УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОКОМПОНЕНТНОГО КРУГОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ І ТРІЩИНИ В ПЛАСТИНІ

В. М. ЗЕЛЕНЯК

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглянуто двовимірну задачу термопружності для площини з двокомпонентним круговим включенням і тріщиною. Задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь на замкненому (межа включення) і розімкненому (тріщина) контурах. Числовий розв'язок інтегральних рівнянь одержано методом механічних квадратур. Досліджено вплив теплофізичних і механічних властивостей компонент включення на коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

Ключові слова: *включення, тріщина, температурне поле, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь, коефіцієнт лінійного теплового розширення.*

Двовимірні задачі теорії пружності та термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами методом сингулярних інтегральних рівнянь розглядали раніше. Зокрема, досліджували пружний та термопружний стан у скінченній [1–3], напівскінченній [4–6] і нескінченній [7–14] плоскій області з чужорідними однокомпонентними включеннями і криволінійними тріщинами. Нижче досліджено розподіл температурних напружень поблизу вершин тріщини у трикомпонентній області (площина з чужорідним двокомпонентним включенням і тріщиною) за сталої температури. Плоску пружну задачу в аналогічній трикомпонентній області досліджено в працях [15, 16]. Розглянута нижче теоретична модель має важливе практичне значення для розрахунку напружено-деформованого стану в композитних матеріалах за врахування різних концентраторів напружень у них. З таких матеріалів часто виготовляють елементи конструкцій, які застосовують у будівництві, техніці, біомеханіці та інших галузях виробництва.

Формулювання задачі. Нехай безмежне тіло (площина) складається з пружної матриці S і двокомпонентного кругового включення, що має дві різнорідні пружні ізотропні компоненти S_0 і S_1, обмежені гладкими контурами L_0 і L_1, відповідно. При цьому S_0 є кругове включення (диск) з радіусом R_0, S_1 – кругове кільце з внутрішнім і зовнішнім радіусами R_0 і R_1 з центром на початку координат xOy. Матриця містить внутрішню прямолінійну тріщину L_2 довжини $2l$, розміщену на осі Ox. Центр тріщини – в точці $(d, 0)$. Додатний напрямок обходу контурів L_0 і L_1 вибрано так, що кругове включення S_0 і кругове кільце S_1, відповідно, залишається зліва (рис. 1).

Вважаємо, що площина нагріта до сталої температури $T_c = \text{const} \neq 0$ та на контурах диска L_0 і кільця L_1 маємо ідеальний механічний контакт

$$[N(t_k)+iS(t_k)]^+ = [N(t_k)+iS(t_k)]^-,\ [u(t_k)+iv(t_k)]^+ = [u(t_k)+iv(t_k)]^-, \qquad (1)$$
$$t_0 = z \in L_0, \qquad t_1 = z_1 \in L_1, \qquad k = 0,1;$$

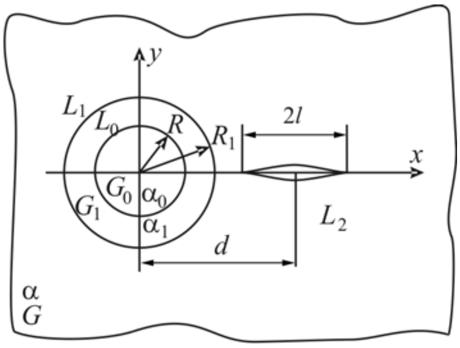
береги тріщини L_2 не контактують під час деформації і вільні від навантажень

$$[N(t_2)+iS(t_2)]^{\pm} = 0\,, \qquad t_2 = z_2 \in L_2\,, \qquad (2)$$

Контактна особа: В. М. ЗЕЛЕНЯК, e-mail: v.zelenyak@yandex.ua

Рис. 1. Геометрія площини з двокомпонентним круговим включенням і тріщиною.

Fig. 1. Geometry of a plane with a two-component circular inclusion and a crack.



де N і S – нормальні і дотичні компоненти напруження; u, v – компоненти переміщень.

