

УДК 517.9;537.8;538.566

РОЗВИТОК МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ В ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ

Д. Б. КУРИЛЯК, З. Т. НАЗАРЧУК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Наведено огляд праць з розвитку методів аналітичної регуляризації для розв'язання мішаних крайових задач теорії дифракції. Розглянуто задачі дифракції електромагнетних та акустичних хвиль на фрагментах конічних, клиноподібних і циліндричних ідеальних поверхонь, а також пружних хвиль на міжфазних тріщинах. Для розв'язання цих задач розвинуто метод часткового обернення оператора та метод Вінера–Хопфа.

Ключові слова: *дифракція на конусах, на клинах, на циліндрах; аналітико-числові методи, аналітична регуляризація, метод Вінера–Хопфа, міжфазні тріщини, спектральні задачі.*

Важливу роль у теорії дифракції відіграють дослідження розсіювання електромагнетних (акустичних, пружних) хвиль фрагментами ідеально провідних (жорстких, м'яких) конічних, клиноподібних та циліндричних поверхонь. Такі задачі є моделями для вивчення багатьох фізичних явищ, пов'язаних з формуванням хвильових полів у структурах зі сингулярностями та змінною кривиною. За використання сучасних числових методів розв'язування таких задач залишаються відкритими питання про коректність розв'язків, їх знаходження у необхідному класі послідовностей, обґрунтованість редукції нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь. Гостра потреба у правильних відповідях на них постає під час аналізу екстремальних ситуацій, де імовірність виявити нові фізичні ефекти висока, наприклад, під час аналізу полів у резонансному частотному діапазоні, за переходу до надвисоких частот, визначення поля в ближній зоні, зокрема, в околі сингулярних точок поверхні. Очевидним є і те, що для верифікації найуживаніших більш загальних наближених підходів, коли не завжди вдається визначити межі застосовності, необхідні методи, які б надійно працювали у широкому діапазоні зміни геометричних розмірів і частотного параметра.

Нижче розглянуто основні підходи та методи, запропоновані та розвинуті авторами впродовж 2000–2010 рр. для розв'язання найхарактерніших (ключових) задач, що виникають у теорії дифракції монохроматичних хвиль (залежність від часу задає множник $e^{-i\omega t}$, який опускаємо) на фрагментах конічних, клиноподібних та циліндричних поверхонь, а також на міжфазних тріщинах.

Аналітичні та аналітико-числові методи розв'язування крайових задач теорії дифракції на фрагментах ідеальних канонічних поверхонь розглядали багато авторів. У працях [1–3] для розв'язання задач дифракції на скінченних конічних та біконічних поверхнях використовували метод Вінера–Хопфа. Вивчали [4] також випромінювання звукових хвиль зі скінченного конуса. Розсіяння електромагнетних хвиль на конічних поверхнях зі щілинами вздовж твірної досліджували [5], базуючись на методі задачі Рімана–Гільберта.

Контактна особа: Д. Б. КУРИЛЯК, e-mail: @ipm.lviv.ua

Метод обернення асимптотик. Конічні розсіювачі. Скалярні задачі дифракції на скінченному конусі $\mathcal{Q} = \{r \in (0, c_1); \theta = \gamma_1; \varphi \in [0, 2\pi)\}$, де (r, θ, φ) – сферичні координати, зводять до розв’язання суматорних рівнянь для приєднаних функцій Лежандра з дробовими індексами [6]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) [x_n^{(m;1)} + b_n^{(m)}] =$$

$$= \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(m;1,1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta), \theta \in [0, \gamma_1), \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(m;1,2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}^m(-\cos \theta), \theta \in (\gamma_1, \pi]; \end{cases} \quad (1a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) \left[x_n^{(m;1)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(\rho_1)}{K_{z_n^{(m)}}(\rho_1)} + c_n^{(m)} \right] =$$

$$= \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(m;1,1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) \frac{I'_{\nu_p^{(m)}}(\rho_1)}{I_{\nu_p^{(m)}}(\rho_1)}, \\ \theta \in [0, \gamma_1), \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(m;1,2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}^m(-\cos \theta) \frac{I'_{\mu_k^{(m)}}(\rho_1)}{I_{\mu_k^{(m)}}(\rho_1)}. \\ \theta \in (\gamma_1, \pi]. \end{cases} \quad (1b)$$

