УДК 62-50, 519.7

©2015. **В. Ф. Щербак**

НАБЛЮДАТЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В работе рассмотрена задача наблюдения состояния динамической системы в присутствии неопределенных возмущений. Используется подход, связанный с синтезом инвариантных соотношений в задачах наблюдения. Получены условия, которые для рассматриваемого класса нелинейных систем являются достаточными для исключения возмущений из уравнений, формирующих инвариантные соотношения. В качестве приложения решена задача определения угловой скорости твердого тела, находящегося под действием момента сил, модуль которого неизвестен. Приведено два способа получения асимптотических оценок скорости вращения. Первый из них связан с исключением возмущающего момента из уравнений, формирующих обобщенный наблюдатель. Для случаев, когда исключить возмущения невозможно, предложена адаптивная схема решения задачи наблюдения с одновременной идентификацией постоянного модуля момента сил.

Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, динамические системы с неопределенностью, инвариантные соотношения, твердое тело с неподвижной точкой.*

1. Синтез инвариантных соотношений в задаче наблюдения динамических систем с неопределенностью.

Во многих практических приложениях теории управления характерной является ситуация, при которой имеется информация не о всем фазовом векторе рассматриваемой системы, а только о некоторой функции от него. В связи с этим возникает задача наблюдения, состоящая в определении полного вектора состояния динамической системы по имеющейся информации о ее функционировании.

Один из основных способов ее решения состоит в построении наблюдателя состояния, т.е. в синтезе специальной динамической системы, которая формирует оценку вектора состояний по доступной информации о системе и ее измеряемом выходе. Начиная с работ [1, 2] решению этой задачи для различных классов систем при тех или иных предположениях о параметрах системы, о доступной информации, посвящено большое число публикаций. Построение наблюдателя существенно усложняется при наличии неопределенностей. В этом случае возникает следующая задача наблюдения

Задача 1. Требуется асимптотически точно восстановить (оценить) полный фазовый вектор $x(t)$ динамической системы

$$\dot{x} = f(x, m), \quad x \in R^n, \quad m \in R^q, \tag{1}$$

$$y = h(x), \quad y \in R^k. \tag{2}$$

по измерениям ее выхода $y(t)$, при неизвестном возмущении $m(t)$.

Проведенные исследования задачи 1 для линейных систем [3, 4] показывают, что разработанные методы ее решения используют один из следующих способов устранения неопределенностей: а) исключение возмущений $m(t)$ из уравнений для ошибки оценивания; б) декомпозиция и выделение подсистемы, не зависящей явно от $m(t)$ с последующим построением редуцированного наблюдателя для полученной подсистемы; в) идентификация возмущений. При этом общим условием является требование, чтобы размерность выхода превышала размерность вектора помех, т.е. $k > q$.

Рассмотрим особенности использования метода синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения [5] при наличии неопределенных возмущений, присутствующих в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих динамику исследуемого объекта. Предполагается, что внешнее возмущение $m(t)$ удовлетворяет ограничениям, гарантирующим существование и бесконечную продолжимость решений системы (1) вправо.

Не ограничивая общности, представим фазовый вектор x в виде двух подвекторов $x = (x_1, x_2),^T$ где $x_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^k),^T$ $x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^n)^T$ и далее будем полагать, что система (1) с помощью невырожденной замены переменных приведена к виду, при котором измеряются первые k координат, $y(t) = x_1(t)$. Далее будем считать, что условия наблюдаемости выполнены и ограничим класс рассматриваемых объектов системами, правые части которых линейны относительно неизмеряемых переменных $x_2(t)$ и возмущений $m(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + b_1(x_1)m, \\ \dot{x_2} &= f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2 + b_2(x_1)m. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $g_1(x_1), g_2(x_1), b_1(x_1), b_2(x_1)$ – соответственно матрицы размерностей $k \times (n-k)$, $(n-k) \times (n-k)$, $k \times q$ и $(n-k) \times q$.

