

УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ С МАЛОЙ ОГРАНКОЙ КОНТУРОВ ТЕЛ

М. В. ЧЕРНЕЦ^{1,2}, В. Б. ЖИДИК¹

¹ Дрогобычский государственный педагогический университет им. Ивана Франко;

² Люблинский политехнический институт, Польша

Решена квазистатическая контактная задача о взаимодействии цилиндрических элементов с малой огранкой их контуров. Рассмотрены соединения, где реализуются однообластевый и смешанный (одно-двухобластевый) контакты. Установлены основные закономерности изменения максимальных контактных давлений вследствие поворота диска с овальностью в отверстиях с различной огранкой.

Ключевые слова: цилиндрическое соединение, огранка контуров тел, однообластевый и смешанный контакты, контактные давления.

Как известно, детали типичных цилиндрических соединений (подшипников скольжения, направляющих, шарниров и т.д.) при изготовлении неминуемо приобретают определенного вида некруглость контуров (овальность, трехгранность, четырехгранность и т.д.). Вопросу исследования влияния некруглости на уровень и распределение контактных давлений в различного типа соединениях с симметричным взаиморасположением контактирующих тел, приводящим к одно- либо двухобластевому соприкосновению, посвящен ряд публикаций [1–4, 8]. Получено решение квазистатической задачи [5–7], где вал с малой овальностью (эллиптичностью) поворачивается в овальной отверстии (втулке), что приводит к циклическому изменению максимальных контактных давлений. Здесь рассмотрим решение квазистатической задачи для соединений, втулка которых имеет огранку сложного вида.

Формулировка контактной задачи. В отверстии упругой втулки 1 находится упругий диск (вал) 2 с малой технологической огранкой (рис. 1а, б). Силовое взаимодействие тел в сопряжении осуществляется под влиянием сосредоточенной силы N , приложенной к диску 2 . В сопряжении есть радиальный зазор $\varepsilon = R_1 - R_2 > 0$. Отклонение контуров L_1 и L_2 от кругового (огранка) характеризуется параметрами $\delta_1 = R_1 - R'_1$, $\delta_2 = R'_2 - R_2$ (рис. 1а). Овальность (огранку) принимаем регулярной.

Для схем сопряжений, представленных на рис. 1, обеспечивается во всем диапазоне изменения угла поворота $0 \leq \alpha_2 \leq 360^\circ$ диска однообластевый симметричный либо косой контакт. Сопряжения овальных тел с симметричным двухобластевым контактом иллюстрирует рис. 1с. При повороте диска с овальностью реализуется одно-двухобластевый контакт (соответственно симметричный либо косой).

Необходимо установить области контакта, определяемые углами $2\alpha_{0\delta} = 2\alpha_{0\delta}(\alpha_2)$ (рис. 1а) (однообластевый симметричный и косой) и 2γ (рис. 1с) (двухобластевый симметричный); угол 2λ (рис. 1с) начального соприкосновения

Контактная особа: М. В. ЧЕРНЕЦ, e-mail: chernets@drohobych.net

тел (двухобластевый симметричный); максимальные контактные давления $p(0, \delta)$ при изменении $0 \leq \alpha_2 \leq 360^\circ$ (однообластевый контакт) и $p(\lambda, \delta)$ (двухобластевый).

Схемы сопряжений с трех- и четырехгранностью отверстия представлены на рис. 2.

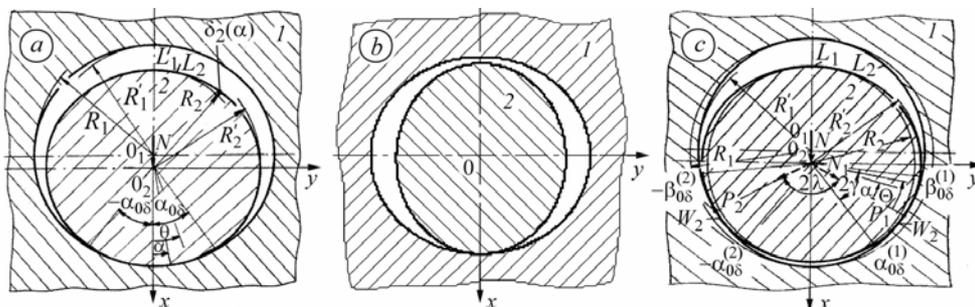


Рис. 1. Сопряжение с симметричным (a) и антисимметричным (b, c) расположением тел с овальностью: a, b – однообластевый контакт; c – двухобластевый. 1 – втулка; 2 – диск.

