УДК 681.5.07
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.3.08

АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, О.Л. СОПРОНЮК

Анотація. Розглянуто моделі лінійних параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Доведено теореми про практичну стійкість лінійних параметричних систем зі змінною вимірністю. Важливою є отримана обернена теорема про практичну стійкість вказаних систем. Наведено алгоритми та критерії аналізу практичної стійкості лінійних параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору за наявності постійно діючих збурень. Отримано матричні рівняння чутливості таких систем. Показано, що на основі методів практичної стійкості та умов, які задовольняють матриці чутливості, можна ефективно знаходити оцінки параметрів для аналізу чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору. Результати роботи придатні для успішного застосування в задачах цифрового оброблення інформації та розпізнавання образів.

Ключові слова: практична стійкість, чутливість динамічних систем, системи із застосуванням розмірності фазового простору.

ВСТУП

Задачі аналізу параметрів моделей функціонування різноманітних систем постають у різних прикладних галузях. Тут можемо навести моделі медичної діагностики, хімічної промисловості, моделі оцінювання екологічного стану, радіолокації та багато інших, що потребують методик вибору параметрів, які б дозволили в реальному часі розпізнавати певні особливості досліджуваних процесів. Важливими виявляються такі зміни параметрів, які зумовлюють певну властивість стійкості вказаних систем. Одним із підходів до розв’язання проблеми є методи практичної стійкості. Вони дозволяють з єдиних позицій підійти до проблеми аналізу чутливості динамічних систем і отримати ефективні критерії оцінювання параметрів.

У роботі вивчається модель, яка змінює вимірність фазового простору у певні моменти часового параметра і на кожному інтервалі описується системою звичайних диференціальних рівнянь. Для цієї моделі отримано матричні рівняння чутливості і запропоновано використовувати оптимальні оцінки у класі еліпсоїдів, що виводяться за допомогою методів практичної стійкості параметричних систем.

Мета роботи — розроблення ефективних алгоритмів аналізу й оцінювання параметрів моделей систем зі зміною вимірності фазового простору на основі методів практичної стійкості.

ОПИС ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай задано розбиття $\tau = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N\}$, $\tau_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1, N-1}$, $\tau_N = [t_{N-1}, t_N]$ відрізка $[T_0, T_1]$ [1], тобто $t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = T_1$, α — вектор параметрів розмірності m, що вибирається з деякої множини G_α ($0 \in G_\alpha$).

На відрізку $[T_0, T_1]$ із заданим розбиттям τ розглянемо динамічну систему, яка залежить від векторного параметра α:

$$\frac{dx^{(i)}(t,\alpha)}{dt} = A_i(t)x^{(i)}(t,\alpha) + B_i(t)\alpha\,,\ \alpha \in G_\alpha\,,\ t \in \tau_i\,,\ i = \overline{1,N} \tag{1}$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$x^{(i)}(t_{i-1},\alpha) = C_i x^{(i-1)}(t_{i-1} - 0, \alpha) + D_i\alpha\,,\ \alpha \in G_\alpha\,,\ i = \overline{1, N-1}\,. \tag{2}$$

У співвідношенні (1) $A_i(t)$ — квадратні матриці порядку n_i; $B_i(t)$ — прямокутні матриці розмірності $n_i \times m$, для яких розв’язок системи (1) існує і єдиний для всіх $t \in \tau_i$; $x^{(i)}(t,\alpha)$ — вектор фазового стану системи (1) розмірності n_i; α — вектор параметрів розмірності m, а у (2) C_i — матриці розмірності $n_{i+1} \times n_i$, причому $C_1 = E_1$, E_1 — одинична матриця розмірності $n_1 \times n_1$ і матриці C_i такі, що $\det(C_i^T C_i) \neq 0$; D_i — матриці розмірності $n_{i+1} \times m$ і, крім цього, D_1 — нульова матриця розмірності $n_1 \times m$.

Легко показати, що за умов, які задовольняють сталі матриці C_i і D_i, розв’язок системи (1), (2) існує і єдиний.

Систему (1) за умов (2) називатимемо лінійною системою, яка змінює вимірність фазового простору в моменти t_i, $i = \overline{1, N-1}$.

ТЕОРЕМИ ПРО ПРАКТИЧНУ СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

На відрізку $[T_0, T_1]$ із заданим розбиттям τ розглянемо лінійну динамічну систему (1) за умов (2), яка залежить від векторного параметра α.

Означення 1. Незбурений рух $x^{(i)}(t,0) = 0$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$ системи (1) за умов (2) назвемо $\{G_0^{x_0^{(1)}}, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1,N}, T_0, T\}$ — стійким, якщо $x^{(i)}(t,\alpha) \in \Omega_t^{(i)}$ при $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$ за початкових умов $x^{(1)}(t_0,\alpha) \in G_0^{x_0^{(1)}}$ і будь-яких $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

В означенні 1 множина G_0^α ($0 \in G_0^\alpha$) — це множина допустимих значень параметрів, які використовуються для аналізу практичної стійкості [2, 3].

