

УДК 539.375

ЧАСТИЧНОЕ ЗАКРЫТИЕ ТРЕЩИН В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ПЕРФОРИРОВАННОМ МАССИВЕ

В. М. МИРСАЛИМОВ¹, А. Р. ВАГАРИ²

¹ Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку;

² Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку

На основе методов термоупругости математически описан эффект частичного закрытия трещин в тепловыделяющем изотропном массиве, ослабленном двоякопериодической системой охлаждающих цилиндрических каналов круглого поперечного сечения. Считают, что по мере повышения интенсивности тепловыделения в массиве его упругие свойства становятся зависимыми от температуры и происходит разрушение материала. Принято, что под действием тепловой нагрузки имеет место частичное закрытие трещин.

Ключевые слова: *тепловыделяющий перфорированный массив, зависимость упругих свойств материала от температуры, трещины, напряжения контактные, контактная зона.*

Большой интерес представляют исследования двоякопериодических задач механики разрушения, связанных с расчетами тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) в ядерных реакторах. ТВЭЛы работают в очень сложных напряженных условиях: высокие температуры, большие мощности тепловыделения. Для обеспечения надежности ядерных реакторов необходимо исследование напряженно-деформированного состояния и разрушения ТВЭЛов. Задачи прочности твердого ядерного горючего актуальны и сегодня и, несомненно, интерес к ним будет повышаться в связи с существующей тенденцией увеличения энерговыделения в ядерном горючем.

Задача о термоупругом равновесии плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий, рассматривалась [1–3] в предположении, что упругие свойства массива E (модуль упругости) и ν (коэффициент Пуассона материала) не зависят от температуры. При увеличении интенсивности тепловыделения q в таком массиве вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. Они будут способствовать возникновению и развитию образовавшихся на поверхности отверстий трещин.

Анализ напряженного состояния тепловыделяющей среды с пустотами показывает [4], что в процессе работы массива возникают области сжимающих напряжений. Считаем, что в тепловыделяющем массиве существуют зоны, в которых берега трещин вошли в контакт. Принимаем, что эти зоны примыкают к вершинам трещин, а их неизвестные размеры сравнимы с длиной трещины.

Будем считать, что по всему объему массива интенсивность тепловыделения равномерна; теплоотвод осуществляется только через поверхности цилиндрических каналов; свойства массива E и ν зависят от температурного перепада; на массив не действуют внешние силы, а только внутренние термонапряжения; напряжения, возникающие в материале массива, не выходят за пределы упругой дефор-

мации и свойства материала изотропны по всем направлениям; массив находится в стационарном состоянии.

Пусть имеем тепловыделяющий массив с двоякопериодической системой круговых отверстий радиусом λ ($\lambda < 1$) с центрами в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2he^{i\alpha}, \quad h > 0, \quad \text{Im } \omega_2 > 0 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины (рис. 1). Контуров круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. Перенос тепла в твэлах осуществляется главным образом теплопроводностью, поэтому расчет температурных полей в них сводят к решению задач теории теплопроводности при наличии внутренних источников тепла [2–4].

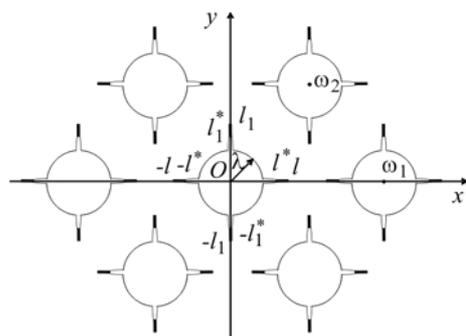


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном контактировании берегов трещин в тепловыделяющем массиве.

Fig. 1. Schematic of the problem on the partial contact of crack faces in the fuel cell.