Задача наблюдения системы (3) состоит в определении (оценивании) значений вектора $x_2(t)$ по информации об $x_1(t)$. Метод синтеза инвариантных соотношений в задаче наблюдения основан на представлении этого вектора в виде некоторой функции от известных величин. Для систем линейных относительно неизвестных компонент фазового вектора такая зависимость ищется в виде

$$x_2(t) = p(t) + \Phi(x_1(t)), \tag{4}$$

где переменные $p(t)$ являются решениями задачи Коши для некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = u(p, x_1(t)), \;\; p(0) = p_0 \in R^{n-k}. \tag{5}$$

На вектор-функции $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^{n-k})^T, u = (u^1, u^2, ..., u^{n-k})^T$ пока не накладывается никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Отметим, что если эти функции выбраны, то правые части соотношений (4), при решении задачи Коши для дифференциальных уравнений (5), становятся известными функциями времени. Основной задачей используемого подхода является такой выбор функций $\Phi(x_1), u(p, x_1)$, при котором равенства (4) становятся инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений (3),(5).

Введем переменную ε, которая характеризуют невязку в формулах (4) на решениях (3),(5).

$$x_2(t) = p(t) + \Phi(x_1(t)) + \varepsilon, \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (3) замену переменных. Перейдем по формулам (6) от переменных x_2 к переменным ε. Дифференцируя (6) в силу систем,(3)(5), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\dot{\varepsilon} = -u + f_2 - \Phi'_{x_1} f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)(p + \Phi + \varepsilon) + (b_2 - \Phi'_{x_1} b_1)m. \tag{7}$$

Здесь

$$\Phi'_{x_1} = \frac{\partial(\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^{n-k})}{\partial(x^1, ..., x^k)}$$

прямоугольная $(n-k) \times k$ матрица Якоби.

Чтобы равенства (4) выполнялись тождественно на некоторых решениях (5), необходимо показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) = 0$. С этой целью конкретизируем правые части (5), полагая их равными

$$u(p, x_1(t)) = f_2 - \Phi'_{x_1} f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)(p + \Phi). \tag{8}$$

В результате система дифференциальных уравнений (7) для отклонений ε принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)\varepsilon + (b_2 - \Phi'_{x_1} b_1)m. \tag{9}$$

Необходимым условием того, что система (9) допускает тривиальное решение, является исключение возмущений $m(t)$ из этой системы. Это требование приводит к условиям

$$b_2 = \Phi'_{x_1} b_1. \tag{10}$$

Для их выполнения в нашем распоряжении имеется вектор-функция $\Phi(x_1)$. Из (10) следует, что каждая из компонент $\Phi_i(x_1), i = 1, 2, ..., n-k$ должна удовлетворять q дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. При $q > 1$ возникают условия совместности этих уравнений и, в общем случае, таких функций не существуют.

Пусть $q = 1$, т.е. неопределенное возмущение задается скалярной функцией. В этом случае равенства (10) для каждой из $n-k$ компонент вектор функции $\Phi(x_1)$ определяют одно уравнение в частных производных первого порядка. В общем случае, система (10) может не быть совместной и тогда инвариантных соотношений вида (4) для расширенной системы (3),(5) не существует. Ограничения, накладываемые на вектор-функцию $\Phi(x_1)$ определяются из условий совместности соотношений (10), а именно: в рассматриваемой области изменения переменных должен быть выполнен критерий Кронекера – Капелли [6]

$$\mathrm{rank}\Phi'_{x_1} = \mathrm{rank}(\Phi'_{x_1}, b_2). \tag{11}$$

Предположим, что условия (11) выполнены для некоторого семейства функций $\Phi(x_1)$. Тогда, если в некоторый момент времени равенства (4) выполнены для траекторий расширенной системы дифференциальных уравнений (3),(5), то они будут выполнено тождественно и, соответственно, формулы(4) определяют искомое семейство инвариантных соотношений.

2. Оценка угловой скорости тела. Исключение возмущений.

В качестве приложения описанного подхода рассмотрим задачу определения угловой скорости твердого тела, на которое действует момент сил, модуль которого $m(t)$ является неизвестной функцией времени. Рассмотрим два случая. В первом из них действующий на твердое тело неизвестный момент сил, модуль которого равен $m(t)$, коллинеарен первой оси подвижной системы координат, жестко связанной с телом. Во втором случае неизвестный момент сил направлен вдоль третьей оси подвижной системы координат и непосредственно воздействует на неизмеряемую координату.

