

УДК 517.5

©2016. В. В. Билет, Р. Р. Салимов

ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ ОБРАЗА КРУГА ДЛЯ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

Для регулярных гомеоморфизмов класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающих N -свойством Лузина, установлена оценка площади образа круга в терминах угловой дилатации. Как следствие, получен аналог известной леммы типа Икомы–Шварца для таких отображений.

Ключевые слова: угловая дилатация, изопериметрическое неравенство, класс Соболева

Статья посвящена профессору В. Я. Гутлянскому по случаю его 75-летнего юбилея.

1. Введение.

В данной статье получены точные оценки искажения площади образа круга при регулярных гомеоморфизмах класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающих N -свойством (Лузина).

Отметим, что впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии Лаврентьева М. А., см. [3]. В монографии [1], см. предложение 3.7, получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [5] и [7] верхние оценки искажения площади образа круга были получены методом модулей.

Пусть G — область в комплексной плоскости \mathbb{C} , то есть связное, открытое подмножество \mathbb{C} . Напомним, что отображение $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *регулярным* в точке $z_0 \in G$, если в этой точке f имеет полный дифференциал и его Якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ (см., например, I. 1.6 в [4]). Гомеоморфизм f класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ называется *регулярным*, если $J_f > 0$ почти всюду (п.в.).

Говорят, что гомеоморфизм $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ обладает N -свойством (Лузина), если для любого множества $E \subset G$ из условия $|E| = 0$ следует, что $|f(E)| = 0$.

Пусть f — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, $p > 1$. Будем называть величину

$$D_p(z, z_0) = D_p(z_0 + re^{i\theta}, z_0) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})} \quad (1)$$

p -угловой дилатацией отображения f относительно точки z_0 . Здесь $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, J_f — якобиан отображения f . При $z_0 = 0$ будем полагать $D_p(z) = D_p(re^{i\theta})$.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке гранта 0115U000136 Министерства образования и науки Украины.

2. Вспомогательные результаты.

Обозначим через $L(r)$ длину кривой $f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta < 2\pi$, и через $S(r) = |f(B_r)|$ – площадь $f(B_r)$. Везде далее полагаем

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ – регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающий N -свойством. Тогда при $p \geq 2$

$$L^p(r) \leq \delta_p(r) S'(r) \quad (3)$$

для п.в. $r \in [0, 1]$, где

$$\delta_p(r) = \left(\int_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}. \quad (4)$$

Доказательство. Для п.в. $r \in [0, 1]$, имеем

$$L(r) = \int_0^{2\pi} |f_\theta(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta}) J_f^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta}) r d\theta, \quad (5)$$

где $D_p(re^{i\theta})$ – p -угловая дилатация, определенная в (1).

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$L(r) \leq \left(\int_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta}) r d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p-1}}(re^{i\theta}) r d\theta \right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (6)$$

для п.в. $r \in [0, 1]$. Используя тот факт, что

$$S'(r) = \int_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta}) r d\theta, \quad (7)$$

получаем

$$L^p(r) \leq \delta_p(r) S'(r) \quad (8)$$

для п.в. $r \in [0, 1]$. Лемма 1 доказана. \square

В следующей лемме получено дифференциальное неравенство для функции $S(r)$.

Лемма 2. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ – регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающий N -свойством. Тогда при $p \geq 2$

$$S'(r) \geq (4\pi)^{\frac{p}{2}} \delta_p^{-1}(r) S^{\frac{p}{2}}(r) \quad (9)$$

для п.в. $r \in [0, 1]$, где $\delta_p(r)$ определено равенством (4).

Доказательство. Из неравенства (3) следует, что для п.в. $r \in [0, 1]$

$$S'(r) \geq \delta_p^{-1}(r) L^p(r). \quad (10)$$

Используя далее известное изопериметрическое неравенство

$$L^2(r) \geq 4\pi S(r), \quad (11)$$

получаем дифференциальное неравенство (9). Лемма 2 доказана. \square

Лемма 3. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающий N -свойством. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка

$$S(r_1) \leq S(r_2) \exp \left\{ -4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)} \right\}, \quad (12)$$

а при $p > 2$ —

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leq (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{p-2}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}, \quad (13)$$

где $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ и $\delta_p(r)$ определено равенством (4).