Теорема 1. Якщо для системи (1) за умов (2) знайдуться додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha)$, які задовольняють умови

$$\{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha) < 1\} \subset \Omega_t^{(i)}, \ \alpha \in G_0^\alpha, \ t \in \tau_i, \ i = \overline{1,N}; \tag{3}$$

$$\left(\frac{dV_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha)}{dt} \right)_{(1),(2)} \le 0 \tag{4}$$

при

$$x^{(i)} \in \{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha) < 1\}, \ \alpha \in G_0^\alpha, \ t \in \tau_i, \ i = \overline{1,N};$$

для будь-якого $i \in \{1,2,\ldots,N-1\}$

$$V_i(x^{(i)}(t_i-,\alpha),t_i-,\alpha) - V_{i+1}(x^{(i)}(t_i,\alpha),t_i,\alpha) \ge 0, \ \alpha \in G_0^\alpha; \tag{5}$$

$$G_0^{x_0^{(1)}} \subset \{x^{(1)} : V_1(x^{(1)}(t,\alpha),t,\alpha) < 1\}, \ \alpha \in G_0^\alpha, \tag{6}$$

то незбурений рух $x^{(i)}(t_i,\alpha) = 0$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$ системи (1), (2)

$$\{G_0^{x_0^{(1)}}, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1,N}, T_0, T_1\} \text{ — стійкий.}$$

Доведення (від супротивного). Нехай виконуються умови (3)–(6) теореми 1, але знайдеться $1 \le i_0 \le N$ і таке значення $\bar{t} \in \tau_{i_0}$, за якого траєкторія системи, яка відповідає параметру $\bar{\alpha} \in G_0^\alpha$, не належить множині $\Omega_t^{(i_0)}$, тобто $x^{(i_0)}(\bar{t},\alpha) \notin \Omega_{\bar{t}}^{(i_0)}$. Можуть бути два випадки: а) $\bar{t} = t_{i_0-1}$ або б) $\bar{t} \in (t_{i_0-1}, t_{i_0})$.

У випадку а) отримуємо, що $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1},\alpha),t_{i_0-1},\alpha) \ge 1$. Оскільки для всіх t, $t \in \tau_{i_0}$, маємо $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1},\alpha),t_{i_0-1},\alpha) < 1$, то порушується умова (5).

У випадку б) з умови (3) і неперервності функції Ляпунова $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t,\alpha),t,\alpha)$ у точці $\bar{t}$ випливає нерівність $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1},\alpha),t_{i_0-1},\alpha) \ge 1$.

Розглянемо різницю

$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t},\alpha),\bar{t},\alpha) - V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha)$, яку запишемо у вигляді

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t},\alpha),\bar{t},\alpha) - V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha) =$$

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t},\alpha),\bar{t},\alpha) - V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1},\alpha),t_{i_0-1},\alpha) +$$

$$+ V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1},\alpha),t_{i_0-1},\alpha) - V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-1}-,\alpha),t_{i_0-1}-,\alpha) +$$

$$+ V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-1}-,\alpha),t_{i_0-1}-,\alpha) - V_{i_0-1}(x^{i_0-1}(t_{i_0-2},\alpha),t_{i_0-2},\alpha) +$$

$$+V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-2},\alpha),t_{i_0-2},\alpha)-V_{i_0-2}(x^{(i_0-2)}(t_{i_0-2}-,\alpha),t_{i_0-2}-,\alpha)+$$

$$+V_3(x^{(3)}(t_3-,\alpha),t_3-,\alpha)-V_3(x^{(3)}(t_2,\alpha),t_2,\alpha)+$$

$$+V_3(x^{(3)}(t_2,\alpha),t_2,\alpha)-V_2(x^{(3)}(t_2-,\alpha),t_2-,\alpha)+$$

$$+V_2(x^{(2)}(t_2-,\alpha),t_2-,\alpha)-V_2(x^{(2)}(t_1,\alpha),t_1,\alpha)+$$

$$+V_2(x^{(2)}(t_1,\alpha),t_1,\alpha)-V_1(x^{(1)}(t_1-,\alpha),t_1-,\alpha)+$$

$$+V_1(x^{(1)}(t_1-,\alpha),t_1-,\alpha)-V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0-,\alpha)\,.$$

Ураховуючи (5), маємо

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar t,\alpha),\bar t,\alpha)-V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha)=$$

$$=\sum_{j=1}^{i_0-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{dV_j(x^{(j)}(t,\alpha),t,\alpha)}{dt}\right)_{(3),(4)}dt+\int_{t_{i_0-1}}^{\bar t}\left(\frac{dV_1(x^{(1)}(\bar t,\alpha),\bar t,\alpha)}{dt}\right)_{(3),(4)}dt\,.$$

Звідси на підставі умови (4) маємо $V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar t,\alpha),\bar t,\alpha)-$ $-V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha)\le 0$, а отже, $V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha)\ge 1$, що суперечить умові (6) теореми. Тому таке припущення неправильне.

Теорема 1 доведена.

Нехай початкові умови для системи (1) за умов (2) вибираються з множини $G_0^{x_0^{(1)}}=\{x^{(1)}:x^{(1)T}(t_0,\alpha)Hx^{(1)}(t_0,\alpha)<c^2\}$, де H — симетрична додатно визначена матриця.

