УДК 517.5

©2016. **Е. А. Севостьянов, А. А. Маркиш**

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ, КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ В СРЕДНЕМ

Изучается поведение открытых дискретных отображений, квазирегулярных в среднем. Доказано, что семейства таких отображений равностепенно непрерывны (нормальны) в заданной области.

Ключевые слова: *отображения с ограниченным и конечным искажением, модули семейств кривых, ёмкости конденсаторов.*

1. Введение.

В относительно недавних статьях [1] и [2] рассмотрены вопросы о локальном поведении классов отображений, характеристика квазиконформности $Q(x)$ которых подчинена некоторому интегральному условию, выражаемому при помощи заданной функцией $\Phi(x)$ (см. там же). Такие отображения мы называем отображениями, квазиконформными в среднем. В частности, в работе [1] рассмотрены классы гомеоморфизмов, характеристика которых может меняться (зависеть от отображения), в то время как в статье [2] «мажоранта» $Q(x)$ является фиксированной, общей для всего рассматриваемого семейства. Основная цель настоящей заметки – распространить результаты работы [2] на случай «переменной» мажоранты $Q(x)$, когда класс отображений определяется только функцией $\Phi(x)$, а не функцией Q, отвечающей за искажение модуля семейств кривых. При этом, усиление полученных ниже результатов в сравнении с работой [1] состоит в том, что здесь рассматриваются открытые дискретные отображения, а не только гомеоморфизмы.

Основные определения и обозначения, использующиеся ниже, могут быть найдены в монографии [3] либо статьях [1] и [2] (см. также работы [4] и [5]).

Как обычно, для множеств E и $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D. Здесь и далее h – хордальная метрика (см. [6]). Следующая конструкция может быть найдена в работе [7]. Пусть $Q(x, t) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, y) < t\}$ – сферический шар с центром в точке x радиуса t. Для $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и чисел $0 < r < t < 1$ полагаем $\widetilde{x} = -\frac{x}{|x|^2}$,

$$\begin{cases} m_t(E, r, x) = M(\Gamma(\partial Q(x, t), E \cap \overline{Q(x, r)}))\,, \\ \qquad m(E, x) = m_{\sqrt{3}/2}(E, \frac{\sqrt{2}}{2}, x)\,, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} c(E, x) = \max\{m(E, x), m(E, \widetilde{x})\}\,, \\ \qquad c(E) = \inf\limits_{x \in \overline{\mathbb{R}^n}} c(E, x)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция. Обозначим через

$\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений в D, таких что $c\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geq\Delta$ и

$$\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right)\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\ \leq\ M\,.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\Phi\,:\,[0,\infty]\,\rightarrow\,[0,\infty]$ *– неубывающая выпуклая функция. Если*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\ =\ \infty \qquad (2)$$

для некоторого $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$, *то класс* $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ *является равностепенно непрерывным, и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех* $M\in(0,\infty)$ *и* $\Delta\in(0,1)$.

Ещё раз подчеркнём, что в определении класса $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ функция Q не участвует; два различных отображения f_1 и f_2, которым соответствуют разные функции Q_1 и Q_2, могут, вообще говоря, принадлежать одному классу $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$.

2. Лемма об оценке искажения.

Пусть $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ — класс всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений f в области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, таких что $c\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geq\Delta>0$. Для доказательства теоремы 1 установим справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\Delta>0$ *и* $Q:D\rightarrow[0,\infty]$ *– измеримая функция. Тогда*

$$h\left(f(x),f(x_0)\right)\leq\frac{\omega_{n-1}}{c_n\Delta}\cdot\frac{1}{\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}} \qquad (3)$$

для каждого $f\in\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ *и* $x\in B(x_0,\varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, *где* $c_n>0$ *зависит только от* n *и* $q_{x_0}(r)$ *– среднее интегральное значение функции* $Q(z)$ *на сфере* $|z-x_0|=r$.

Доказательство. Применим подход, использованный при доказательстве леммы 2 в [8]. Полагаем $\varepsilon_0:=\varepsilon(x_0)$. Для фиксированного отображения $f\in\mathfrak{R}_{Q,\Delta}$ рассмотрим конденсаторы $E=(A,C)$ и $f(E)=E'=(f(A),f(C))$, где $C:=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $A=B(x_0,\varepsilon_0)$. Условимся, что для конденсатора E символ Γ_E обозначает семейство всех кривых вида $\gamma:[a,\,b)\rightarrow A$, таких что $\gamma(a)\in C$ и $|\gamma|\cap(A\setminus F)\neq\varnothing$ для произвольного компакта $F\subset A$, где $|\gamma|=\{x\in\mathbb{R}^n:\exists\, t\in[a,b):\gamma(t)=x\}$. Пусть $\Gamma_{E'}$ и Γ_E – соответствующие семейства кривых для конденсаторов E и E', соответственно. Ввиду предложения 10.2 гл. II в [9] имеем $M(\Gamma_{E'})=\operatorname{cap}f(E)$. Полагая $E_f:=\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)$, заметим, кроме того, что $\Gamma(f(C),E_f)>\Gamma_{E'}$ (см. теорему

1.I.46 в [10]) и, следовательно, в силу свойства минорирования модуля (см. теорему 6.4 в [6]) и леммы 1 в [11]

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\le M(\Gamma_{E'})=\operatorname{cap} f(E)\le \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,, \tag{4}$$

где ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ и

$$I=I(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\,.$$

С другой стороны, согласно теореме 3.14 в [7]

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\ge \beta\min\{c(f(C)),c(E_f)\}\,, \tag{5}$$