Рассмотрим участки трещин (концевые контактные зоны), примыкающие к вершинам, на которых берега трещин вошли в контакт. В этих зонах возникают нормальные напряжения $p(x)$ и $q(y)$, коллинеарные соответственно осям абсцисс и ординат. Значения этих напряжений необходимо определить. Напомним, что здесь каждая трещина состоит из двух зон: контактной и зоны, где берега трещины свободны от нагрузок. Краевые условия задачи имеют вид

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{на } L; \quad (1)$$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L'_1; \quad \sigma_y = p(x), \quad \tau_{xy} = 0, \quad v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = 0 \quad \text{на } L''_1;$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L'_2; \quad \sigma_x = q(y), \quad \tau_{xy} = 0, \quad u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = 0 \quad \text{на } L''_2.$$

Здесь L'_1 и L'_2 – совокупность зон трещин, свободных от нагрузок; L''_1 и L''_2 – совокупность концевых зон, в которых берега трещин вошли в контакт; $(v^+ - v^-)$ и $(u^+ - u^-)$ – раскрытие берегов трещин; L – совокупность контуров круговых отверстий.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом массива, температура и напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 , а температура в области D – решением уравнения теории теплопроводности [3].

В плоской задаче теории упругости введением функции напряжений U условие совместности деформаций в напряжениях приводят [5] к неоднородному дифференциальному уравнению относительно U . Решение поставленной задачи строится по принципу суперпозиции, т. е. решение уравнения ищем в виде $U = U^{(1)} + U^{(2)}$, где $U^{(1)}$ является решением задачи термоупругости для массива без трещин, вызванное температурным полем $T(x, y)$; $U^{(2)}$ – решение силовой задачи при условии, что к берегам трещин дополнительно приложены усилия,

равные по величине и противоположные по знаку, найденные на первом этапе. Таким образом, при решении задачи механики разрушения для тепловыделяющего массива с частично контактирующими берегами трещин сначала определяем термоупругое состояние в массиве без трещин, вызванное температурным полем, и находим компоненты напряжений на линиях расположения трещин.

Применяя к решению краевой задачи на первом этапе метод возмущений [5], приходим к последовательности краевых задач для $U_k^{(1)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Из-за двоякопериодичности задачи определение напряжений на первом этапе сводится к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (см. в работе [1]). Двоякая периодичность функции напряжений $U^{(1)}$ позволяет сформулировать граничные условия для каждой элементарной ячейки, имеющей в рассматриваемой задаче один из видов, указанных в работе [1]. Следовательно, определение термических напряжений в массиве без трещин сводится к решению последовательности краевых задач. Для этого применяется вариационный метод Ритца. Приближенное решение ищется в виде

$$U_k^{(1)} = \sum_{v=1}^n a_v^{(k)} \varphi_v \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где система базисных функций φ_v удовлетворяет условия: $\varphi_v = 0$, $\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = 0$ на дуге S ; φ_v симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки, т. е. $\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial^3 \varphi_v}{\partial n^3} = 0$.

Функции φ_v выбирались согласно работе [1]. Для определения постоянных $a_v^{(k)}$ ($v = \overline{1, n}$) получены системы линейных алгебраических уравнений. После нахождения неизвестной функции напряжений $U^{(1)}$, напряжения определяют через эту функцию по известным формулам.

Перейдем к решению задачи на втором этапе. Согласно принципу суперпозиции для определения функции напряжений $U^{(2)}$ имеем однородное бигармоническое уравнение. На основании формул Колосова–Мухелишвили [6] и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах трещин задача сводится к определению двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = f_1(t) + f_y(t) \quad \text{на } L_1,$$

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1 \overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} = f_2(t_1) + f_x(t_1) \quad \text{на } L_2, \quad (4)$$

где $\tau = \lambda \exp(i\theta) + m\omega_1 + n\omega_2$, ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), t, t_1 – аффиксы точек берегов трещин коллинеарных соответственно осям абсцисс и ординат; $f_2(x) = -\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2}$,

$$f_2(y) = -\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2}; \quad f_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } L_1', \\ p(x) & \text{на } L_1'', \end{cases} \quad f_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{на } L_2', \\ q(y) & \text{на } L_2''. \end{cases}$$

Для решения краевой задачи (3), (4) строятся общие представления, описывающие класс двоякопериодических симметричных задач. В этих представлении-

ях $g(x)$, $g_1(y)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин. Неизвестные функции $g(x)$, $g_1(y)$ и постоянные α_{2k} и β_{2k} [7] должны быть определены из краевых условий (3), (4). С помощью метода степенных рядов [4, 7] находим бесконечные линейные алгебраические системы подобные (16), (17) в работе [8], с очевидными изменениями. Требуя, чтобы построенные комплексные потенциалы удовлетворяли граничные условия на L_1 и L_2 , получаем два сингулярных интегральных уравнения для $g(x)$ и $g_1(y)$.