Означення 2. Незбурений рух $x^{(i)}(t,0)=0$, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$ системи (1) за умов (2) називатимемо $\{c,H,G_0^{\alpha},\Omega_t^{(i)},t\in\tau_i,i=\overline{1,N},T_0,T_1\}$ — стійким, якщо $x^{(i)}(t,\alpha)\in\Omega_t^{(i)}$ при $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$ для будь-яких початкових умов з множини

$$G_0^{x_0^{(1)}}=\{x^{(1)}:x^{(1)T}(t_0,\alpha)Hx^{(1)}(t_0,\alpha)<c^2\}\ \text{для всіх}\ \ \alpha\in G_0^{\alpha}\subset G_{\alpha}\,.$$

Теорема 2. Якщо для системи (1), (2) знайдуться додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha)$, $i=\overline{1,N}$, які задовольняють умови (3)–5) і

$$\{x^{(1)}:x^{(1)T}(t_0,\alpha)Hx^{(1)}(t_0,\alpha)<c^2\}\subset\{x^{(1)}:V_1(x^{(1)}(t_0,\alpha),t_0,\alpha)<1\}\,, \qquad (7)$$

то незбурений рух $x^{(i)}(t,\alpha)=0$, $\alpha\in G_0^{\alpha}$, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$, системи (1), (2)

$$\{c,H,G_0^{\alpha},\Omega_t^{(i)},t\in\tau_i,i=\overline{1,N},T_0,T_1\}\ \text{— стійкий.}$$

Теорему 2 легко довести за схемою доведення *теореми 1.*

Покажемо, що для системи (1) за умов (2) можна знайти функцію Ляпунова.

Теорема 3. Якщо існує однозначна, неперервна, додатно визначена функція $W(x^{(1)})$ така, що множина $G_0^{x^{(1)}} = \{x^{(1)} : W(x^{(1)}) < 1\}$, то функції Ляпунова для системи (1) за умов (2), що задовольняють усі вимоги теореми 1, можна побудувати так:

$$V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha) = W(x^{(1)}(t,t_0,x^{(i)}(t,\alpha),\alpha)),\ i = \overline{1,N},$$

де

$$x^{(1)}(t,t_0,x^{(i)}(t,\alpha),\alpha) = U_{1,i}(t_1,t_i)X_i^{-1}(t,t_{i-1})x^{(i)}(t) -$$

$$-U_{1,i}(t_1,t_{i-1})X_i^{-1}(t,t_{i-1})\int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t,s)B_i(s)ds\alpha -$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1} U_{1,j}(t_1,t_j)X_j^{-1}(t_j,t_{j-1})\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j,s)B_j(s)ds\alpha - \sum_{j=2}^{i} U_{1,j}(t_1,t_j)D_j\alpha$$

розв'язок системи (1), (2), який набуває значення $x^{(i)}$ у момент $t \in \tau_i$, а

$$U_{k,j}(t_k,t_j) = X_k^{-1}(t_k,t_{k-1})(C_{k+1}^T C_{k+1})^{-1} C_{k+1}^T X_{k+1}^{-1}(t_{k+1},t_k)(C_{k+2}^T C_{k+2})^{-1} C_{k+2}^T \ldots$$

$$\ldots X_{j-1}^{-1}(t_{j-1},t_{j-2})(C_j^T C_j)^{-1} C_j^T,$$

$$\frac{dX_i(t,t_{i-1})}{dt} = A_i(t)X_i(t,t_{i-1}),\ X_i(t_{i-1},t_{i-1}) = E_i \qquad (8)$$

нормована за моментом t_{i-1}, $i = \overline{1,N}$ фундаментальна матриця задачі Коші (8).

Доведення. Для доведення теореми потрібно перевірити умови (3)–(6).

Умова (3) виконується, оскільки $\{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha) < 1\} =$ $= \{x^{(1)} : W(x^{(1)}) < 1\}$ і ця множина належить $\Omega_t^{(i)}$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$. Умова (4) теж виконується, бо

$$\left(\frac{dV_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha)}{dt}\right)_{(1),(2)} = 0,$$

$$x^{(i)} \in \{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t,\alpha),t,\alpha) < 1\},\ a \in G_0^{\alpha},\ t \in \tau_i,\ i = \overline{1,N}.$$

Оскільки для будь-якого $i \in \{1,2,\ldots,N-1\}$

$$V_i(x^{(i)}(t_i-,\alpha),t_i-,\alpha) - V_{i+1}(x^{(i)}(t_i,\alpha),t_i,\alpha) = 0,\ a \in G_0^{\alpha},$$

то виконується й умова (5). За такого вибору функції Ляпунова умова (6) також справджується.

Теорему доведено.

АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Для побудови алгоритмів аналізу практичної стійкості лінійної системи (1) за умов (2) запропонуємо критерій, який ґрунтується на певних припущеннях щодо як областей початкових умов і параметрів, так і конкретних обмежень [3–6] на динаміку фазових станів указаної системи. Нехай $X_i(t,t_{i-1})$ — матричний розв'язок задачі Коші (8). Позначимо:

$$W_{ij}(t,t_j)=X_i(t,t_{i-1})C_iX_{i-1}(t_{i-1},t_{i-2})C_{i-1}...X_j(t_j,t_{j-1})C_j\,. \qquad (9)$$

Тоді розв'язок системи (1) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0)=x_0^{(1)}$, матиме вигляд

$$x^{(i)}(t)=W_{i1}(t,t_1)x_0^{(1)}+\int_{t_{i-1}}^{t}X_i(t_i,s)B_i(s)ds\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij+1}(t,t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j}X_j(t_j,s)B_j(s)ds\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^{i}W_{ij+1}(t,t_{j+1})D_j\alpha\,,\ t\in\tau_i\,,\ i=\overline{1,N}\,. \qquad (10)$$

Щоб отримати числові оцінки областей практичної стійкості системи (1) за умов (2), множини початкових умов та параметрів задамо у вигляді

$$G_0^{x^{(1)}}=\{x^{(1)}:x^{(1)T}(t_0,\alpha)Hx^{(1)}(t_0,\alpha)\le c^2\}\,,\ G_0^{\alpha}=\{\alpha:\alpha^T H_\alpha\alpha\le c_\alpha^2\}\,, \quad (11)$$

де H, H_α — додатно визначені матриці; c, c_α — деякі додатні сталі.