Інтегральні рівняння. Оскільки L_0 коловий контур, то скориставшись підходом [1], який дає змогу зменшити кількість інтегральних рівнянь цієї задачі з трьох до двох на контурах L_1 і L_2, подамо комплексні потенціали напружень у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \qquad (3)$$

де

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i\left(1+\chi_1\Gamma_{01}\right)} \int\limits_{L_0} \frac{P_0(t_0)dt_0}{t_0 - z}; \qquad P_0(t_0) = \left(\Gamma_{01}\beta_1^t - \beta_0^t\right) T_c;$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i\left(1+\chi_1\Gamma_{01}\right)} \int\limits_{L_0} \frac{\overline{P_0(t_0)dt_0}}{t_0 - z} + \frac{R_0^2}{z^2}\Phi_0(z) - \frac{R_0^2}{z}\Phi_0'(z); \quad \Gamma_{01} = G_0/G_1;$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{L_k} \frac{Q_k(t_k)dt_k}{\xi_k - z}; \qquad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{L_k}\left[\frac{\overline{Q_k(t_k)dt_k}}{\xi_k - z} - \frac{\overline{\xi_k}Q_k(t_k)dt_k}{(\xi_k - z)^2}\right];$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1-\Gamma_{01}}{2\pi\left(1+\chi_1\Gamma_{01}\right)}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{L_k}\left[\frac{R_0^2 Q_k(t_k)dt_k}{z(z\overline{\xi_k} - R_0^2)} + \frac{(R_0^2 - \xi_k\overline{\xi_k})\overline{Q_k(t_k)dt_k}}{\overline{\xi_k}(R_0^2 - z\overline{\xi_k})^2}\right];$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1-\Gamma_{01}}{1+\chi_1\Gamma_{01}}\frac{R_0^4}{2\pi z^2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{L_k}\left\{\left[\frac{z}{(z\overline{\xi_k} - R_0^2)R_0^2} + \frac{(R_0^2 - \xi_k\overline{\xi_k})(R_0^2 - 3z\overline{\xi_k})}{\overline{\xi_k}(R_0^2 - z\overline{\xi_k})^3}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\overline{Q_k(t_k)dt_k}\right] + \left[\frac{3z\xi_k - 2R_0^2}{z(z\overline{\xi_k} - R_0^2)^2} + \frac{1}{R_0^2\xi_k}\right]Q_k(t_k)dt_k\right\}; \qquad (4)$$

$\xi_1 = t_1$, $\xi_2 = t_2 + d$; $Q_1(t_1) = g_1(t_1), t_1 \in L_1$; $Q_2(t_2) = g_2'(t_2), t_2 \in L_2$; $g_1(t_1)$ – невідома функція на контурі L_1; $g_2'(t_2)$ – похідна від невідомого стрибка переміщень за переходу через лінію тріщини L_2; функція $g_2'(t_2)$ повинна мати на кінцях тріщини інтегровні особливості.

Задовольнивши з використанням комплексних потенціалів (3)–(4) крайові умови (1) на контурі L_1 і (2) на тріщині L_2, отримаємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $Q_1(t_1)$, $Q_2(t_2)$:

$$A_n Q_n(\tau_n) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{L_k}\left[R_{nk}(t_k,\tau_n)Q_k(t_k)dt_k + \right.$$

$$\left. + S_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{Q_k(t_k)dt_k}\right] = P(\tau_n), \quad n = 1,2, \qquad (5)$$

де ядра $R_{nk}(t_k,\tau_n)$, $S_{nk}(t_k,\tau_n)$ взято із праці [16];

$$A_n = \delta_n\left[1+\chi_1+\Gamma_1(1+\chi)\right]\big/2\,; \qquad \Gamma_1 = G_1/G\,; \qquad \delta_n = \begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n=2;\end{cases}$$

$$P(\tau_n) = \delta_n\left\{\left(\Gamma_1\beta^t - \beta_1^t\right)\cdot T_c - \right.$$

$$\left. -B_1\Phi_0(\eta_n) + C_1\left[\overline{\Phi_0(\eta_n)} + \frac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}(\eta_n\overline{\Phi_0'(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)})\right]\right\} + \qquad (6)$$

$$+(1-\delta_n)\left\{-\Phi_0(\eta_n) - \overline{\Phi_0(\eta_n)} - \left[\eta_n\overline{\Phi_0'(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)}\right]\right\}; \quad B_1 = \chi_1 - \Gamma_1\chi\,;\ C_n = 1-\Gamma_1\,;$$