Методика численного решения и анализ. Следуя [1], на первом этапе ограничивались выбором шести базисных функций φ_ν . В расчетах принималось

$$E = E_0 - \beta_1 T - \beta_2 T^2, \quad v = v_0(1 + \beta T),$$

где β_1, β_2, β – эмпирические постоянные, подбираются в каждом конкретном случае в зависимости от материала.

Линейные алгебраические системы уравнений для a_ν решались методом Гаусса с выбором главного элемента. После нахождения функции напряжений определялись функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Так как в тепловыделяющем массиве напряжения ограничены, то решение каждого сингулярного интегрального уравнения следует искать в классе всюду ограниченных функций. Используя квадратурные формулы [9], сводим каждое сингулярное интегральное уравнение к конечной системе $M+1$ алгебраических уравнений для приближенных значений искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ в узловых точках и размеров $(l-l^*)/\lambda$ и $(l_1-l_1^*)/\lambda$ концевых контактных зон. В правую часть полученных конечных систем уравнений входят неизвестные значения напряжений $p(\eta_m)$, $q(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих соответствующим контактным зонам. Неизвестные напряжения в контактных зонах определяются из дополнительных условий (1) для перемещений. Их удобнее записать для производной раскрытия берегов трещины:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x,0) - v^-(x,0)] = 0 \quad \text{на } (l^*, l); \\ g_1(y) &= -\frac{2\mu i}{1+\kappa} \frac{d}{dy} [u^+(0,y) - u^-(0,y)] = 0 \quad \text{на } (l_1^*, l_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь x, y – соответственно абсциссы точек берегов концевых контактных зон трещины (l^*, l) и (l_1^*, l_1) .

Требуя выполнения условий (5) в узловых точках концевых зон (l^*, l) и (l_1^*, l_1) , получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $p(\eta_{m_1})$, $q(\eta_{m_2})$ в узловых точках

$$\begin{aligned} g(\eta_{m_1}) &= 0, \quad m_1 = 1, 2, \dots, M_1; \\ g_1(\eta_{m_2}) &= 0, \quad m_2 = 1, 2, \dots, M_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где M_1 и M_2 – число узловых точек, принадлежащих соответствующим контактным зонам трещины.

Так как параметры l^* и l_1^* , характеризующие размеры контактных зон, неизвестны, объединенная алгебраическая система уравнений на втором этапе является нелинейной. Полученные системы уравнений для α_{2k} , β_{2k} , $g_k^0 = g(\eta_k)$, $g_{1k}^0 = g_1(\eta_k)$, $p(\eta_{m_1})$, $q(\eta_{m_2})$, l^* и l_1^* позволяют при заданной интенсивности

тепловыделения найти напряженно-деформированное состояние массива при наличии трещин с частично контактирующими берегами, контактные напряжения, а также размеры контактных концевых зон. Для решения объединенной алгебраической системы уравнений использовали метод последовательных приближений [10]. В каждом приближении она решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. Расчеты проводились для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались расположения отверстий в вершинах квадратной ($h=1, \alpha=\pi/2$) и треугольной ($h=1, \alpha=\pi/3$) сеток. Полагалось $M=30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений.

Установлена зависимость длины контактной зоны от безразмерного значения интенсивности тепловыделения (рис. 2). Здесь параметр нагружения $q_* = \frac{\alpha_* E_0 q}{\delta(1-\nu_0)}$, δ – коэффициент теплопроводности материала массива; σ_s – предел текучести материала на растяжение. Установлены распределения контактных напряжений (рис. 3). При расчетах были использованы безразмерные координаты x' . Наибольшие значения контактных напряжений находятся в средней части контактной зоны, где берега трещины смыкаются. Аналогичные результаты для контактных напряжений имеют место и в концевых контактных зонах, коллинеарных осям ординат. Как показывают расчеты, учет зависимости E и ν от температуры приводит к снижению уровня напряженности в массиве.