Розглянемо також конкретні динамічні обмеження

$$\Omega_t^{(i)}=\{x^{(i)}:\left|l_{s_i}^{(i)T}(t)x^{(i)}(t)\right|\le 1, s_i=1,2,...,N_i\}\,,\ t\in\tau_i\,,\ i=\overline{1,N}\,, \qquad (12)$$

де $l_{s_i}^{(i)T}(t)$, $s_i=1,2,...,N_i\}$ — відомі вектори, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$.

Якщо введемо позначення $z^{(i)}(t)=W_{i1}(t,t_1)x_0$,

$$a^{(i)}(t,\alpha)=\int_{t_{i-1}}^{t}X_i(t_i,s)B_i(s)ds\alpha+\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij+1}(t,t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j}X_j(t_j,s)B_j(s)ds\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^{i}W_{ij+1}(t,t_{j+1})D_j\alpha\,,\ i=\overline{1,N}\,,$$

то на підставі (10) можемо записати

$$x^{(i)}(t)=z^{(i)}(t)+a^{(i)}(t,\alpha)\,,\ t\in\tau_i\,,\ i=\overline{1,N}\,.$$

Критерій 1. Для того, щоб система (1), (2) була $\{c, H, c_\alpha, H_\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, \grave{i} = \overline{1,N}\}$ — стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^2 \le \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t\in(t_{i-1},t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^T H_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}} \frac{(1-\left|l_{s_i}^{(i)T}(t) a^{(i)}(t,\alpha)\right|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t)(Q_i(t))^{-1} l_{s_i}^{(i)}(t)}, \quad (13)$$

$$\left|l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t,\alpha)\right| < 1. \quad (14)$$

Тут $Q_i^{-1}(t) = W_{i1}(t,t_0) H^{-1} W_{i1}^T(t,t_0)$ виражається через матриці $W_{i1}(t,t_0)$, $t \in \tau_i$, які можна знайти за формулою (9), поклавши $j = 1$.

Доведення. Запишемо розв'язок (1), (2) у вигляді (12) і подамо умову $x^{(i)}(t) \in \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, \ i = \overline{1,N}$ таким чином:

$$z^{(i)}(t) \in \{z^{(i)}(t) : -1 - l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t,\alpha) \le l_{s_i}^{(i)T} z^{(i)}(t) \le$$

$$\le 1 - l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t,\alpha)\}, \ t \in \tau_i, \ i = \overline{1,N}.$$

Визначаючи екстремуми лінійних форм $l_{s_i}^{(i)T} z^{(i)}(t)$ на еліпсоїдах $(l_{s_i}^{(i)T}(t)(Q_i(t))^{-1} l_{s_i}^{(i)}(t)) \le c^2$, $t \in \tau_i$, $s_i = 1,2,\dots,N_i$, $i = \overline{1,N}$, отримуємо справедливість (13), (14).

КРИТЕРІЇ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ЗА ПОСТІЙНО ДІЮЧИХ ЗБУРЕНЬ

Розглянемо тепер задачу практичної стійкості лінійної системи зі зміною вимірності фазового простору, яка залежить від параметрів та постійно діючих збурень

$$\frac{dx^{(i)}(t,\alpha)}{dt} = A_i(t) x^{(i)}(t,\alpha) + B_i(t)\alpha + f^{(i)}(t), \ a \in G_\alpha, \ t \in \tau_i \quad (15)$$

за умов (2).

Тут $A_i(t)$, $B_i(t)$, $t \ne t_i$, $i = 1,2,\dots,N$ — матриці з інтегрованими елементами відповідних розмірностей; $x^{(i)}(t_{i-1}) = x^{(i)}((t_{i-1}+0)$; функції $f^{(i)}(t)$, $t \in \tau_i$, $t \ne t_i$ або відомі, інтегровані і мають розмірності n_i, $i = \overline{1,N}$, або невідомі, але обмежені за нормою

$$\left\|f^{(i)}(t)\right\| = \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left|f_j^{(i)}(s)\right|^{q_i} \right)^{\frac{\overline{q}}{q_i}} ds \right)^{\frac{1}{\overline{q}}} \le \overline{R}_i, \quad (16)$$

де $1 \le \overline{q} < \infty$, $1 \le q_i < \infty$, $t \ne t_i$, $\overline{R}_i$ — відомі числа, $i = \overline{1, N}$.

Нехай $X_i(t, t_{i-1})$ — матричний розв'язок задачі Коші (8), матриці $W_{ij}(t, t_j)$ мають вигляд (9). Тоді розв'язок системи (15) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$, можна знайти за формулою

$$x^{(i)}(t) = W_{i1}(t, t_1)x_0^{(1)} + \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + W_{ii+1}(t, t_{i+1}) \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i, s)f^{(i)}(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)f^{(j)}(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \ t \in \tau_i, \ i = \overline{1, N}. \tag{17}$$

Щоб отримати числові оцінки областей практичної стійкості системи (15), (2), задамо множини початкових умов і параметрів у вигляді (11) і розглянемо динамічні обмеження (12).