Запишем уравнения Эйлера для твердого тела, совершающего вращения вокруг своего центра масс. Обозначим A_1, A_2, A_3 центральные моменты инерции и введем безразмерные параметры

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}.$$

Тогда для первого рассматриваемого случая уравнения движения принимают вид

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + m, \quad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2. \tag{12}$$

Будем считать, что измерению доступны первые две компоненты вектора угловой скорости, т.е. выход системы (12) равен

$$y_1(t) = \omega_1(t), \quad y_2(t) = \omega_2(t) \tag{13}$$

Задача 2. Для динамической системы (12) требуется асимптотически точно оценить переменную $\omega_3(t)$ по измерениям выхода (13) при неизвестном моменте сил $m(t)$.

Условием наблюдаемости системы (12) , (13) является выполнение в какой либо момент времени неравенства: $\omega_1(t) \cdot \omega_2(t) \neq 0$ [7]. Поскольку используемый метод синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения [5] предполагает асимптотическое оценивание, то далее будем считать выполненным более сильное условие, а именно: в течении всего процесса наблюдения обе эти компоненты угловой скорости отделены от нуля некоторой, возможно малой постоянной ω_{min}, т.е. $\mid \omega_1(t) \mid, \mid \omega_2(t) \mid \geq \omega_{min} > 0$. При нарушении этого требования процесс оценивания $\omega_3(t)$ прекращается и возобновляется снова, когда оно выполнено.

Представим неизвестную компоненту угловой скорости в виде

$$\omega_3(t) = p(t) + \Phi(\omega_1(t), \omega_2(t)) + \varepsilon, \tag{14}$$

где переменная $p(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{p} = u(p, \omega_1(t), \omega_2(t)), \; p(0) = p_0 \in R. \tag{15}$$

Здесь $u(p, \omega_1, \omega_2), \Phi(\omega_1, \omega_2)$ – неопределенные пока дифференцируемые функции. Дифференцируя (14) в силу уравнений (12)(15), получаем

$$\dot{\varepsilon} = u - \Phi'_{\omega_1}\big[a_1\omega_2(p - \Phi - \varepsilon) + m\big] - \Phi'_{\omega_2} a_2\omega_1(p - \Phi - \varepsilon). \tag{16}$$

Воспользуемся произволом в выборе функции $u(p, \omega_1, \omega_2)$ для того, чтобы в последнем уравнении избавиться от слагаемых, содержащих только лишь известные величины. Полагаем

$$u(p, \omega_1, \omega_2) = \Phi'_{\omega_1} a_1\omega_2(p - \Phi) - \Phi'_{\omega_2} a_2\omega_1(p - \Phi). \tag{17}$$

В результате уравнение для отклонений принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = (\Phi'_{\omega_1} a_1\omega_2 + \Phi'_{\omega_2} a_2\omega_1)\varepsilon + \Phi'_{\omega_1} a_1\omega_2 m. \tag{18}$$

В качестве множества вспомогательных функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ выберем функции, которые зависят лишь от переменной ω_2. Тем самым мы исключаем внешнее неопределенное возмущение $m(t)$ и уравнение (18) упрощается

$$\dot{\varepsilon} = \Phi'_{\omega_2} a_2\omega_1\varepsilon. \tag{19}$$

Положим $\Phi'_{\omega_2} = \dfrac{\lambda}{a_2}\mathrm{sign}(\omega_1)$, где постоянная $\lambda < 0$. Тогда в качестве второго слагаемого в соотношении (14) может быть выбрана функция

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{\lambda}{a_2}\mathrm{sign}(\omega_1)\omega_2 \tag{20}$$

и дифференциальное уравнение (19) принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = \lambda|\omega_1(t)|\varepsilon, \tag{21}$$

т.е.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)\exp\{\lambda\int_0^t |\omega_1(\tau)|d\tau\} \tag{22}$$

Согласно предположению о наблюдаемости, компонента $\omega_1(t)$ отделена от нуля константой ω_{min}, следовательно интеграл $\int_0^\infty |\omega_1(\tau)|d\tau$ является расходящимся и $\varepsilon(t)$ стремится к нулю с ростом t. Окончательно, подставляя функцию (20) в уравнение (17), получаем