Fig. 1. Conjugation with symmetric (a) and antisymmetric (b, c) location of solids with ovality: a, b – one-area contact; c – bi-area contact. 1 – bushing; 2 – elastic disk.

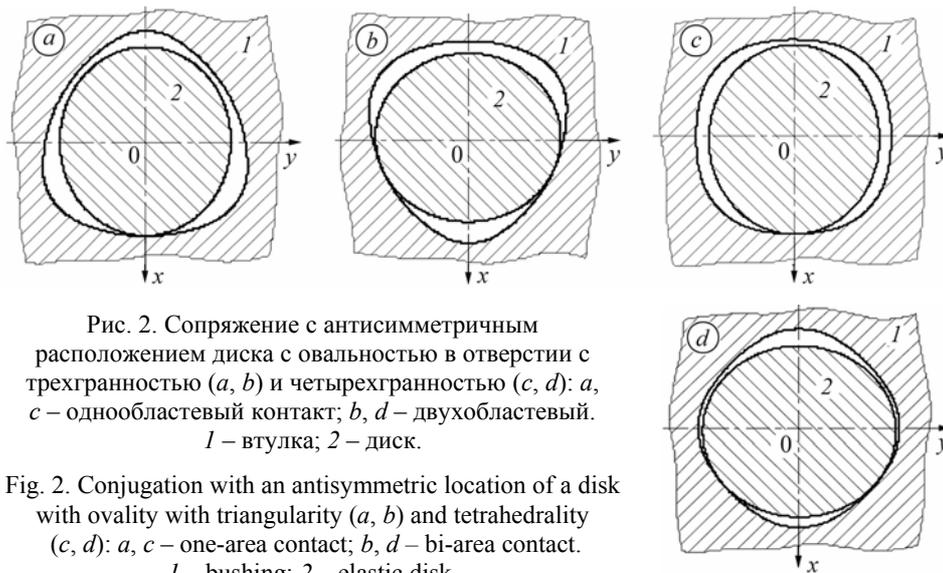


Рис. 2. Сопряжение с антисимметричным расположением диска с овальностью в отверстии с трехгранностью (a, b) и четырехгранностью (c, d): a, c – однообластевый контакт; b, d – двухобластевый. 1 – втулка; 2 – диск.

Fig. 2. Conjugation with an antisymmetric location of a disk with ovality with triangularity (a, b) and tetrahedrality (c, d): a, c – one-area contact; b, d – bi-area contact. 1 – bushing; 2 – elastic disk.

Определение контактных давлений и полуугла контакта. Уравнение для нахождения контактного давления в случае смешанного (одно-двухобластевого контакта) имеет вид [4]

$$k_1 \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\theta}}{2} p'(\tilde{\alpha}, \delta) d\tilde{\theta} - k_3 \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} p(\tilde{\alpha}, \delta) d\tilde{\alpha} - k_4 \cos \tilde{\alpha} \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} p(\tilde{\alpha}, \delta) \cos \tilde{\alpha} d\tilde{\alpha} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{R^2} \left[1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1^{(\omega)}(\alpha) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2^{(\omega)}(\alpha) \right], \quad p' = dp/d\alpha, \quad \tilde{\alpha}_{\min} \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\alpha}_{\max},$$

– для однообластевого:

$$\tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\theta} = \theta, \quad 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_{0\delta}, \quad -\alpha_{0\delta} \leq \tilde{\alpha} \leq \alpha_{0\delta};$$