Подамо розв'язок системи (15) за умов (2) у вигляді (17) і запишемо умову того, що траєкторії системи належать множині $\Omega_t^{(i)}$, $t \in \tau_i$ так:

$$z^{(i)}(t) \in \{z^{(i)}(t): -1 + l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha) \le l_{s_i}^{(i)T}(t)z^{(i)}(t) \le 1 - l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)\}, \tag{18}$$

де $s_i = 1, 2, ..., N_i$, $z^{(i)}(t) = W_{i1}(t, t_1)x_0$,

$$a^{(i)}(t, \alpha) = \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + W_{ii+1}(t, t_{i+1}) \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i, s)f^{(i)}(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)f^{(j)}(s)ds + \sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \ i = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Зрозуміло, що співвідношення (18) досягаються, якщо виконуються умови

$$\max_{z^{(i)} \in \{z^{(i)}: z^{(i)T}Q_i(t)z^{(i)} \le c^2\}} l_{s_i}^{(i)T}(t)z^{(i)} \le L_{1s_i}(t), \ t \in \tau_i, \ s_i = 1, 2, ..., N_i, \ i = \overline{1, N},$$

$$\min_{z^{(i)} \in \{z^{(i)}: z^{(i)T}Q_i(t)z^{(i)} \le c^2\}} l_{s_i}^{(i)T}(t)z^{(i)} \ge L_{2s_i}(t), \ t \in \tau_i, \ s_i = 1, 2, ..., N_i, \ i = \overline{1, N},$$

а вектори $L_{1s_i}(t)$, $L_{2s_i}(t)$ мають відповідно вигляд $L_{1s_i}(t)=1-$ $-l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t,\alpha)$, $L_{2s_i}(t)=-1-l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t,\alpha)$.

Ураховуючи вираз (19), отримуємо критерій 2.

Критерій 2. Для того, щоб система (15), (2) була $\{c, H, c_\alpha, H_\alpha, \Omega_t^{(i)}$, $t\in\tau_i, i=\overline{1,N}\}$, — стійкою за наявності відомих збурень $f^{(i)}(t)$, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^2 \le \min_{i=1,2,\dots,N}\ \min_{t\in(t_{i-1},t_i)}\ \min_{s_i=1,2,\dots,N_i}\ \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^T H_\alpha\alpha\le c_\alpha^2\}} \frac{(1-|l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t,\alpha)|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t)(Q_i(t))^{-1}l_{s_i}^{(i)}(t)},$$

$$|l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t,\alpha)|<1,\ t\in\tau_i,\ s_i=1,2,\dots,N_i,\ i=\overline{1,N}.$$

Тут $Q_i^{-1}(t)=W_{i1}(t,t_0)H^{-1}W_{i1}^T(t,t_0)$ виражається через матриці $W_{i1}(t,t_0)$, $t\in\tau_i$, які можна знайти зі співвідношення (9), поклавши $j=1$.

Нехай при $t\in\tau_i$ постійно діючі збурення невідомі, але задовольняють умову (16), і нехай $Y_{s_i}^{(i)T}(t,t_{i+1})=l_{s_i}^{(i)T}(t)$, $Y_{s_i}^{(i)T}(t,t_{i+1})=l_{s_i}^{(i)T}(t)W_{ij+i}(t,t_{j+i})$, $j=1,2,\dots,i-1$, тоді

$$\gamma_{is_i}(t)=\max_{\|f^{(i)}(t)\|\le\overline{R}_i,t\in\tau_i}\Bigg|Y_{s_i}^{(i)T}(t,t_{i+1})\int_{t_{i-1}}^{t}X_i(t,s)f^{(i)}(s)ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}Y_{s_i}^{(i)T}(t,t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j}X_j(t,s)f^{(j)}(s)ds\Bigg|,\ i=\overline{1,N}.$$

Використовуючи співвідношення (16), для $\gamma_{is_i}(t)$ дістаємо таку нерівність:

$$\gamma_{is_i}(t)\le\overline{R}_i\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\left(\sum_{\sigma=1}^{n_i}\left|\sum_{\upsilon=1}^{n_i}x_{\sigma\upsilon}^i(t,\nu)y_{\upsilon s_i}^i(t,t_{i+1})\right|^{p_i}\right)^{\frac{\overline{p}}{p_i}}d\nu\right)^{\frac{1}{\overline{p}}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\overline{R}_j\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\sum_{\sigma=1}^{n_i}\left|\sum_{\upsilon=1}^{n_i}x_{\sigma\upsilon}^j(t,\nu)y_{\upsilon s_i}^j(t,t_{j+1})\right|^{p_j}\right)^{\frac{\overline{p}}{p_j}}d\nu\right)^{\frac{1}{\overline{p}}},$$

де $X_i(t,\nu)=\{x_{\sigma\upsilon}^i(t,\nu)\}_{ni}^{n_i}$, $X_j(t,\nu)=\{x_{\sigma\upsilon}^j(t,\nu)\}_{n_j}^{n_j}$,

$$Y_{s_i}^{(i)T}(t,t_{i+1})=(y_{1s_i}^i(t,t_{i+1}),\dots,y_{n_is_i}^i(t,t_{i+1}))\quad t\in\tau_i,$$

$$\frac{1}{\overline{p}}+\frac{1}{\overline{q}}=1,\ \frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1,\ i=\overline{1,N}.$$

Позначимо:

$$\overline{a}^{(i)}(t,\alpha)=\int_{t_{i-1}}^{t}X_i(t,s)B_i(s)ds\alpha+\sum_{j=1}^{i}W_{ij+1}(t,t_{j+1})D_j\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij+1}(t,t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j}X_j(t_j,s)B_j(s)ds\alpha.$$

Якщо виконуються нерівності

$$z^{(i)}(t)\in\left\{z^{(i)}(t):\left|l_{s_i}^{(i)T}(t)z^{(i)}(t)\right|\le 1-\left|l_{s_i}^{(i)T}(t)\overline{a}^{(i)}(t,\alpha)+\gamma_{is_i}(t)\right|\right\},$$

$$\left|l_{s_i}^{(i)T}(t)\overline{a}^{(i)}(t,\alpha)+\gamma_{is_i}(t)\right|<1,\ t\in\tau_i,\ s_i=1,2,...,N_i,\ i=\overline{1,N},$$

то $x^{(i)}(t,\alpha)\in\Omega_t^{(i)}$, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$.