Утверждение 1. Пусть $p(t)$ является некоторым решением дифференциального уравнения

$$\dot{p} = \frac{\lambda}{a_2}|\omega_1(t))|\left(p - \frac{\lambda\cdot\omega_2(t)}{a_2}\mathrm{sign}(\omega_1(t))\right), \; p(0) = p_0 \in R.$$

Тогда, при выполнении условий наблюдаемости, имеет место экспоненциальная оценка

$$\omega_3(t) = p(t) + \frac{\lambda \cdot \omega_2(t)}{a_2}\mathrm{sign}(\omega_1(t)) + O(\exp\{-\lambda \cdot \omega_{min} \cdot t\}). \tag{23}$$

3. Оценка угловой скорости тела. Идентификация стационарного момента. Пусть теперь неизвестный момент сил $m(t)$ коллинеарен третьей оси подвижной системы координат, т.е. непосредственно воздействует на скорость изменения неизмеряемой координаты $\omega_3(t)$. Выход системы не меняется и задан формулами (13), а уравнения движения принимают вид

$$\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3, \quad \dot\omega_2 = a_2\omega_1\omega_3, \quad \dot\omega_3 = a_3\omega_1\omega_2 + m. \tag{24}$$

Используя представление (14), (15) для неизвестной компоненты $\omega_3(t)$ запишем дифференциальное уравнение для невязки ε

$$\dot\varepsilon = u - (\Phi'_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Phi'_{\omega_2}a_2\omega_1)(\Phi + \varepsilon) - m. \tag{25}$$

Из вида (25) следует, что сделать его однородным, исключив влияние неопределенного момента сил $m(t)$, невозможно ни для каких функций $u(p, \omega_1, \omega_2), \Phi(\omega_1, \omega_2)$. Так как уравнение (25) не допускает тривиального решения $\varepsilon(t) = 0$, то, соответственно, представление (14) не является инвариантным для расширенной системы дифференциальных уравнений (24),(15), т.е. $\omega_3(t)$ не удается выразить в виде функции от известных величин $p(t), \omega_1(t), \omega_2(t)$.

Пусть теперь внешний момент постоянен, $m = \mathrm{const}$. Рассмотрим задачу адаптивного наблюдения $\omega_3(t)$ с одновременной идентификацией момента m.

Задача 3. Для динамической системы (24) требуется асимптотически точно оценить переменную $\omega_3(t)$ по измерениям выхода (13) при неизвестном постоянном моменте сил m.

Наряду с представлением (14), (15) переменной $\omega_3(t)$ будем использовать аналогичное представление для параметра m

$$m = M(t) + \Psi(\omega_1(t), \omega_2(t)) + \eta, \tag{26}$$

где переменная $M(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot M = v(M, p, \omega_1(t), \omega_2(t)), \ M(0) = M_0 \in R. \tag{27}$$

Заменим в системе (24) по формулам (14),(26) переменные ω_3, m на ε, η соответственно. Дифференцируя равенства (14),(26), получаем дифференциальные уравнения для невязок ε, η

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon &= v + \Psi + \eta - \big(\Phi'_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Phi'_{\omega_2}a_2\omega_1\big)(p - \Phi - \varepsilon), \\ \dot\eta &= u - \big(\Psi'_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Psi'_{\omega_2}a_2\omega_1\big)(p - \Phi - \varepsilon). \end{aligned} \tag{28}$$

Выберем управления u, v как функции от известных величин так, чтобы система (28) стала однородной.

$$\begin{aligned} v &= -\Psi + \big(\Phi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi'_{\omega_2} a_2 \omega_1\big)(p - \Phi),\\ u &= \big(\Psi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Psi'_{\omega_2} a_2 \omega_1\big)(p - \Phi). \end{aligned} \tag{29}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon &= \big(\Phi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi'_{\omega_2} a_2 \omega_1\big)\varepsilon + \eta,\\ \dot\eta &= \big(\Psi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Psi'_{\omega_2} a_2 \omega_1\big)\varepsilon. \end{aligned} \tag{30}$$

Система дифференциальных уравнений (30) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) = \eta(t) = 0$. А это означает, что конечные соотношения (14),(26), содержащие неизвестные величины $\omega_3(t), m$, являются инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений (24),(15),(27). Иными словами, имеет место