– для двухобластного:

$$\tilde{\alpha} = \lambda + \alpha, \quad \tilde{\theta} = \lambda + \theta, \quad 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\theta}, \quad 0 \leq \tilde{\theta} \leq \gamma, \quad \gamma_1 \leq \tilde{\alpha} \leq \gamma_2,$$

$$\gamma_{1,2} = \lambda \pm 0,5(\beta_{0\delta}^{(1)} - \alpha_{0\delta}^{(1)});$$

$$k_1 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1+\kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1+\kappa_2}{G_2 R_2} \right), \quad k_3 = \frac{1+\kappa_1}{8\pi G_1 R_1}, \quad k_4 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2} \right), \quad \kappa = 3 - 4\mu;$$

где $R = R_2$; G, μ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов.

Согласно [4] характеристики огранки контуров $D_1^{(\omega)}(\alpha)$, $D_2^{(\omega)}(\alpha)$ в рассматриваемых сопряжениях будут:

– отверстие с овальностью – диск с овальностью $D_1^{(2)} = 1 - 3 \cos 2\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 1a);

– отверстие с трехгранностью – диск с овальностью $D_1^{(3)} = 1 - 8 \cos 3\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 2a);

– отверстие с четырехгранностью – диск с овальностью $D_1^{(4)} = 1 - 15 \cos 4\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 2c);

– отверстие с овальностью – диск с овальностью $D_1^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 1c);

– отверстие с трехгранностью – диск с овальностью $D_1^{(3)} = 1 + 8 \cos 3\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 2b);

– отверстие с четырехгранностью – диск с овальностью $D_1^{(4)} = 1 + 15 \cos 4\alpha$,
 $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ (рис. 2d).

Для приближенного решения уравнения (1) контактной задачи использовали метод коллокации [2]. Наиболее простым является применение одной точки коллокации $\tilde{\alpha} = 0,5\alpha_{0\delta}$ (однообластный контакт) и $\tilde{\alpha} = 0,5\gamma$ (двухобластный). В этом случае функция контактного давления для обоих видов контакта принята в виде

$$p(\alpha, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{0\delta}}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad p(\lambda, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\alpha} - \lambda}{2}}, \quad (2)$$

$$\text{где } E_\delta = \frac{e_4}{R} \left[\cos^{-2} \frac{\tilde{\alpha}}{4} - e_1 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\alpha}}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\alpha}}{4}} - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}}{4} \left(e_2 \cos^{-1} \frac{\tilde{\alpha}}{2} + 2e_3 \cos \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right) \right]^{-1},$$

$$\varepsilon_\delta = \varepsilon \Sigma_\delta, \quad \Sigma_\delta = 1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1(\alpha_1) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2(\alpha_2), \quad \alpha_1 = 0^\circ;$$

$$e_1 = \frac{2}{Z} [(1 - \kappa_1)(1 + \mu_1)E_2 - (1 - \kappa_2)(1 + \mu_2)E_1], \quad e_2 = \frac{2}{Z} (1 + \kappa_1)(1 + \mu_1)E_2,$$

$$e_3 = \frac{4}{Z} [\kappa_1(1 + \mu_1)E_2 - (1 + \mu_2)E_1], \quad e_4 = 4E_1E_2/Z,$$

$$Z = (1 + \kappa_1)(1 + \mu_1)E_2 + (1 + \kappa_2)(1 + \mu_2)E_1;$$

$E = 2G/(1 + \mu)$ – модуль Юнга материала.

Максимальное контактное давление $p(0, \delta)$ при однообластевом контакте будет возникать при $\alpha = 0$, а такое же давление $p(\lambda, \delta)$ при двухобластевом симметричном контакте – в двух точках P_1 и P_2 (рис. 1с), размещенных под углом 2λ . Соответственно:

$$p(0, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \operatorname{tg} \frac{\alpha_{0\delta}}{2}, \quad p(\lambda, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Неизвестный полуугол контакта $\alpha_{0\delta}$ либо γ вычисляем с учетом функций $p(0, \delta)$ либо $p(\lambda, \delta)$ из условия равновесия сил, приложенных к диску:

$$N = 4\pi R_2 E_\delta \varepsilon_\delta \sin^2 \frac{\alpha_{0\delta}}{4}, \quad N_1 = N_2 = 4\pi R_2 E_\delta \varepsilon_\delta \sin^2 \frac{\gamma}{4}, \quad (4)$$

где $N_1 = N_2 = N/2 \cos \lambda$.