$\chi = (3-\mu)/(1+\mu)$; $\beta^t = \alpha E/(1+\mu)$ – для плоского напруженого стану; $\chi = 3-4\mu$; $\beta^t = \alpha E$ – для плоскої деформації; α; E; μ; G – відповідно коефіцієнт лінійного теплового розширення (КЛТР), модуль Юнґа, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву.

Система інтегральних рівнянь (5) з довільною правою частиною (6) має єдиний розв’язок за додаткової умови

$$\int_{L_2} g_2'(t_2)dt_2 = 0\,, \qquad (7)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) K_{I} і K_{II} у вершинах тріщини знаходимо за формулою [7]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp\lim_{t_2\to l^{\pm}}\left[\sqrt{2\pi\,|t_2 - l^{\pm}|}\,g'_2(t_2)\right].$$

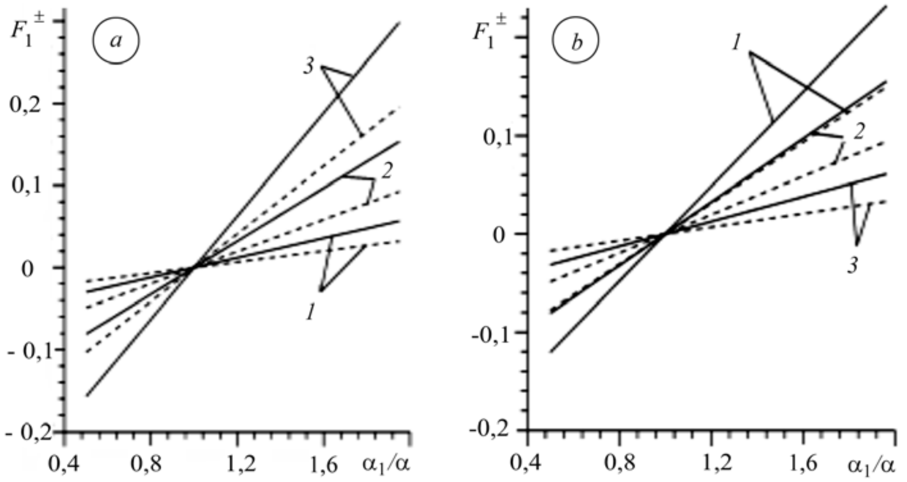


Рис. 2. Залежності безрозмірних КІН $F_1^{\pm}$ від параметра α_1/α: *1* – G_1/G = 0,5; *2* – 1; *3* – 2 за $G_0/G = \alpha_0/\alpha$ = 1 (*a*); *1* – G_0/G = 0,5; *2* – 1; *3* – 2 за $G_1/G = \alpha_0/\alpha$ = 1 (*b*).

Fig. 2. Dependences of dimensionless SIF, $F_1^{\pm}$, on parameter α_1/α: *1* – G_1/G = 0.5; *2* – 1; *3* – 2 за $G_0/G = \alpha_0/\alpha$ = 1 (*a*); *1* – G_0/G = 0.5; *2* – 1; *3* – 2 за $G_1/G = \alpha_0/\alpha$ = 1 (*b*).

Числовий аналіз. На основі числового розв’язку системи інтегральних рівнянь (5), (7) побудовано залежності для безрозмірних КІН $F_1^{\pm} = K_{\mathrm{I}}^{\pm}/K_T$ ($F_2^{\pm} = 0$), де $K_T = T_c\beta^t\sqrt{\pi l}/(1+\chi)$ (рис. 2–5). Суцільні криві відповідають КІН F_1^{-} у лівій вершині тріщини $x_2 = -l$ (ближчій до включення), штрихові – КІН F_1^{+} у правій $x_2 = l$. Числові результати одержано методом механічних квадратур [17] для різних значень теплофізичних, механічних і геометричних параметрів задачі, коли $l/R_0 =$ $= 0{,}5$; $d/R_0 = 2$; $R_1/R_0 = 1{,}1$; $\chi_0 = \chi_1 = \chi = 2$.