Утверждение 2. Для любых дифференцируемых функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ и $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ существуют начальные значения $p_0, M_0 \in R$ такие, что решения соответствующей задачи Коши для дифференциальных уравнений (15),(27) $p(t), M(t)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \omega_3(t) &= p(t) + \Phi(\omega_1(t), \omega_2(t)),\\ m &= M(t) + \Psi(\omega_1(t), \omega_2(t)). \end{aligned} \tag{31}$$

Подберем теперь функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ и $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ такими, чтобы невязка ε, η на любом решении расширенной системы дифференциальных уравнений (24),(27),(15) (т.е. любых начальных значения $p_0, M_0 \in R$) с ростом t асимптотически стремилась к нулю. Пусть α_1, α_2 являются коэффициентами квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0,$$

корни λ_1, λ_2 которого имеют отрицательные действительные части. Приравнивая в системе (30) коэффициенты при ε постоянным α_1, α_2, получаем для функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ и $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ два однотипных уравнения в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \Phi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi'_{\omega_2} a_2 \omega_1 &= -\alpha_1,\\ \Psi'_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Psi'_{\omega_2} a_2 \omega_1 &= -\alpha_2. \end{aligned} \tag{32}$$

Если в качестве функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ и $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ выбраны какие-либо частные решения (32), то уравнения в отклонениях становятся системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon &= \alpha_1 \varepsilon + \eta,\\ \dot\eta &= \alpha_2 \varepsilon. \end{aligned} \tag{33}$$

Так как $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$ является характеристическим уравнением для системы (33), то все ее решения асимптотически стремятся к нулю с показателем затухания λ_{min}, где $\lambda_{min} \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ корень с минимальной по модулю действительной частью. Следовательно, инвариантные соотношения (14),(26) позволяют получать экспоненциальную оценку как переменной $\omega_3(t)$, так и постоянного внешнего момента – параметра m.

Функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ и $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ являются решениями, вообще говоря, одного и того же уравнения в частных производных первого порядка (32). Вид общего решения этого уравнения зависит от того, имеют ли параметры a_1, a_2 различные либо совпадающие знаки. Пусть знаки a_1, a_2 не совпадают. Этот случай соответствует такому распределению масс в рассматриваемом твердом теле, когда моменты инерции удовлетворяют одному из неравенств: $A_1 < A_3, A_2 < A_3$ либо $A_3 < A_2, A_3 < A_1$. Общее решение в этом случае имеет вид

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{\mid a_1 a_2 \mid}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\mid a_1 \mid}{\mid a_2 \mid}} \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + F(a_1\omega_2^2 + a_2\omega_1^2). \tag{34}$$

Если же моменты инерции удовлетворяют одному из следующих неравенств $A_3 < A_1, A_2 < A_3$ или $A_3 < A_2, A_1 < A_3$, то общее решение задается формулой

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{a_1 a_2}} \ln\left(\sqrt{a_1 a_2}\,\omega_1 + a_1\omega_2\right) + F(a_1\omega_2^2 + a_2\omega_1^2). \tag{35}$$

В формулах (34),(35) $F(.)$ – произвольная дифференцируемая функция, которую положим равной нулю. Поскольку уравнение на функцию $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ такое же, то сама функция также задается формулами (34),(35) с той лишь разницей, что коэффициент α_1 меняется на α_2.

В итоге получили

Утверждение 3. Пусть в системе (24) известны $\omega_1(t), \omega_2(t)$ – первые две компоненты вектора угловой скорости твердого тела, подверженного воздействию неизвестного внешнего момента сил $m = \mathrm{const}$, а функции времени $p(t), M(t)$ являются решениями задачи Коши с начальными условиями p_0, M_0 для дифференциальных уравнений (15) и (27) соответственно. Тогда, в зависимости от распределения масс в теле, имеют место равенства

1. При $A_1 < A_3, A_2 < A_3$ или $A_3 < A_2, A_3 < A_1$

$$\omega_3(t) = p(t) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\mid a_1 a_2 \mid}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\mid a_1 \mid}{\mid a_2 \mid}} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\right) + O(\exp\{\lambda_{min} t\}),$$

$$m = M(t) - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\mid a_1 a_2 \mid}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\mid a_1 \mid}{\mid a_2 \mid}} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\right) + O(\exp\{\lambda_{min} t\});$$