Числовое решение задачи. Приняты следующие исходные данные: $N = 10^5$ N; $R = 25$ mm; $\varepsilon = 0,41$ mm; $\delta_1 = (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$ mm, $\delta_2 = (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$ mm; $\delta_1 + \delta_2 \leq \varepsilon$; $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$; $R_1 = R_2 + \varepsilon$; $R = R_2$.

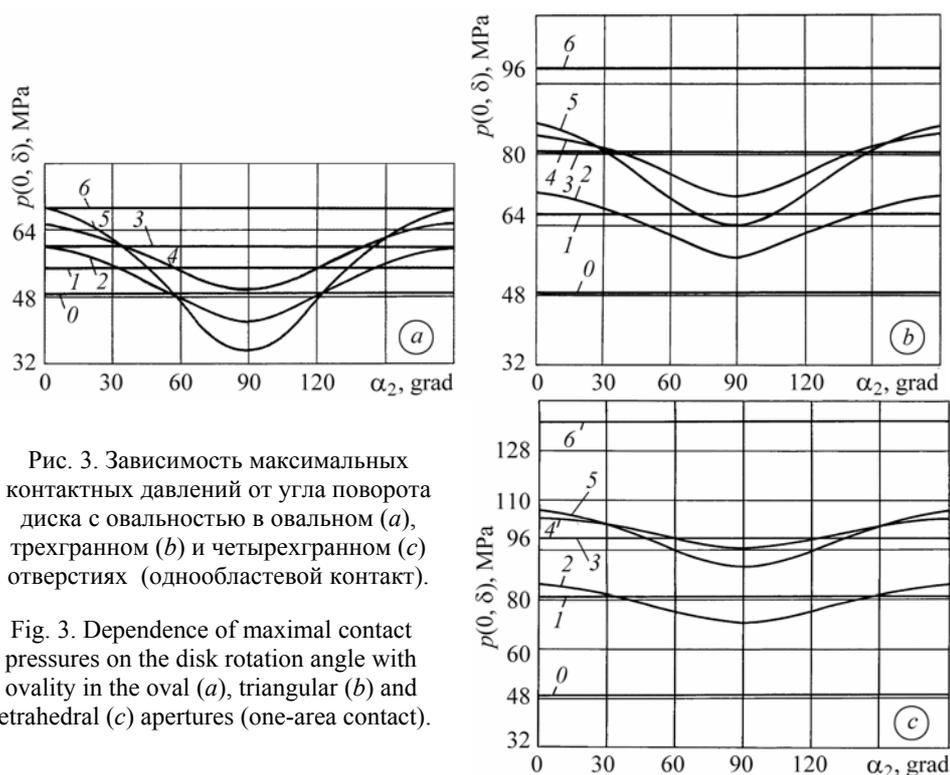


Рис. 3. Зависимость максимальных контактных давлений от угла поворота диска с овальностью в овальном (а), трехгранном (б) и четырехгранном (с) отверстиях (однообластевой контакт).

Fig. 3. Dependence of maximal contact pressures on the disk rotation angle with ovality in the oval (a), triangular (b) and tetrahedral (c) apertures (one-area contact).

Результаты решения задачи представлены на рис. 3 и 4, где: 0 – $\delta_1 = \delta_2 = 0$; 1; 1' – $\delta_1 = 0,1$ mm; $\delta_2 = 0$; 2; 2' – $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ mm; 3; 3' – $\delta_1 = 0,2$ mm, $\delta_2 = 0$; 4; 4' – $\delta_1 = 0,2$ mm, $\delta_2 = 0,1$ mm; 5; 5' – $\delta_1 = \delta_2 = 0,2$ mm; 6; 6' – $\delta_1 = 0,4$ mm, $\delta_2 = 0$.