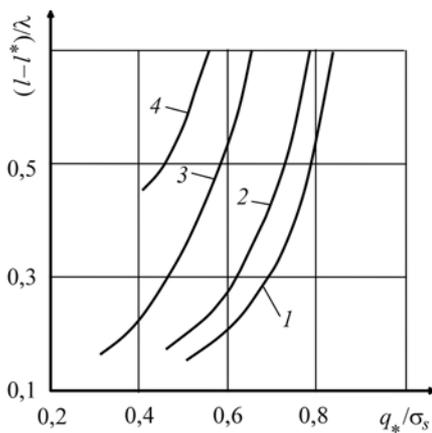


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Зависимость длины концевой контактной зоны $(l-l^*)/\lambda$ от безразмерного значения интенсивности тепловыделения q_*/σ_s для некоторых значений радиуса отверстия в квадратной сетке: 1 – $\lambda = 0,2$; 2 – $0,3$; 3 – $0,4$; 4 – $0,5$.

Fig. 2. Dependence of the length of the contact end area $(l-l^*)/\lambda$ of the dimensionless value of the heat intensity, q_*/σ_s , for some values of the hole radius for a square grid of holes:

$1 - \lambda = 0.2$; 2 – 0.3 ; 3 – 0.4 ; 4 – 0.5 .

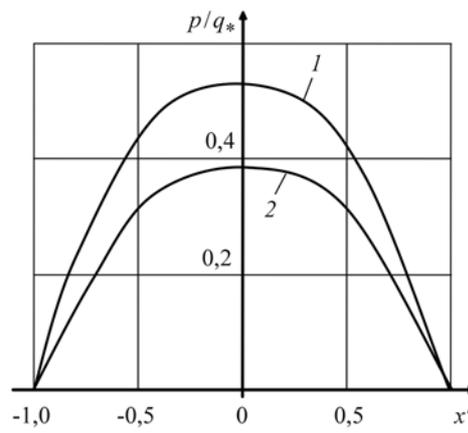


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Распределение контактных напряжений p/q_* для различных значений радиуса отверстия в квадратной сетке: 1 – $\lambda = 0,3$; 2 – $0,5$.

Fig. 3. Distribution of contact stresses, p/q_* , for different values of the hole radius for a square grid of holes: 1 – $\lambda = 0.3$; 2 – 0.5 .

ВЫВОДЫ

Анализ модели частичного закрытия трещин в тепловыделяющем массиве, ослабленном двоякопериодической системой одинаковых цилиндрических каналов круглого поперечного сечения, сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы термоупругой задачи при различных значениях свободных параметров тепловыделяющей среды. Это различные теплофизические и механические характеристики материала, геометрические размеры каналов. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определять параметры интенсивности внутренних источников тепла и напряженное состояние массива, при которых достигается заданная область контакта берегов трещин.

РЕЗЮМЕ. На основі методів термопружності математично описано ефект часткового закриття тріщин в ізотропному масиві, що виділяє тепло, послабленому двоперіодичною системою охолоджуючих циліндричних каналів з круглим поперечним перерізом. Вважають, що з підвищенням інтенсивності тепловиділення в масиві його пружні властивості стають залежні від температури і матеріал руйнується. Прийнято, що під дією теплового навантаження відбувається часткове закриття тріщини.

SUMMARY. A mathematical model is constructed for partial closing of cracks in an isotropic fuel cell (heat-releasing solid material), weakened by a biperiodic system of cooling cylindrical channels with a circular cross section. It is assumed that the elastic properties of the fuel cell with increasing heat-release intensity in the cell depend on temperature and the material is destroyed. It is accepted that under the thermal loading effect a partial closing of cracks occurs.

1. *Соболев С. Л., Мухина Г. В.* Определение термических напряжений в среде с пустотами // Атом. энергия. – 1958. – 5, вып. 2. – С. 178–181.
2. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах. – М.: Госатомиздат, 1962. – 147 с.
3. *Фильшинский Л. А.* Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1964. – Вып. 4. – С. 103–112.
4. *Мирсалимов В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: МГУ, 1976. – 368 с.
6. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. *Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
8. *Мирсалимов В. М.* Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве // ПМТФ. – 2007. – 48, № 5. – С. 121–133.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 443 с.
10. *Мирсалимов В. М.* Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

Получено 14.03.2011