2. При $A_3 < A_1, A_2 < A_3$ или $A_3 < A_2, A_1 < A_3$

$$\omega_3(t) = p(t) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{a_1 a_2}} \ln\left(\sqrt{a_1 a_2}\,\omega_1(t) + a_1\omega_2(t)\right) + O(\exp\{\lambda_{min} t\}),$$

$$m = M(t) - \frac{\alpha_2}{\sqrt{a_1 a_2}} \ln\left(\sqrt{a_1 a_2}\,\omega_1(t) + a_1\omega_2(t)\right) + O(\exp\{\lambda_{min} t\}).$$

4. Заключение.

В работе задача наблюдения системы с неопределенностью решается методом синтеза инвариантных соотношений, выражающих искомые компоненты фазового вектора как функции известных величин. Рассмотрена возможность исключением возмущений из соотношений, участвующих в построении наблюдателя. В качестве приложения рассмотрна задача определения угловой скорости твердого тела, на которое действует момент сил, модуль которого $m(t)$ является неизвестной функцией времени. Для случая, когда момент коллинеарен первой оси подвижной системы координат, жестко связанной с телом, показана возможность исключения $m(t)$ из уравнений, формирующих добавочные соотношения. В случае, когда момент направлен вдоль третьей оси подвижной системы координат, т.е. непосредственно воздействует на неизмеряемую координату ω_3, построить инвариантное соотношение, независящее от нестационарного возмущения $m(t)$ не удается. Исключением является случай стационарного момента сил, $m = const$, при котором задачу наблюдения можно решить одновременно с задачей идентификации постоянного параметра m.

1. *Luenberger D.G.* Determining the state of linear system with observers of low dynamic order // Ph.D. dissertation. – Stanford University. – 1963.
2. *Luenberger D.G.* Observers for multivariable systems //IEEE Transactions on Automatic Control. – 11. - 1966. – P. 190-197.
3. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В., Хлавенка А.* Синтез асимптотических наблюдателей для линейных векторных неопределенных систем // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т.41, № 1. — С. 73-81.
4. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. – М.: Физматлит, 2007. — 224 с.
5. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика твердого тела. – 2004. – Вып.33. – С. 197-216.
6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. -– М.: Наука, 1965. -– 431 с.
7. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.

V. F. Shcherbak

Observer for uncertain dynamical system .

An observation problem for uncertain nonlinear dynamic systems is considered. The method of invariant relations synthesis in the observation problems is used. For the class of nonlinear systems considered the sufficient conditions for disturbances elimination from the equations that form invariant relations are proved. As an application of this approach the problem of determining the angular velocity of a rigid body under the action of the torque with unknown module is solved. There are two ways of asymptotic estimates of the rotation velocity. The first relates to the exclusion unknown moment from the the equation of generalized observer. When it is impossible a scheme of simultaneous observations and identification of constant torque is presented.

Keywords: *nonlinear observer, dynamical systems with uncertainty, invariant relations, rigid body with a fixed point.*

В. Ф. Щербак

Спостерігач динамічних систем з невизначеністю.

У роботі розглянуто задачу спостереження стану динамічної системи в присутності невизначених збурень. Використовується підхід, пов'язаний з синтезом інваріантних співвідношень в задачах спостереження. Одержано умови, які для розглянутого класу нелінійних систем є достатніми для виключення збурень з рівнянь, що формують інваріантні співвідношення. В якості додатку отриманих результатів вирішена задача визначення кутової швидкості твердого тіла, що знаходиться під дією моменту сил, модуль якого є невідомим. Наведено два способи отримання асимптотичних оцінок швидкості обертання. Перший з них пов'язано з виключенням невизначеного моменту з рівнянь, що формують узагальнений спостерігач. Для випадків, коли виключити обурення неможливо, запропонована схема рішення задачі спостереження з одночасною ідентифікацією постійного модуля моменту сил.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, динамічні системи з невизначеністю, інваріантні співвідношення, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`scherbakvf@ukr.net`

Получено 11.11.15