Соответственно рис. 3 иллюстрирует изменение давлений $p(0, \delta)$ в сопряжениях, где выступает однообластевый контакт (см. рис. 1а,б; 2а, с).

Анализ рисунков свидетельствует, что максимальные давления в сопряжениях с круговым диском и огранным отверстием тел зависят от радиального зазора (прямые 0; 1; 3; б) и вида огранки и постоянные при повороте диска. При огранке диска они циклически изменяются от max до min с различной величиной размаха. При этом с увеличением сложности огранки растет их уровень. Чем сложнее огранка отверстия, тем выше уровень давлений при тех же величинах некруглости тел (рис. 3b, c).

На рис. 4 приведены графики изменения давлений $p(0, \delta)$, $p(\lambda, \delta)$ в сопряжениях диска с овальностью с овальным (см. рис. 1c), трехгранным (см. рис. 2b) и четырехгранным отверстиями (см. рис. 2d), где выступает смешанный контакт (одно-двухобластевый). Границу перехода однообластевого контакта в двухобластевый определяли при угле α_{2*} , для которого $\Sigma_{\delta} = 0$.

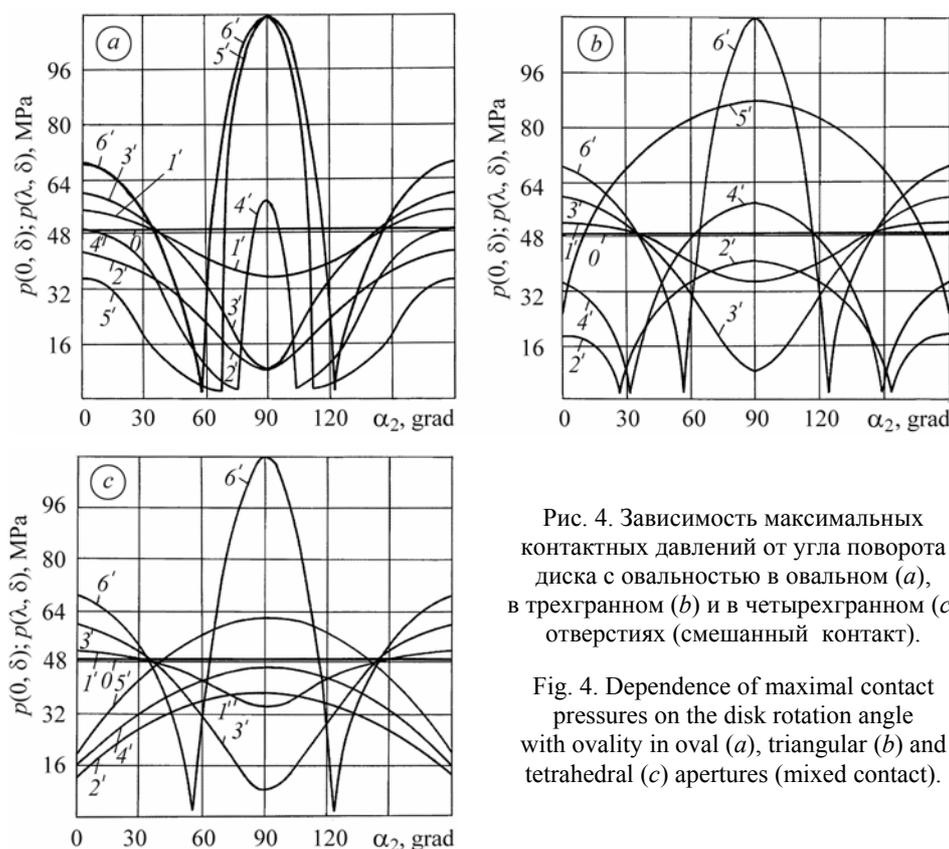


Рис. 4. Зависимость максимальных контактных давлений от угла поворота диска с овальностью в овальном (a), в трехгранном (b) и в четырехгранном (c) отверстиях (смешанный контакт).

