

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОЙ ОСНОВЫ С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВЫЕМКОЙ И ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В.С. КИРИЛЮК, О.И. ЛЕВЧУК

**Аннотация.** Предложена математическая модель контактного взаимодействия при сжатии электроупругого полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную пологую выемку (под внутренним давлением). Модель учитывает связанность системы уравнений электроупругости. Разработан алгоритм решения проблемы. С помощью представления решения связанной системы уравнений электроупругости и гармонических функций специального вида найдено точное решение, определены геометрические размеры зазора между телами при известных сжимающих нагрузках и внутреннем давлении. Выявлен эффект связанности силовых и электрических полей. Как частный случай из полученных выражений найдены параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства.

**Ключевые слова:** математическая модель, связанная система уравнений, электроупругое полупространство, жесткая основа, пологая осесимметричная выемка, сжатие и внутреннее давление, алгоритм решения задачи, эффект связанности полей.

### ВВЕДЕНИЕ

Возрастающее применение пьезоэлектрических материалов вызывает значительный интерес к исследованию распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1 – 6]. Однако изучение пространственных задач для пьезоэлектрических тел сопряжено со значительными математическими трудностями, вызванными необходимостью решения граничных задач для системы уравнений в частных производных, учитывающей связанность силовых и электрических полей в материале [4]. Отметим, что решению контактных задач для электроупругих тел в строгой постановке (с учетом связанности силовых и электрических полей) посвящены работы [4 – 6] и др.

В работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, изучено контактное взаимодействие при сжатии системы «жесткая основа с выемкой — электроупругое полупространство». При постановке задачи предполагается, что поверхность раздела двух тел, входящих в систему, расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала и на ней выполняются условия гладкого (без трения) контакта. Также полагается, что в области выемки находится газообразный наполнитель под давлением  $P_0$ . С помощью общего представления решения уравнений статики

электроупругости и гармонических потенциалов, зависящих от величины зазора между телами при контактном взаимодействии, получено точное решение поставленной математической задачи, найдены геометрические размеры выемки при сжатии тел. Как частные случаи из найденного решения задачи электроупругости следуют соответствующие параметры контакта системы «жесткая основа с выемкой — упругое трансверсально-изотропное полупространство», а также контакта упругого изотропного полупространства с жесткой основой (с выемкой) [7].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим контактное взаимодействие пьезоэлектрического полупространства (тело 1) с жесткой основой (тело 2) при сжатии, содержащей пологую осесимметричную выемку с газообразным наполнителем под давлением  $P_0$  (рис.1). Полагаем, что форма выемки описывается следующим выражением:

$$f(r) = h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (1)$$

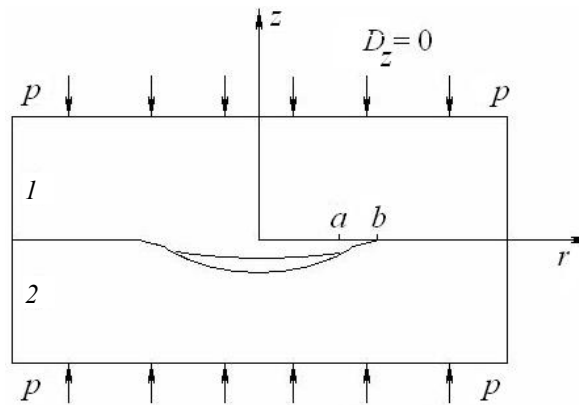


Рис. 1. Контактное взаимодействие жесткой основы с полупространством

Считаем, что плоскость контакта расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала, и поверхность полупространства является неэлектродированной (не содержит электродного покрытия). Полагаем также, что к телам приложены сжимающие усилия  $p$  и между телами возникает гладкий (без трения) контакт. Поскольку в жестком теле содержится выемка (под давлением  $P_0$ ), то контакт осуществляется не по всей поверхности  $z = 0$ , а по некоторой ее части  $r > a$ , где  $a$  — неизвестный радиус области контакта (рис. 1), который зависит от значения сжимающих усилий  $p$ , давления  $P_0$ , геометрии первоначальной выемки и электроупругих свойств пьезоэлектрического полупространства. Дополнив функцию  $f(r)$ , выраженной в виде (1), нулевым значением в области  $r > b$ , получим

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, & r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

Воспользовавшись суперпозицией состояний, первое из которых — сжатие вдоль оси  $0z$ , т.е.  $\sigma_{zz} = -p$ ,  $D_z = 0$ , для второго электроупругого состояния выражения (2) получим следующие граничные условия в плоскости  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -P_0 + p, \quad 0 < r < a; \quad u_z^{(1)} = f(r), \quad a \leq r < \infty; \\ \sigma_{zr} &= 0, \quad 0 < r < \infty; \quad D_z = 0, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что граничное условие (3) по электрическому состоянию соответствует случаю неэлектропроводной (без электродного покрытия) поверхности полупространства. При удалении от области контакта выполняются условия на бесконечности

$$\sigma_{zz} \rightarrow -p, \quad D_z \rightarrow 0, \quad \sigma_{zr} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения статики для электроупругого трансверсально-изотропного тела относительно компонентов вектора перемещений и электрического потенциала  $\Psi$  имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + \\ + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  — независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  — пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  — диэлектрические проницаемости. Следовательно, свойства пьезоэлектрического трансверсально-изотропного материала описываются указанными десятью независимыми постоянными.