где постоянная β зависит только от n. Поскольку для каждого связного множества F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место неравенство $c(F)\ge a_nh(F)$, где $h(F)$ – хордальный диаметр множества F, а a_n – некоторая постоянная (см. следствие 3.13 в [7]), будем иметь

$$c(f(C))\ge a_n\cdot h(f(C))\,. \tag{6}$$

Известно, что $c(E)\le \omega_{n-1}\cdot\left(\log\sqrt{3}\right)^{1-n}$ для любого множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. соотношение (3.7) в [7] и определение функции $c(\cdot)$ в (1)), так что

$$\frac{c(E)}{\omega_{n-1}\cdot\left(\log\sqrt{3}\right)^{1-n}}\quad\le\quad 1\qquad\forall\ E\subset\overline{\mathbb{R}^n}\,. \tag{7}$$

Предположим, что min в правой части (5) равен $c(f(C))$, тогда в силу соотношений (6) и (7)

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\ge\beta\cdot a_n\cdot h(f(C))\ge\frac{\beta\cdot a_n\cdot h(f(C))c(E_f)}{\omega_{n-1}\cdot\left(\log\sqrt{3}\right)^{1-n}}\,. \tag{8}$$

Пусть $\min\{c(f(C)),c(E_f)\}=c(E_f)$, тогда из (5) следует, что

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\ge c(E_f)\ge h(f(C))c(E_f)\,. \tag{9}$$

Полагая $c_n:=\min\left\{1,\frac{\beta\cdot a_n}{\omega_{n-1}\cdot\left(\log\sqrt{3}\right)^{1-n}}\right\}$, из (8) и (9) будем иметь, что

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\ge c_n\cdot h(f(C))c(E_f)\ge c_n\Delta h(f(C))\,. \tag{10}$$

Из соотношений (4) и (10) вытекает, что

$$h(f(C))\le\frac{\omega_{n-1}}{c_n\Delta I^{n-1}}\,. \tag{11}$$

Выберем теперь произвольно $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, $x \neq x_0$, тогда найдётся $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, такое что $|x - x_0| = \varepsilon$. Поскольку в сделанных выше обозначениях $x \in C$, то согласно оценке (11) мы получим, что

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta I^{n-1}}\,,$$

что и доказывает лемму. $\Box$

3. Доказательство теоремы 1.

Идея доказательства соответствует подходу, использованному при установлении теоремы 4.1 в [1]. По лемме 3.1 в [1] имеем оценку

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \tag{12}$$

где $\varepsilon = |x - x_0|/\rho$, $q(r) = q_{x_0}(\rho r)$ и

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega_n \rho^n \left(1 - \varepsilon^n\right)} \int\limits_{R} \Phi\left(Q(z)\right) dm(z)\,,$$

$R = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < |z - x_0| < \rho\}$ – кольцо с центром в точке x_0 и Ω_n – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Т.к. $|z| \leq |z - x_0| + |x_0| \leq \rho(x_0) + |x_0|$, получаем, что

$$M(\varepsilon) \leq \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n(1 - \varepsilon^n)} \int\limits_{R} \Phi(Q(z)) \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^n}\,,$$

где $\beta_n(x_0) = \left(1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2\right)^n / \rho^n(x_0)$. Следовательно, при $\varepsilon \leq 1/\sqrt[n]{2}$ и, в частности, при $\varepsilon \leq 1/2$,

$$\Phi(0) \leq M(\varepsilon) \leq \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M\,.$$

Таким образом, из оценки (12) вытекает, что для всех x, таких что $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \tag{13}$$

где λ_n — некоторая постоянная, зависящая только от n. Тогда из (3) и (13) вытекает, что

$$h\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta} \cdot \frac{n}{\int\limits_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}}\,,$$

откуда ввиду условия (2) вытекает равностепенная непрерывность класса $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ в точке x_0. $\Box$

1. *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2011. – Vol. 36. – P. 231–244.
2. *Севостьянов Е. А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 131–156.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева (под редакцией В.И. Рязанова). – К.: Наук. думка, 2013. – 303 с.
5. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р. и Севостьянов Е. А.* Нормальность класов Орлича–Соболева // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, №1. – С.106–116.
6. *Väisälä J.* Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
7. *Vuorinen M.* Some inequalities for the moduli of curve families // Michigan Math. J. – 1983. – Vol. 30. – P. 369–380.
8. *Севостьянов Е. А.* О равностепенно непрерывных семействах отображений, не принимающих значения из переменного множества // Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, № 3. – С. 361–370.
9. *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
10. *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.
11. *Севостьянов Е. А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. мат. журнал. – 2009. – Т. 61, № 10. – С. 1367–1380.

E. A. Sevost'yanov, A. A. Markysh

On equicontinuity of some class of mappings, which are quasiregular in the mean.

A behavior of open discrete mappings, which are quasiregular in the mean, is investigated. It is proved that the classes of mappings mentioned above are equicontinuous (normal).

Keywords: *mappings with finite and bounded distortion, moduli of curve's families, capacities of condensers.*

Є. О. Севостьянов, А. А. Маркиш

Про одностайну неперервність одного класу відображень, квазірегулярних у середньому.

Вивчається поведінка відкритих дискретних відображень, квазірегулярних у середньому. Доведено, що сім'ї таких відображень одностайно неперервні (нормальні) в заданій області.

Ключові слова: *відображення зі скінченним і обмеженим спотворенням, модулі сімей кривих, ємності конденсаторів.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`esevostyanov2009@mail.ru`,
`tonya@bible.com.ua`

Получено 03.07.16