Доказательство. Воспользуемся дифференциальным неравенством (9). Тогда для п.в. $r \in [0, 1]$

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{p}{2}}(r)} dr \geq (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \quad (14)$$

При $p = 2$, имеем

$$\frac{S'(r)}{S(r)} dr \geq 4\pi \frac{dr}{\delta_2(r)}. \quad (15)$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $r \in [r_1, r_2]$, получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))' dr \geq 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)}. \quad (16)$$

Заметим, что функция $g(r) = \ln S(r)$ является неубывающей, тогда

$$\int_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))' dr = \int_{r_1}^{r_2} g'(r) dr \leq g(r_2) - g(r_1) = \ln \frac{S(r_2)}{S(r_1)} \quad (17)$$

(см., напр., теорему IV. 7.4 в [6]) и

$$\ln \frac{S(r_2)}{S(r_1)} \geq 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)}, \quad (18)$$

откуда

$$S(r_1) \leq S(r_2) \exp \left\{ -4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)} \right\}. \quad (19)$$

При $p > 2$, имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}} \right)' dr \geq (4\pi)^{\frac{p}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \quad (20)$$

Заметим, что функция $g_p(r) = \frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}$ является неубывающей, тогда

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}} \right)' dr = \int_{r_1}^{r_2} g_p'(r) \leq g_p(r_2) - g_p(r_1) = \frac{2}{2-p} \left(S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) \right) \quad (21)$$

(см., теорему IV. 7.4 в [6]).

Таким образом, получаем

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leq (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{p-2}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \quad (22)$$

Лемма 3 доказана. \square

3. Основные результаты.

Ниже приведена теорема об оценке площади образа круга.

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающий N -свойством. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка

$$|f(B_r)| \leq \pi \exp \left\{ -4\pi \int_r^1 \frac{dt}{\delta_2(t)} \right\}, \quad (23)$$

а при $p > 2$ —

$$|f(B_r)| \leq \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1} (p-2) \int_r^1 \frac{dt}{\delta_p(t)} \right)^{-\frac{2}{p-2}}, \quad (24)$$

где

$$\delta_p(r) = \left(\int_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}. \quad (25)$$

Доказательство. Теорема 1 следует из леммы 3 при условии, что $S(1) \leq |f(\mathbb{B})| = \pi$. \square

Из теоремы 1 вытекает аналог известной леммы типа Икомы-Шварца (см. теорему 2 в [2]).

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$, обладающий N -свойством, $f(0) = 0$. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \exp \left\{ 2\pi \int_{|z|}^1 \frac{dt}{\delta_2(t)} \right\} \leq 1, \quad (26)$$

а при $p > 2$ —

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \left(1 + (2\pi)^{p-1} (p-2) \int_{|z|}^1 \frac{dt}{\delta_p(t)} \right)^{\frac{1}{p-2}} \leq 1. \quad (27)$$

Следствие 1. В частности, если $p > 2$, то имеет место оценка

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \left(\int_{|z|}^1 \frac{dt}{\delta_p(t)} \right)^{\frac{1}{p-2}} \leq (2\pi)^{1-p} (p-2)^{\frac{1}{2-p}}. \quad (28)$$

Доказательство теоремы 2. Положим $l_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда, учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\pi l_f^2(r) \leq |f(B_r)|$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \sqrt{\frac{|f(B_r)|}{\pi}}. \quad (29)$$

Таким образом, учитывая неравенства (23) и (24), имеем

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z)|}{\mathcal{R}_p(|z|)} = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}_p(r)} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{|f(B_r)|}{\pi}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_p(r)} \leq 1, \quad (30)$$

где

$$\mathcal{R}_p(r) = \left(1 + (2\pi)^{p-1} (p-2) \int_r^1 \frac{dt}{\delta_p(t)} \right)^{-\frac{1}{p-2}} \quad (31)$$

при $p > 2$ и

$$\mathcal{R}_p(r) = \exp \left\{ -2\pi \int_r^1 \frac{dt}{\delta_2(t)} \right\} \quad (32)$$

при $p = 2$. Теорема 2 доказана. \square

1. *Bojarski B., Gutlyanski V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane. – Tracts in Mathematics 19, Warsaw - Donetsk - Helsinki, 2013, 216 p.
2. *Икома К.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – V. 25. – P. 175–203.
3. *Лаверентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М: АН СССР, 1962, 136 с.
4. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York: Springer-Verlag, 1973, 258 p.
5. *Ломако Т. В., Салимов Р. Р.* К теории экстремальных задач // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 264–269.
6. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949, 495 с.
7. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p -модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. – 2014. – Т. 26, № 6. – С. 143–171.

V. V. Bilet, R. R. Salimov

The estimation of the area of a disk image for Sobolev classes.

For regular homeomorphisms of the Sobolev class $W_{loc}^{1,1}$ having the Luzin N -property, it is established the estimation of the area of a disk image in terms of an angular dilatation. As a corollary, the analog of the well-known Icoma–Schwartz type lemma for such mappings is obtained.

Keywords: angular dilatation, isoperimetric inequality, Sobolev class.

В. В. Білет, Р. Р. Салімов

Оцінка площі образу кола для класів Соболева.

Для регулярних гомеоморфізмів класу Соболева $W_{loc}^{1,1}$, які задовольняють N -властивості Лузіна, встановлено оцінку площі образу кола в термінах кутової дилатації. Як наслідок, отримано аналог відомої леми типу Ікоми–Шварца для таких відображень.

Ключові слова: кутова дилатація, ізопериметрична нерівність, клас Соболева.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
 Ин-т математики НАН Украины, Киев
biletvictoriya@mail.ru, ruslan623@yandex.ru

Получено 09.07.16