z(T)=0, \tag{7}$$

при этом любое $0<\tau<T$ является решением уравнения (4). Таким образом, доказано следующее условие регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия.

Следствие. *Если краевая задача* (7) *в классе* $z(t)\in\mathbb{C}^1[0;T]$ *является не разрешимой для произвольной непрерывной функции* $f(t)$:

$$P_{Q^*}\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\neq 0,$$

то для каждого $0<\tau<T$ *краевая задача (7) в классе*

$$z(t)\in\mathbb{C}^1\Big\{[0,T]\setminus\{\tau\}_I\Big\}$$

имеет по меньшей мере одно решение

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t),\ t \in [0;T],\ t \neq \tau,\ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t) := \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации при помощи импульсного воздействия периодической задачи (7),

$$X_r(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & W_0 = (\ I_n\ O\ ) \cdot P_{\Theta_r}, \quad t \in [0, \tau[, \\ X_0(t - \tau_1)W_1, & W_1 = (\ O\ I_n\ ) \cdot P_{\Theta_r}, \quad t \in [\tau, T] \end{cases}$$

— фундаментальная матрица однородной части задачи (7).

Пример 2. *Условия доказанного следствия выполняются для периодической задачи*

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ \ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0, \tag{8}$$

которая для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ *не имеет решений в классе функций* $z(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$; *в то же время в классе*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\},\ \tau := \pi$$

периодическая краевая задача с импульсным воздействием

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ t \neq \tau,\ \mathcal{L}z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0 \tag{9}$$

разрешима для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$; *здесь*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} \cos t & t\sin t & -\sin t & t\cos t & t\cos t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t & -\sin t \\ \sin t & -t\cos t & \cos t & t\sin t & t\sin t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t & -e^t + \cos t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix},$$

постольку

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\pi & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+e^{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{2\pi} \end{pmatrix},$$

при этом

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

следовательно, в случае периодической задачи (8) имеет место критический случай, при этом необходимое и достаточное условие существования гладкого решения в классе $z(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ для произвольной функции $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ не выполнено, в то же время в классе

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\},\ \tau := \pi$$

периодическая краевая задача с импульсным воздействием (9) разрешима для произвольной функции

$$f(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}.$$

Действительно, нормальная ($X(0) = X(\pi) = I_5$) фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части дифференциальной системы с импульсным воздействием (9)

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0; \pi[, \\ X_0(t-\pi), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

определяет равенство $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, где

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

Для построения фундаментальной системы решений $X_r(t)$ однородной части дифференциальной системы (6) используем матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q_0 = I_5$, кроме того

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

При этом периодическая краевая задача, регуляризованная при помощи импульсного воздействия (9) имеет единственное ($P_Q = 0$) решение $z(t) = \mathcal{G}[f(s)](t)$ для произвольной непрерывной функции $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$; положим, к примеру,

$$f(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

при этом, для $t \in [0, \pi[$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s), 0\Big](t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c} (2+\pi+t)((\pi+t)\cos t + (2\pi-1+2t)\sin t) \\ 2(\pi+t)(2\cos t - \sin t) \\ -(2\pi^2 + t(3+2t) + \pi(3+4t))\cos t + (3+\pi^2+2t+t^2+2\pi(1+t))\sin t \\ 2(e^{\pi+t} + (1+\pi+t)\cos t + 2(1+\pi+t)\sin t) \\ 2(-e^{\pi+t} - \cos t - \sin t) \end{array}\right]$$

и при $t \in [\pi; 2\pi]$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s), 0\Big](t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c} (-2+\pi-t)((\pi-t)\cos t + (2\pi+1-2t)\sin t) \\ -2(\pi-t)(2\cos t - \sin t) \\ (2\pi^2 - t(3+2t) + \pi(3+4t))\cos t + (3+\pi^2+2t+t^2-2\pi(1+t))\sin t \\ 2(e^{-\pi+t} + (1-\pi+t)\cos t + 2(1-\pi+t)\sin t) \\ 2(-e^{-\pi+t} - \cos t - \sin t) \end{array}\right]$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации при помощи импульсного воздействия (9).

В отличие от статьи [9] задача о регуляризации линейной краевой задачи при помощи импульсного воздействия решена конструктивно, причем получены достаточные условия существования решения уравнения (4).

Предложенная в статье техника регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия может быть аналогично [13–15] перенесена на матричные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также аналогично [16, 17] — на матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, полученные в статье результаты могут быть аналогично [18] перенесены на матричные краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений, а также, аналогично [19] — на матричные краевые задачи в абстрактных пространствах.

В заключение, считаем своим долгом от всего сердца поблагодарить члена-корреспондента НАН Украины Владимира Яковлевича Гутлянского за постоянное внимание и поддержку, а также поздравить его с замечательным юбилеем и пожелать плодотворной работы, новых творческих идей, осуществления всех замыслов, душевной гармонии и оптимизма. Пусть накопленный жизненный опыт и мудрость поможет Вам достичь новых высот.

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 287 с.
3. *Азбелев Н. В., Максимов Н. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
4. *Крейн С. Г.*Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
5. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 8. — С. 1132–1135.
6. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. — 2001. — Т. 379, № 2. — С. 170–172.
7. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 1. — С. 51–65.
8. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 1. — С. 21–31.
9. *Чуйко С. М.* О регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи вырожденного импульсного воздействия // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 133–145.
10. *Бойчук А. А., Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Слабонелинейные краевые задачи с импульсным воздействием типа "interface conditions"// Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 3. — С. 291–296.
11. *Бойчук А. А., Чуйко Е. В., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 5. — С. 588–594.
12. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. — 1999. — № 6. — С. 43–47.
13. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – V. 37, № 4. – P. 464–471.
14. *Chuiko S. M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. — 2016. — V. 60, № 8. — P. 64–73.
15. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. — 2016. — V. 17, № 1. — P. 139–150.
16. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). — 2015. — V. 210, № 1. — P. 9– 21.
17. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — V. 56, № 4. — P. 752–760.
18. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukrainian Mathematical Journal. — 1996. — V. 48, № 11. — P. 1785–1789.

19. *Чуйко С. М.* Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения / О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 157–1579.

S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, M. V. Dziuba

Regularization of linear Fredholm boundary-value problem for system of ordinary differential equations of impulsive influence of type "interface conditions" .

Sufficient conditions for the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem for system of ordinary differential equations with impulsive influence of type "interface conditions" are obtained. Generalized Green's operator and the aspect of linear impulsive perturbation regularization of linear boundary-value problem of type "interface conditions" has been constructed.

Keywords: *conditions for the regularization, generalized Green's operator, impulsive perturbation.*

С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, М. В. Дзюба

Регуляризація лінійної нетерової крайової задачі за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

Знайдено достатні умови регуляризації лінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом типу "interface conditions". Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд лінійного імпульсного збурення регуляризованої лінійної крайової задачі типу "interface conditions".

Ключові слова: *умови регуляризації, оператор Гріна, імпульсний вплив.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
chujko-slav@inbox.ru

Получено 04.10.16