Тут $y_n^{(m;i,j)}$, $x_n^{(m;i)}$ – невідомі коефіцієнти розкладу; $b_n^{(m)}$, $c_n^{(m)}$ – відомі величини; $\rho_1 = sc_1$ ($s = -ik$, k – хвильове число); $P_{\nu-1/2}^m(\cos \theta)$ – приєднані функції Лежандра; $I_\nu(\rho_1)$, $K_\nu(\rho_1)$ – відповідно модифіковані функції Бесселя і Макдональда; $z_n^{(m)} = n + m - 1/2$; $\nu_p^{(m)}$, $\mu_k^{(m)}$ – зростаюча послідовність простих додатних нулів трансцендентних рівнянь, які визначають із крайових умов: для дифракції акустичних хвиль ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) – за умови Неймана (жорстка поверхня) $d/d\theta [P_{\eta-1/2}^m(\pm \cos \gamma)]|_{\eta=\nu_p^{(m)}(\mu_p^{(m)})} = 0$; за умови Діріхле (м’ягка поверхня)

$P_{\eta-1/2}^m(\pm \cos \gamma)|_{\eta=\nu_p^{(m)}(\mu_p^{(m)})} = 0$; для електромагнетних хвиль ($m = 1$), коли скінченний конус опромінюють осесиметричною хвилею H -поляризації, $d/d\theta [P_{\eta-1/2}^m(\pm \cos \gamma)]|_{\eta=\nu_p(\mu_p)} = 0$, а за опромінення хвилею E -поляризації $P_{\eta-1/2}^m(\pm \cos \gamma)|_{\eta=\nu_p(\mu_p)} = 0$.

Розв’язок суматорних рівнянь (1) необхідно отримати в класі послідовностей, що асимптотично поведуться так: $x_\lambda^{(m)}$, $y_\lambda^{(m;1)}$, $y_\lambda^{(m;2)} = O(\lambda^{-m-1})$, коли $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda = n, p, k$). Методика їх розв’язування розроблена раніше [6–14]. Показано, що за умови, коли $N, P, K \rightarrow \infty$ ($N = P + K$) і $P/K = \gamma/(\pi - \gamma)$, суматорні рівняння (1) зводять до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$A_1(m) \tilde{X}^{(m)} = F_1^{(m)}. \quad (2)$$

Тут $\tilde{X}^{(m)} = \{\tilde{x}_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$, $\tilde{x}_n^{(m)} = q_n^{(m)} x_n^{(m)}$, $q_n^{(m)}$ – відома величина, яка залежить від типу збуджувальної хвилі; $A_1(m)$ – матричний оператор

$$A_1(m) : \left\{ a_{qn}^{(m;1)} = \frac{\rho_1 W \left[K_{z_n^{(m)}} I_{\xi_q^{(m)}} \right]_{\rho_1}}{[(\xi_q^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2] K_{z_n^{(m)}}(\rho_1) I_{\xi_q^{(m)}}(\rho_1)} \right\} \quad (q, n = \overline{1, \infty}), \quad (3)$$

де $\{\xi_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty = \{\nu_p^{(m)}\}_{p=1}^\infty \cup \{\mu_k^{(m)}\}_{k=1}^\infty$ – зростаюча послідовність; $W[f, g]_t = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

Далі вводимо оператор типу згортки, який є основною частиною асимптотики оператора (3), коли $n, q \rightarrow \infty$,

$$A(m) : \left\{ a_{qn}^{(m)} = (\xi_q^{(m)} - z_n^{(m)})^{-1} \right\}, \quad (4)$$

а також відповідний обернений оператор за формулою

$$A^{-1}(m) : \left\{ \tau_{kq}^{(m)}(\gamma) = \left\langle \left\{ M_-^{-1}(\xi_q^{(m)}, \gamma; m) \right\}' M'_-(z_k^{(m)}, \gamma; m) (z_k^{(m)} - \xi_q^{(m)}) \right\rangle^{-1} \right\}. \quad (5)$$

Тут $M(\nu, \gamma; m)$ – парна мероморфна функція, яка регулярна у смузі $\Pi : \{\text{Re } \nu < 1/2\}$; $M'(\nu, \gamma; m) = d/d\nu [M(\nu, \gamma; m)]$ і яку можна факторизувати у вигляді $M(\nu, \gamma; m) = M_+(\nu, \gamma; m) M_-(\nu, \gamma; m)$, де $M_\pm(\nu, \gamma; m)$ – функції, регулярні відповідно у напівплощинах $\text{Re } \nu > -1/2$ і $\text{Re } \nu < 1/2$. Прості її полюси і нулі за фізичним змістом відповідають значенням індексів просторових мод поля у кінцевих областях та вільному просторі.

За допомогою операторів (4), (5) нескінченну алгебричну систему рівнянь (2) зводимо до системи рівнянь другого роду:

$$\tilde{X}^{(m)} = A^{-1}(m) [A(m) - A_1(m)] \tilde{X}^{(m)} + A^{-1}(m) F_1^{(m)}, \quad (6)$$

де $\{A(m), A^{-1}(m)\}$ – пара регуляризаційних операторів (4), (5). За прямування індексів матричних елементів (3) до нескінченності $\|A(m) - A_1(m)\|_{b(\sigma)} \rightarrow 0$, де $b(\sigma) : \{\|X\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n n^\sigma| = 0\}$. Отже, система (6) допускає єдиний роз-

в'язок, який задовольняє усі необхідні умови і може бути отриманий методом редукції із заданою точністю. Оскільки оператор (4) відповідає статичній границі оператора динамічної задачі, то система (6) допускає за цих умов точний розв'язок. У динамічній задачі оператор (5) обертає аналітично тільки основну частину асимптотики динамічного оператора.