Якщо КЛТР кільця α_1 (зовнішньої компоненти включення) збільшується, то КІН $F_1^{\pm}$ зростає лінійно. При цьому збільшення жорсткості кільця G_1 підсилює зростання КІН $F_1^{\pm}$ (рис. 2*a*), а збільшення жорсткості диска G_0 (внутрішньої компоненти включення) сповільнює зростання КІН $F_1^{\pm}$ (рис. 2*b*). Якщо КЛТР кільця менший, ніж матриці ($\alpha_1 < \alpha$), то КІН $F_1^{\pm} < 0$, а коли більший ($\alpha_1 > \alpha$), то КІН $F_1^{\pm} > 0$ (рис. 2). Слід зазначити, що тут не враховується можливий контакт берегів тріщини. Тому в деяких випадках КІН $F_1^{\pm}$ має від'ємне значення. Цей результат можна використати для отримання розв'язку задачі методом суперпозиції за дії, крім заданого температурного поля, інших температурних або силових чинників, які в сукупності не спричинять контакту берегів тріщини.

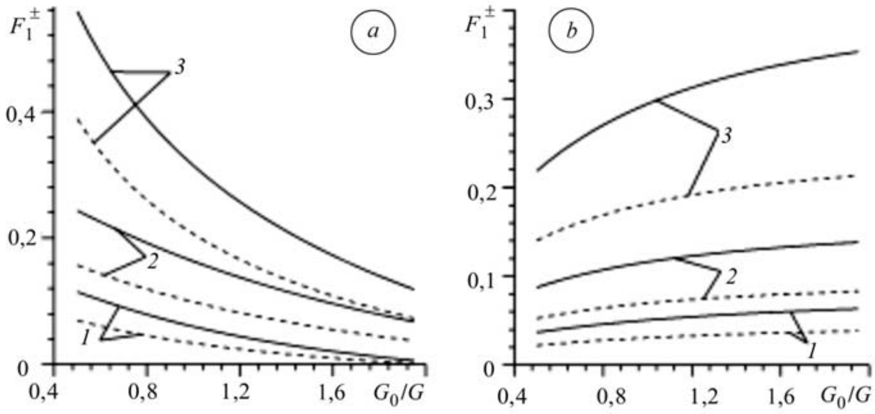


Рис. 3. Залежності безрозмірних КІН $F_1^{\pm}$ від параметра G_0/G за $\alpha_1/\alpha = 2$, $\alpha_0/\alpha = 1$ (*a*) та за $\alpha_1/\alpha = 1$, $\alpha_0/\alpha = 2$ (*b*): *1* – $G_1/G = 0{,}5$; *2* – 1 ; *3* – 2 .

Fig. 3. Dependences of dimensionless SIF, $F_1^{\pm}$, on parameter, G_0/G, for $\alpha_1/\alpha = 2$, $\alpha_0/\alpha = 1$ (*a*) and for $\alpha_1/\alpha = 1$, $\alpha_0/\alpha = 2$ (*b*): *1* – $G_1/G = 0.5$; *2* – 1 ; *3* – 2 .

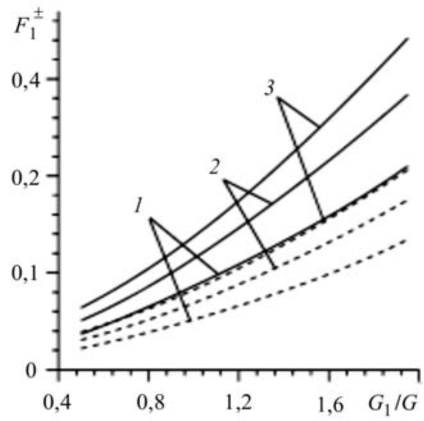


Рис. 4. Залежності безрозмірних КІН $F_1^{\pm}$ від параметра G_1/G за $\alpha_1/\alpha = 1$, $\alpha_0/\alpha = 2$: *1* – $G_0/G = 0{,}5$; *2* – 1 ; *3* – 2 .