Критерій 3. Для того, щоб система (15), (2) була $\{c,H,c_\alpha,H_\alpha,\Omega_t^{(i)},$ $t\in\tau_i,i=\overline{1,N}\}$ — стійкою за наявності невідомих, але обмежених збурень $f^{(i)}(t)$, $t\in\tau_i$, $i=\overline{1,N}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^2\le\min_{i=1,2,...,N}\ \min_{t\in(t_{i-1},t_i)}\ \min_{s_i=1,2,...,N_i}\ \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^T H_\alpha\alpha\le c_\alpha^2\}}\frac{(1-|\,l_{s_i}^{(i)T}(t)\overline{a}^{(i)}(t,\alpha)+\gamma_{is_i}(t)\,|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t)(Q_i(t))^{-1}l_{s_i}^{(i)}(t)},$$

$$|\,l_{s_i}^{(i)T}(t)\overline{a}^{(i)}(t,\alpha)+\gamma_{is_i}(t)\,|<1,\ t\in\tau_i,\ s_i=1,2,...,N_i,\ i=\overline{1,N}.$$

МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Для системи (1) за умов (2) рівняння чутливості [6 – 9] мають вигляд

$$\frac{dU_i(t,\alpha)}{dt}=A_i(t)U_i(t,\alpha)+B_i(t),\ \alpha\in G_\alpha,\ t\in\tau_i,\ i=\overline{1,N}$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$U_i(t_{i-1},\alpha)=C_iU_{i-1}(t_{i-1}-0,\alpha)+D_i,\ \alpha\in G_\alpha,\ i=\overline{1,N-1},$$

де

$$U_1(t_0,\alpha)=U_{10}=\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}-(A_1(t_0)x^{(1)}(t_0,\alpha)+B_1(t_0)\alpha)\frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha},\quad(20)$$

$$U_{i-1}(t_{i-1}-0,\alpha)=W_{i-11}(t_{i-1},t_1)U_{10}+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}W_{i-1j+1}(t_{i-1},t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j}X_j(t_j,s)B_j(s)ds+\ +\sum_{j=1}^{i-1}W_{i-1j+1}(t_{i-1}-0,t_{j+1})D_j.$$

Щоб отримати початкові умови (20), потрібно диференціювати за α таке інтегральне рівняння:

$$x^{(1)}(t,\alpha)=\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t}(A_1(s)x^{(1)}(s,\alpha)+B_1(s)\alpha)ds+x_0^{(1)}(t_0,\alpha)\,.$$

У результаті маємо [3, 7]

$$U_1(t,\alpha)=\frac{\partial x^{(1)}(t,\alpha)}{\partial\alpha}=\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t}(A_1(s)U_1(s,\alpha)+B(s))ds+$$

$$+\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}-(A_1(t_0)x^{(1)}(t_0,\alpha)+B_1(t_0)\alpha)\frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha}\,.$$

Поклавши в цій рівності $t=t_0(\alpha)$, знайдемо вираз для обчислення початкових умов матриці $U_{10}^T=U_1^T(t_0,\alpha)=(u_1^{(1)}(t_0,\alpha),u_1^{(2)}(t_0,\alpha),...,u_1^{(m)}(t_0,\alpha))$ розмірності $n_1\times m$ функцій чутливості системи (1) за умов (2).

ОЦІНКИ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай матриці функцій чутливості системи (1), (2) такі, що виконуються умови

$$U_i(t,\alpha)\in\Omega_i=\{U_i(t,\alpha):\left|\sum_{k=1}^{m}l_{s_i}^{(k)T}(t)u_i^{(k)}(t,\alpha)\right|\le 1, t\in\tau_i, s_i=\overline{1,N_i}\}\,,\ i=\overline{1,N}\,.\quad(21)$$

Тут $l_{s_i}^{(k)}(t)$ — відомі вектори розмірності n_i, $t\in\tau_i$; $u_i^{(k)}(t,\alpha)$ — вектори-стовпці матриці $U_i(t,\alpha)$, $k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$.

Щоб урахувати обмеження (21), уведемо до розгляду множину початкових умов для функцій чутливості

$$G_0^{\alpha}=\left\{\alpha:\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha_k}-(A_1(t_0)x^{(1)}(t_0,\alpha)+B_1(t_0)\alpha)\frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha_k}\right)^T H_{\alpha k}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha_k}-(A_1(t_0)x^{(1)}(t_0,\alpha)+B_1(t_0)\alpha)\frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha_k}\right)\le c_\alpha^2\right\},$$

де $H_{\alpha k}$ — додатно визначені квадратні матриці розмірності $m\times m$, $k=\overline{1,m}$.