Fig. 4. Dependence of maximal contact pressures on the disk rotation angle with ovality in oval (a), triangular (b) and tetrahedral (c) apertures (mixed contact).

В этом случае контактного взаимодействия тел при повороте диска изменяются не только максимальные контактные давления, а и вид контакта. При определенных величинах некруглости δ_1 и δ_2 (кривые 1'–3' на рис. 4a; 1'; 3' – рис. 4b, c) реализуется либо однообластевый контакт, либо одно-двухобластевый (кривые 4'–6' – на рис. 4a; 2'; 4'; 6' – на рис. 4b; 6' – на рис. 4c), либо двухобластевый (кривые 5' – на рис. 4b; 2', 4', 5' – на рис. 4c).

Минимальные давления

$$p(0, \delta)_{\min} = 0,6N/R.$$

Увеличение степени сложности огранки контуров тел неодинаково влияет как на уровень давлений, так и на вид контакта в зависимости от величин огранки.

ВЫВОДЫ

Технологическая некруглость элементов цилиндрических соединений существенно влияет на возникающие контактные давления. В зависимости от взаиморасположения элементов с огранкой и сложности огранки будет возникать однообластевый, одно-двухобластевый (смешанный) либо двухобластевый контакты.

Вращение диска (вала) в отверстии (втулке) приводит к циклическому изменению контактных давлений, вариация которых зависит от сложности огранки элементов. Наблюдается принципиально различный характер зависимости давлений от угла поворота диска для случаев однообластевых, одно-двухобластевых и двухобластевых контактов.

РЕЗЮМЕ. Подано розв'язок квазістатичної контактної задачі про взаємодію циліндричних елементів з малим ограненням їх контурів. Розглянуто з'єднання, де реалізуються однообластевий і змішаний (одно-двообластевий) контакти. Встановлено основні закономірності зміни максимальних контактних тисків внаслідок повороту диска з овальністю в отворі з різним ограненням.

SUMMARY. The solution of a quasi-static contact problem on the interaction of cylindrical elements with small cutting of their contours is presented. Joints, in which a single-area and a mixed (one-biarea) contact takes place, are examined. The basic regularities of the maximal contact pressures changes due to the rotation of a disc with ovality in an aperture with different types of face cutting are established.

1. Чернец М. В. О решении контактной задачи для цилиндрических тел огранной конфигурации при их внутреннем соприкосновении // Проблемы прочности. – 1987. – № 6. – С. 103–106.
2. Андрейкив А. Е., Чернец М. В. Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
3. Чернець М. Узагальнений метод дослідження контактної взаємодії циліндричних спряжень, контури елементів яких мають малу некруглість // Проблеми трибології. – 2000. – № 2. – С. 97–113.
4. Чернець М., Пашечко М., Невчас А. Методи прогнозування та підвищення зносостійкості триботехнічних систем ковзання. – Дрогобич: КОЛО, 2001. – Т. 1. – 492 с.
5. Чернець М. В., Лебедева Н. М. Оцінка впливу малої овальності вала на характеристики контактної взаємодії у підшипнику ковзання // Проблеми трибології. – 2005. – № 1. – С. 167–170.
6. Чернець М. В., Лебедева Н. М. До питання про варіацію контактних тисків у підшипнику ковзання при наявності огранення його деталей // Там же. – 2005. – № 2. – С. 81–85.
7. Чернець М. В., Лебедева Н. М. Про особливості обертового контакту в циліндричному з'єднанні з малою еліптичністю контурів // машинознавство. – 2005. – № 3. – С. 30–33.
8. Оцінка параметрів контакту у циліндричних з'єднаннях з малим ограненням контурів їх елементів / М. Чернець, Р. Луцишин, Н. Лебедева, В. Жидик // Проблеми трибології. – 2007. – № 4. – С. 86–89.

Получено 23.11.2010