Fig. 4. Dependences of dimensionless SIF, $F_1^{\pm}$, on parameter, G_1/G, for $\alpha_1/\alpha = 1$, $\alpha_0/\alpha = 2$: *1* – $G_0/G = 0.5$; *2* – 1 ; *3* – 2 .

Якщо КЛТР диска більший, ніж кільця ($\alpha_0 > \alpha_1$) і матриці ($\alpha_0 > \alpha$), то збільшення жорсткості диска (G_0) зумовлює зростання КІН $F_1^{\pm}$ для різних значень жорсткості кільця (G_1) (рис. 3*b*), а збільшення жорсткості кільця теж призводить до зростання КІН $F_1^{\pm}$ для різних значень жорсткості диска (рис. 4). Якщо ж КЛТР кільця

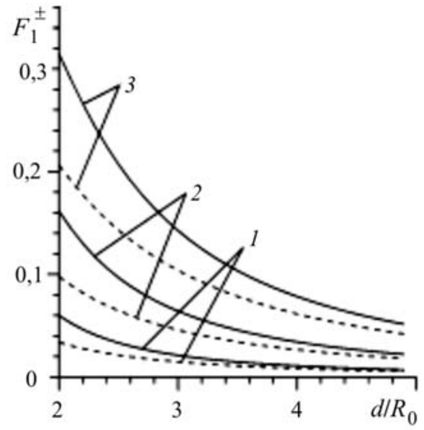


Рис. 5. Залежності безрозмірних КІН $F_1^{\pm}$ від параметра d/R_0 за $G_0/G = 1$, $\alpha_1/\alpha = 2$, $\alpha_0/\alpha = 1$: *1* – $G_1/G = 0{,}5$; *2* – 1; *3* – 2.

Fig. 5. Dependences of dimensionless SIF, $F_1^{\pm}$, on parameter, d/R_0, for $G_0/G = 1$, $\alpha_1/\alpha = 2$, $\alpha_0/\alpha = 1$: *1* – $G_1/G = 0.5$; *2* – 1; *3* – 2.

більший, ніж матриці ($\alpha_1 > \alpha$) і диска ($\alpha_1 > \alpha_0$), то збільшення жорсткості диска G_0 зумовлює зменшення КІН $F_1^{\pm}$ для різних значень жорсткості кільця (рис. 3*a*). Коли віддаль між тріщиною і кільцем зростає, то КІН $F_1^{\pm}$ знижується до нуля, причому зменшення жорсткості кільця зумовлює також зменшення цього коефіцієнта (рис. 5).

ВИСНОВКИ

В умовах сталої температури у всій трикомпонентній площині з тріщиною вплив жорсткості (модуля зсуву) двокомпонентного включення на КІН $F_1^{\pm}$ в околі вершин тріщини буде відрізнятися від впливу однокомпонентного включення. Зокрема, в межах зміни розглянутих механічних і теплофізичних параметрів, збільшення жорсткості диска (внутрішньої компоненти включення) зумовлює зменшення КІН $F_1^{\pm}$, якщо КЛТР кільця більший, ніж матриці і диска (рис. 3*a*) та зростання КІН $F_1^{\pm}$, якщо КЛТР диска більший, ніж кільця і матриці (рис. 3*b*). Для однокомпонентного включення збільшення його жорсткості завжди призводить до зростання КІН $F_1^{\pm}$, якщо КЛТР включення більший, ніж матриці [12]. Таким чином, відповідним підбором модулів зсуву і коефіцієнтів лінійного теплового розширення компонентів включення можна збільшувати чи зменшувати КІН $F_1^{\pm}$ у вершині тріщини, що важливо з точки зору керування тріщиностійкістю матеріалу.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрено двумерную задачу термоупругости для плоскости с двухкомпонентным круговым включением и трещиной. Задача сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений по замкнутому (граница включения) и разомкнутому (трещина) контурам. Численное решение интегральных уравнений получено методом механических квадратур. Исследовано влияние теплофизических и механических свойств компонент включения на коэффициенты интенсивности напряжений у вершинах трещины.