Використовуючи алгоритми практичної стійкості, знайдемо оцінки значень параметра c_α, за яких виконуватимуться співвідношення (21), а саме:

$$c_\alpha^2\le\min_{i=1,2,...,N}\ \min_{t\in(t_{i-1},t_i)}\ \min_{s_i=1,2,...,N_i}\frac{(1-|\sum_{k=1}^{m}l_{s_i}^{(k)T}(t)a_i^{(k)}(t)|)^2}{\sum_{k=1}^{m}l_{s_i}^{(k)T}(t)(Q_k(t))^{-1}l_{s_i}^{(k)}(t)}\,,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} l_{s_i}^{(k)T}(t)a_i^{(k)}(t)\right| < 1\,,\ t\in\tau_i\,,\ s_i = 1,2,...,N_i\,,\ i=\overline{1,N}\,,$$

причому $Q_i^{-1}(t) = W_{i1}(t,t_0)H_{\alpha k}^{-1}W_{i1}^{T}(t,t_0)$, $W_{i1}(t,t_0)$ можна знайти за формулою (9), у яку потрібно підставити $j=1$, $a_i^{(k)}(t)$ — вектори, що визначаються за формулами

$$a_i^{(k)}(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t,s)b_i^{(k)}(s)ds + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t,t_{j+1})\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j,s)b_j^{(k)}(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t,t_{j+1})d_j^{(k)}\ ;$$

$X_i(t,t_{i-1})$ — матричні розв'язки задачі (8); $b_i^{(k)}$ — k-й стовпець матриці B_i, а $b_j^{(k)}$ і $d_j^{(k)}$ — відповідно k-й стовпець матриці B_j і матриці D_j.

Критерій 4. Для того, щоб функції чутливості системи (1) зі зміною вимірності за співвідношенням (2) задовольняли (21), необхідно і достатньо параметри системи вибирати згідно з нерівностями:

$$c_\alpha^2 \le \min_{i=1,2,...,N}\ \min_{t\in(t_{i-1},t_i)}\ \min_{s_i=1,2,...,N_i} \frac{(1-|\sum_{k=1}^{m} l_{s_i}^{(k)T}(t)a_i^{(k)}(t)|)^2}{\sum_{k=1}^{m} l_{s_i}^{(k)T}(t)(Q_k(t))^{-1}l_{s_i}^{(k)}(t)}\,,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} l_{s_i}^{(k)T}(t)a_i^{(k)}(t)\right| < 1\,,\ t\in\tau_i\,,\ s_i = 1,2,...,N_i\,,\ i=\overline{1,N}\,.$$

АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКУ ДОПУСКІВ НА ПАРАМЕТРИ В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Розглянемо систему (1) за умов (2). Нехай розв'язок цієї системи задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ для всіх $\alpha\in G_0^{\alpha}$. Тоді для векторів $y^{(i)} = x^{(i)} - \bar{x}^{(i)}$, $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$, де $\bar{x}^{(i)}$ — розрахункові значення векторів фазового стану розглядуваної системи при $\alpha = \bar{\alpha}$, $i=\overline{1,N}$, отримаємо

$$\frac{dy^{(i)}(t,\beta)}{dt} = A_i(t)y^{(i)}(t,\beta) + B_i(t)\beta\,,\ t\in\tau_i\,,\ i=\overline{1,N} \qquad (22)$$

за нульових початкових умов, тобто при $t=t_0$, $y^{(1)}(t_0,\beta)=0$.

Умови (2) набудуть вигляду

$$y^{(i)}(t_{i-1},\beta) = C_i y^{(i-1)}(t_{i-1}-0,\beta) + D_i\beta\,,\ \beta\in G_\beta\,,\ i=\overline{1,N-1}\,. \qquad (23)$$

Якщо $G_0^\beta = \{\beta : \beta^T H\beta \le c^2\}$, H — додатно визначена матриця, а $\Omega_t^{(i)}$ має вигляд $\Omega_t^{(i)} = \{y^{(i)} : \left| l_{s_i}^{(i)T}(t) y^{(i)}(t,\beta) \right| \le 1,\ s_i = 1,2,...,N_i\}$, $t \in \tau_i$, для всіх $i = \overline{1,N}$, то можна на основі дослідження практичної стійкості оцінити множину допустимих параметрів G_0^β для всіх значень β, для яких $y^{(i)}(t,\beta) \in \Omega_t^{(i)}$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$.

Розв'язок (22) за умов (23) і того, що $y^{(1)}(t_0) = 0$, матиме вигляд

$$y^{(i)}(t,\beta) = \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i,s) B_i(s) ds\beta + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j,s) B_j(s) ds\beta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) D_j \beta,\ t \in \tau_i,\ i = \overline{1,N}. \qquad (24)$$

Із рівняння (24) випливає, що $y^{(i)}(t,\beta) = Y_i(t,t_{i-1})\beta$, якщо $y^{(1)}(t_0) = 0$, а $Y_i(t,t_{i-1})$ — матриця функцій чутливості системи (22), (23) і має вигляд

$$Y_i(t,t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t} X_i(t_i,s) B_i(s) ds + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j,s) B_j(s) ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) D_j,\ t \in \tau_i,\ i = \overline{1,N}. \qquad (25)$$

Легко переконатися, що матриця $Y_i(t,t_{i-1})$ у цьому випадку є розв'язком такої задачі:

$$\frac{dY_i(t,t_{i-1})}{dt} = A_i(t) Y_i(t,t_{i-1}) + B_i(t),$$

$$Y_i(t_{i-1},t_{i-1}) = \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j,s) B_j(s) ds\beta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} W_{ij+1}(t,t_{j+1}) D_j,\ t \in \tau_i,\ i = \overline{1,N}.$$

Тому за наявності лінійних обмежень

$$\Omega_t^{(i)} = \{y^{(i)} : \left| l_{s_i}^{(i)T}(t) y^{(i)}(t,\beta) \right| \le 1,\ s_i = 1,2,...,N_i\},\ t \in \tau_i,\ i = \overline{1,N}$$

стала c, що фігурує в оцінці множини $G_0^\beta = \{\beta : \beta^T H\beta \le c^2\}$, повинна підпорядковуватися умові $\left| l_{s_i}^{(i)T}(t) Y(t,t_{i-1})\beta \right| \le 1,\ s_i = 1,2,...,N_i$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$. Розв'язуючи відповідну оптимізаційну задачу, отримуємо такий критерій.