Узагальнення теорії. Система співвісних кінцевих розсіювачів. Запропонований метод [9, 10] дав змогу побудувати математично строгий спосіб розв'язування скалярних задач теорії дифракції на кінцевих розсіювачах, які розміщені співвісно і не утворюють бікінцевих областей $\hat{Q} = \bigcup_{k=1}^{N+1} Q_{2k-1}$ (рис. 1), де $Q_{2k-1} : \{r \in (c_{2k-2}, c_{2k-1}); \theta = \gamma_{2k-1}; \varphi \in [0, 2\pi)\}$, $c_0 \equiv 0$, $c_{2N+1} \equiv \infty$; $c_{n-1} < c_n$.

Скалярні задачі дифракції на кінцевій структурі \hat{Q} зводимо до систем взаємозв'язаних суматорних рівнянь, які містять ряди типу (1). Для виведення цих рівнянь модифікуємо зображення потенціалу поля в областях, обмежених щілинами і кінцевими смужками, враховуючи обмежені розміри областей. Напри-

лад, m -у Фур'є-гармоніку скалярного потенціалу поля в області k -ої щілини подаємо формулою

$$U_m(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^m \frac{(\cos \theta)^n}{z_n^{(m)-1/2}} \left[x_n^{(m;1,2k)} \frac{K_{z_n^{(m)}}(\rho)}{K_{z_n^{(m)}}(\rho_{2k-1})} + x_n^{(m;2,2k)} \frac{I_{z_n^{(m)}}(\rho)}{I_{z_n^{(m)}}(\rho_{2k})} \right]. \quad (7)$$

Користуючись запропонованим методом, цю задачу зводимо до розв'язання нескінченних взаємозв'язаних систем лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_l^{(m)} = & A_{\varepsilon_l}^{-1}(m) [A_{\varepsilon_l}(m) - A_{ll}(m)] \tilde{X}_l^{(m)} - \\ & - \sum_{k \neq l}^{2N} [A_{\varepsilon_l}^{-1}(m) A_{lk}(m)] \tilde{X}_k^{(m)} + A_{\varepsilon_l}^{-1}(m) F_l^{(m)}, \quad l = \overline{1, 2N}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $\{A_{\varepsilon_l}(m), A_{\varepsilon_l}^{-1}(m)\}_{l=1}^N$ – N пар регуляризаційних операторів, визначених у формулах (4), (5) для $\gamma = \gamma_{2k-1}$; $\varepsilon_1 = 1$,

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 3$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 5$.

У системі рівнянь (8) виконано точне обернення головних частин асимптотик діагональних операторів, які за фізичним змістом описують дифракцію хвиль на кожному окремому краю розсіювальної структури, а матричні оператори під знаком суми – взаємодію полів між краями.

Системи рівнянь (8) мають такі ж властивості, як і система (6), а отже, її розв'язки можна отримати з наперед заданою точністю і описати, за ідеальних поверхонь, усі допустимі фізичні ефекти взаємодії скалярних полів зі системою співвісних конічних розсіювачів. Такі поверхні дають змогу моделювати взаємодію хвильових полів зі структурами, які широко використовують у сучасній технічній фізиці. На-

приклад, при $\gamma = \gamma_1 = \dots = \gamma_{2N-1}$ зі структури $\hat{\mathbf{Q}}$ отримуємо дифракційну щільну решітку конічної форми, яку використовують для моделювання необхідного розподілу поля [15]. За допомогою отриманих розв'язків вперше вдалося пояснити особливості проходження електромагнетної енергії крізь отвори в конічних та плоских поверхнях (рис. 2) [9, 10, 14], а також встановити закономірності формування розподілу електромагнетного поля у ближній зоні скінченного конічного рупора і цим пояснити особливості роботи випромінювальних антен у системах надвисокочастотного (НВЧ) діагностування.