Решение системы уравнений (5) согласно работе [4] можно выразить через четыре потенциальные функции  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ):

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

где  $k_j, l_j$  — некоторые постоянные, а функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где  $\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , значения  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка [4]:

$$\begin{aligned} & \nu^3(A_1B_2 - C_1D_2) + \nu^2(A_1B_3 + A_2B_2 - C_1D_3 - C_2D_2) + \\ & + \nu(A_2B_3 + A_3B_2 - C_2D_3 - C_3D_2) + A_3B_3 - C_3D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения  $k_j, l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в формулах (6) связаны с величинами  $\nu_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \epsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; d_j = e_{15}(1 + k_j) - \epsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

При введении обозначений  $z_j = zn_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  согласно уравнению (7) становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат. Выражения (8)–(10) в дальнейшем используются при проведении вычислений.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением (6). Потенциальные функции выберем на основе таких гармонических потенциалов:

$$\begin{aligned} & \Phi_i(x, y, z_i) = \\ & = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi} \left( \iint_{s_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{s_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2)^{3/2},$$

$$r(\xi_1, \xi_2) = -h_0(1 - \xi_1^2/b^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2},$$

$s_1$  и  $s_0$  — круговые площадки радиусов  $a$  и  $b$  соответственно (рис. 1). Положим также  $\Phi_4^{(2)} \equiv 0$ . Постоянные  $\alpha_i^*$ , что входят в формулы (11), определим из системы трех линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E)(1+k_j) + e_{15} l_j = 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15} l_j) / \sqrt{v_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \tag{12}$$

При таком выборе  $\alpha_j^*$  удовлетворяются граничные условия по касательным напряжениям и электрическому состоянию вдоль всей поверхности раздела, а также удовлетворяются условия (4). Неизвестными остаются следующие параметры:  $a$  — значения радиуса площадки контакта (рис. 1);  $h_1$  — максимальная высота зазора в результате контакта тел. Значения этих параметров определим из решения контактной задачи.

Идея использования гармонических потенциалов (11), связанных с величиной контактного зазора между электроупругим полупространством и жесткой основой, близка приему применения скачков перемещений для трещины нормального отрыва для изучения напряженного состояния. Однако существенное отличие между ними состоит в том, что поверхность трещины известна заранее, а площадка контакта  $S_1$  и ее радиус  $a$  неизвестны и определяются в процессе решения контактной задачи.

С помощью потенциальных функций (11) и соотношений (12), удовлетворяя оставшиеся граничные условия, приходим к решению интегродифференциального уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} =$$

$$= - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} +$$

$$+ 2\pi M^* (p - P_0), \quad (x, y) \in S_1. \tag{13}$$

Значение  $M^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$ .

После дифференцирования согласно (13) воспользуемся такими интегралами [9]:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint_S \frac{\xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 33x^2 - 3y^2);$$

$$\iint_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 3x^2 - 33y^2).$$

**Алгоритм решения задачи.** Приравняем коэффициенты при вторых степенях декартовых координат, находим  $h_1/h_0 = (a/b)^3$ . Из равенства коэффициентов при однородных слагаемых приходим к квадратному уравнению относительно значения неизвестного радиуса  $a$ , из которого получаем значения неизвестных параметров контакта

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bM^*}{3\pi h_0}}; \quad h_1 = h_0 \left(1 - \frac{4(p - P_0)bM^*}{3\pi h_0}\right)^{3/2}. \quad (14)$$

Таким образом, из выражений (14) по известным размерам первоначальной выемки (параметры  $b$  и  $h_0$ ), значению сжимающих усилий  $p$  и давлению  $P_0$ , десяти независимым значениям электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (входят посредством величины  $M^*$ ) находим значение радиуса контакта  $a$  и максимальную высоту зазора (после контактного взаимодействия)  $h_1$ . Приравняв значение  $a$  к нулю, находим значение силы сжатия  $p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bM^*}$ , при которой выемка в жестком теле полностью заполняется пьезоэлектрическим материалом. Следовательно, при сжатии  $p = p^*$  исходная приповерхностная выемка в жесткой основе полностью наполнена материалом.