SUMMARY. A two-dimensional problem of thermoelasticity for the plane with a two-component circular inclusion and a crack is considered. The problem is reduced to the system of singular integral equations at closed (boundary of inclusion) and unclosed (crack) contours. Numerical solutions of integral equations were obtained by the method of mechanical quadrature. The effect of thermophysical and mechanical properties of inclusion components on the stress intensity factors at the crack tips are established.

1. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 5. – С. 70–78.
   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* The plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for a finite piecewise uniform body with cracks // Materials Science. – 1987. – **23**, № 5. – P. 502–510.)
2. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Термопружний стан двокомпонентного порожнистого циліндра з крайовими радіальними тріщинами // Там же. – 1994. – **30**, №4. – С. 76–80.

(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Thermoelastic state of a two-component hollow cylinder with edge radial cracks // Ibid. – 1994. – **30**, № 4. – P. 470–474.)

3. *Саврук М. П., Тимощук Н. В., Прокопчук И. В.* Напряженное состояние композитного двухкомпонентного кольца с трещинами // Пробл. прочности. – 1988. – № 6. – С. 27–31.
4. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 34–40.

   (*Matysiak S. I., Evtushenko O. O., and Zeleniak V. M.* Heating of a half-space containing an inclusion and a crack // Materials Science. – 2004. – **40**, № 4. – P. 467–474.)
5. *Зеленяк В. М., Євтушенко О. О.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 140–146.
6. *Саврук М. П., Тимощук М. В.* Плоская задача теории упругости для кусочно-однородной полубесконечной пластины с упругими включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 2. – С. 55–61.

   (*Savruk M. P. and Tymoshuk N. V.* The plane problem of the theory of elasticity for a piesewise-uniform semiinfinite plate with elastic inclusions and cracks // Materials Science. – 1987. – **23**, № 2. – P. 160–165.)
7. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Там же. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.

   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise-uniform plane with cracks // Ibid. – 1986. – **22**, № 3. – P. 297–307.)
8. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Там же. – 1988. – **24**, № 2. – С. 23–28.

   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for two joined dissimilar half-planes with curved and cracks // Ibid. – 1988. – **24**, № 2. – P. 124–129.)
9. *Зеленяк В., Слободян Б.* Моделювання термопружного двовимірного стану спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 94–101.
10. *Саврук М. П., Тимощук Н. В.* Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – **20**, № 6. – С. 73–79.

    (*Savruk M. P. and Tymoshuk N. V.* Singular integral equations of the plane problems of the theory of elasticity for an infinite piesewise-uniform body with cracks // Materials Science. – 1984. – **20**, № 6. – P. 574–579.)
11. *Зеленяк В., Мартиняк Р., Слободян Б.* Напруження в спаяних різнорідних півплощинах з включенням і тріщиною за дії розтягу // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 54–58.
12. *Кіт Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 229 с.
13. *Кіт Г. С., Черняк М. С.* Напружений стан тіл з термічними циліндричними включен–нями та тріщинами (плоска деформація) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 30–37.

    (*Kit H. S. and Chernyak M. S.* Stressed state of bodies with thermal cylindrical inclusions and cracks (plane deformation) // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 315–324.)
14. *Зеленяк В. М., Саврук М. П.* Периодическая задача термоупругости для кусочно-однородной плоскости с криволинейными разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 1. – С. 133–139.
15. *Xiao Z. M. and Chen B. J.* Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Int. J. Fract. – 2001. – **108**. – P. 193–205.
16. *Зеленяк В., Слободян Б.* Напруження в пластині з тріщиною і двокомпонентним круглим включенням за дії розтягу // Машинознавство. – 2007. – № 2. – С. 23–26.
17. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Одержано 01.02.2012