Критерій 5. Для $\{c, H, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1,N}\}$ — оцінки параметрів β системи (22), (23) необхідно і достатньо, щоб

$$c^2 \le \min_{i=1,2,...,N} \min_{t\in(t_{i-1},t_i)} \min_{s_i=1,2,...,N_i} (l_{s_i}^{(i)T}(t)Y(t,t_{i-1})H^{-1}Y^T(t,t_{i-1})l_{s_i}^{(i)}(t))^{-1}.$$

Припустімо тепер, що початкові умови у системі (1), (2) залежать від вектора параметрів $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}(\alpha)$, $t = t_0$. Для отримання конструктивних алгоритмів візьмемо конкретний тип початкових умов [10 – 16], наприклад, $x_0^{(1)}(\alpha) = X_0\alpha$, де X_0 — відома матриця розмірності $n_1 \times m$. Тоді вектори розкидів $y^{(i)}(t,\beta)$ і β задовольнятимуть систему (22) за ненульових початкових умов $y^{(1)}(t_0) = X_0\beta$. При цьому матриця чутливості збігається з матрицею $Y_i(t,t_{i-1})$. Якщо позначити $\widetilde{W}_{i1}(t,t_1) = W_{i1}(t,t_1)X_0$, то дістанемо критерій оцінки для лінійних початкових умов.

Критерій 6. Для $\{c, H, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1,N}\}$ — оцінки параметрів β системи (22), (23) необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$c^2 \le \min_{i=1,2,...,N} \min_{t\in(t_{i-1},t_i)} \min_{s_i=1,2,...,N_i} (l_{s_i}^{(i)T}(t)((\widetilde{W}_{i1}(t,t_1) + Y(t,t_{i-1})H^{-1}(\widetilde{W}_{i1}(t,t_1) +$$

$$+Y(t,t_{i-1}))^T l_{s_i}^{(i)}(t))^{-1},$$

де $Y_i(t,t_{i-1})$ — матриця чутливості розмірності $n_i \times m$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1,N}$ і має вигляд (25).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто моделі лінійних параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Для такого типу систем доведено теореми про практичну стійкість. Розроблено алгоритми аналізу практичної стійкості для цих систем. Отримано критерії практичної стійкості динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору.

Побудовано матричні рівняння чутливості, на основі яких знайдено оцінки аналізу чутливості параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору. На основі критеріїв розроблено алгоритми розрахунку допусків на параметри лінійних систем зі змінною вимірністю фазового простору.

Запропоновані алгоритми ґрунтуються на побудові систем диференціальних рівнянь і зводяться до розв'язання матричної задачі Коші, розв'язок якої можна знайти за допомогою числових методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Сопронюк Ф.О.* Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур / Ф.О. Сопронюк. — Чернівці: Рута, 1995. — 155 с.
2. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения / Н.Ф. Кириченко. — К.: Вища шк., 1978. — 184 с.

3. *Бублик Б.Н.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
4. *Гаращенко Ф.Г.* Аналіз та оцінка параметричних систем / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталієнко. — К.: ІДДО, 1995. — 140 с.
5. *Гаращенко Ф.Г.* Прикладні задачі теорії стійкості / Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2014. — 125 с.
6. *Гаращенко Ф.Г.* Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.
7. *Гаращенко Ф.Г.* Вступ до аналізу чутливості параметричних систем: навч. посіб. / Ф.Г. Гаращенко, О.Ф. Швець. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. — 115 с.
8. *Гаращенко Ф.Г.* Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталиенко // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 1, 2. — С. 145–161.
9. *Розенвассер Е.Н.* Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
10. *Гаращенко Ф.Г.* Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталієнко // Изв. АН СССР. — Техническая кибернетика. — 1989. — Вып. 6. — С. 17–25.
11. *Швець О.Ф.* Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору / Щ.Ф. Швець, О.Л. Сопронюк // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2009. — № 1. — С. 158–162.
12. *Сопронюк О.Л.* Про матричні моделі для числового аналізу параметричної чутливості систем зі зміною вимірності фазового простору / О.Ф. Швець, О.Л. Сопронюк // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2010. — № 1. — С. 132–136.
13. *Гаращенко Ф.Г.* Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталиенко // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 4. — С. 43–55.
14. *Сопронюк О.Л.* Оптимальне оцінювання допусків на параметри у динамічних системах зі зміною вимірності фазового простору / О.Л. Сопронюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. — Чернівці: ЧНУ, 2013. — Т. 3, вип. 1. — С. 42–48.
15. *Сопронюк О.Л.* Оцінювання допусків на параметри у дискретних динамічних системах зі зміною вимірності фазового простору / О.Л. Сопронюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. — 2014. — Т. 5, вип. 1. — С. 81–86.
16. *Сопронюк О.Л.* Про розрахунок допусків на параметри лінійних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору / О.Ф. Швець // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — № 1. — С. 181–188.

Надійшла 12.05.2016