При переходе к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу имеем

$$M^* \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где  $n_1, n_2$  — корни квадратного уравнения  $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$ , которые зависят от упругих свойств трансверсально-изотропного материала. Заменив в выражениях (14) значение  $M^*$  величиной  $M^{\text{Trans}}$ , получим параметры контакта системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство — жесткая основа с выемкой». Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу от значения  $M^{\text{Trans}}$  к  $(1 - \nu)/\mu$ . При взаимодействии упругого изотропного полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случай рассмотренной контактной задачи электроупругости), заменив в формулах (14) величину  $M^*$  значением  $(1 - \nu)/\mu$ , приходим к полному совпадению результатов с данными работы [7], найденными с помощью применения другого математического аппарата (на основе решения парных интегральных уравнений).

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 2 приведена зависимость радиуса зазора между жесткой основой (с приповерхностной выемкой) и пьезоэлектрическим полупространством от

действующих нагрузок согласно формулам (14). На рисунке использовано обозначение  $N^* = 4bM^* / (3\pi h_0)$ . Показано изменение радиуса зазора от значения сжимающей нагрузки при известных значениях внутреннего давления  $P_0$ , геометрических параметров выемки ( $b, h_0$ ), десяти электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (через величину  $M^*$ ). Приповерхностная выемка полностью заполняется электроупругим материалом при  $p \geq P_0 + \frac{1}{N^*} = p^*$ . Для значений нагрузок  $P_0 \leq p \leq p^*$  радиус зазора между телами показан на рис. 2. Важно отметить влияние эффекта связанности силовых и электрических полей на параметры контакта в рассматриваемой проблеме взаимодействия тел. После проведенных вычислений для пьезокерамических материалов BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, PZT-7A имеем  $M^* / M^{\text{Trans}} = 0,854, 0,784, 0,737$  соответственно. Согласно выражению  $p^*$  это означает, что для полного заполнения выемки чисто упругим трансверсально-изотропным материалом (с теми же упругими постоянными, что и соответствующий пьезокерамический материал) величина усилий  $p - P_0$  меньше, чем для пьезоэлектрического материала BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, PZT-7A в 1,171, 1,276, 1,357 раза соответственно. Следовательно, в рассматриваемой проблеме связанность силовых и электрических полей препятствует закрытию выемки при сжатии электроупругого полупространства с жесткой основой.

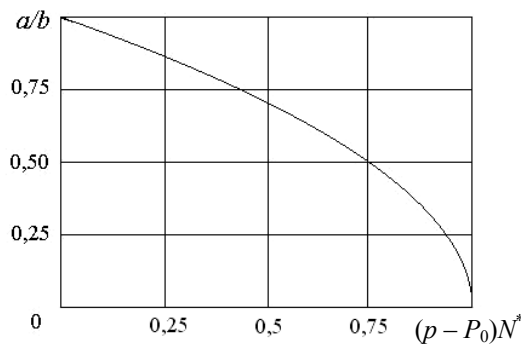


Рис. 2. Зависимость радиуса зазора от действующих нагрузок, геометрии параметров и свойств материала

## ВЫВОДЫ

В работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале рассмотрена проблема контактного взаимодействия в системе «жесткая основа с выемкой — электроупругое полупространство». Исследуемое контактное взаимодействие зависит от 14 независимых параметров (значения сжимающей нагрузки  $p$  и давления  $P_0$ , двух геометрических параметров исходной выемки и десяти значений электроупругих постоянных), что входят в систему связанных уравнений статики электроупругости и граничные условия. Пред-

ложен алгоритм решения задачи, позволивший получить точное ее решение. В явном виде определены основные параметры контактного взаимодействия, найдены геометрические размеры зазора между телами системы (радиус контакта, высота зазора), значение нагрузки полного закрытия зазора. Выявлен эффект связанности силовых и электрических полей. Решение задачи контактного взаимодействия упругого трансверсально-изотропного полупространства с жесткой основой получено как частный случай исследуемой проблемы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang Ch.-R.* Eshelby's tensor for cubic piezoelectric crystals and its application to cavity problems / Ch.-R. Chang // *Eng. Frac. Mech.* — 2016. — **155**. — P. 119–129.
2. *Kaloerov S.A.* Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, № 6. — P. 77–84.
3. *Xu C.H.* Electroelastic singularities and intensity factors for an interface crack in piezoelectric–elastic bimaterials / C.H. Xu, Z.H. Zhou, X.S. Xu, A.Y.T. Leung // *Appl. Math. Model.* — 2015. — **39**. — № 9. — P. 2721–2739.
4. *Podil'chuk Yu.N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Yu.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* — 2003. — **39**, № 2. — P. 132–170.
5. *Кирилюк В.С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / В.С. Кирилюк // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2009. — Вып.46. — С. 29–35.
6. *Кирилюк В.С.* О расклинивании пьезокерамических материалов / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // *Прикладная механика.* — 2010. — **46**, № 5. — С. 46–57.
7. *Монастирський Б.Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є. Монастирський // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 1999. — № 6. — С. 22–26.
8. *Кіт Г.С.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Г.С. Кіт, Р.М. Мартиняк // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1999. — **42**, № 6. — С. 7–11.
9. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В. Хай. — К.: Наук. думка, 1993. — 256 с.

Надійшла 29.02.2016