Біконічні структури. Запропонований метод поширено для розв'язання задач дифракції на біконічних розсіювачах. Показано, що такі задачі можна звести до суматорних рівнянь, близьких за виглядом до рівнянь (1) [9, 12, 13]. За дифракції осесиметричної електромагнетної хвилі E -поляризації на біконічному розсіювачі $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2$, де $\mathbf{Q}_1 : \{r \in (0, \infty); \gamma_1 \leq \theta \leq \pi; \varphi \in [0, 2\pi)\}$, $\mathbf{Q}_2 : \{r \in (a_1, \infty);$

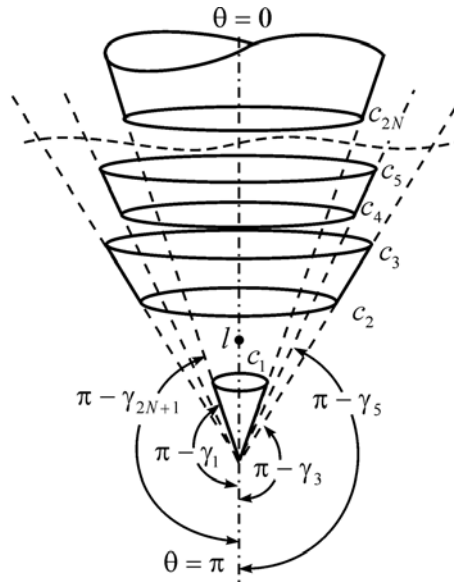


Рис. 1. Геометрична схема задачі.

Fig. 1. Geometry of the problem.

$\theta = \gamma_2; \varphi \in [0, 2\pi)$ – відповідно конічний сектор і зрізаний конус (рис. 3), такі рівняння мають вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [x_n^{(1)} + b_j] P_{z_n-1/2}^1(-\cos \theta) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(3)} \Psi_{\nu_n-1/2}(\theta), & \theta \in (\gamma_1, \gamma_2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(2)} P_{\mu_n-1/2}^1(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma_2, \pi]; \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [x_n^{(1)} \frac{I'_{z_n}(\rho_1)}{I_{z_n}(\rho_1)} + c_j] P_{z_n-1/2}^1(-\cos \theta) =$$

$$\theta \in (\gamma_1, \pi]$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(3)} \Psi_{\nu_n-1/2}(\theta) \frac{K'_{\nu_n}(\rho_1)}{K_{\nu_n}(\rho_1)}, & \theta \in (\gamma_1, \gamma_2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n-1/2}^1(-\cos \theta) x_n^{(2)} \frac{K'_{\mu_n}(\rho_1)}{K_{\mu_n}(\rho_1)}, & \theta \in (\gamma_2, \pi). \end{cases} \quad (9)$$

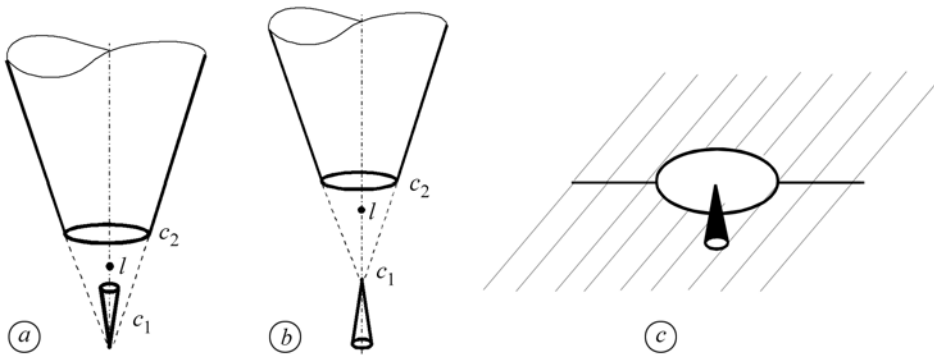


Рис. 2. Варіанти розсіювальних структур.

Fig. 2. Versions of scatterers.

На відміну від рівнянь (1), суматорні рівняння (9) містять власні функції $\Psi_{\nu_n-1/2}(\theta)$ біконічної області [16–18], а також приєднані функції Лежандра з дробовими індексами. Для їх розв’язання, а також суматорних рівнянь для задач дифракції на складніших біконічних структурах [9] розвинуто підхід, який використовували для розв’язання задач дифракції на конусах. Показано, що суматорні рівняння, які містять приєднані функції Лежандра і власні функції біконічних областей, можна звести до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь другого роду виду (6), (8). При цьому регуляризаційні оператори також визначають за формулами (4), (5), а прості нулі і полюси характеристичної функції $M(\nu, \gamma; m)$, на основі якої знаходять оператор (5), відповідають значенням індексів просторових мод поля, що формуються у конічних і біконічних областях.

Розв’язки суматорних рівнянь типу (9) стали основою для розроблення математично строгої теорії дифракції на розгалуженнях нерегулярних хвилеводів (рис. 3a). Вперше за запропонованим підходом отримали математично строгий розв’язок задачі дифракції на несиметричних біконічних вібраторах (рис. 3b) [9] для моделювання широкосмугових антен, а також розв’язок задачі про визначення поля зонда в кругових отворах, що виникає у дефектоскопії.

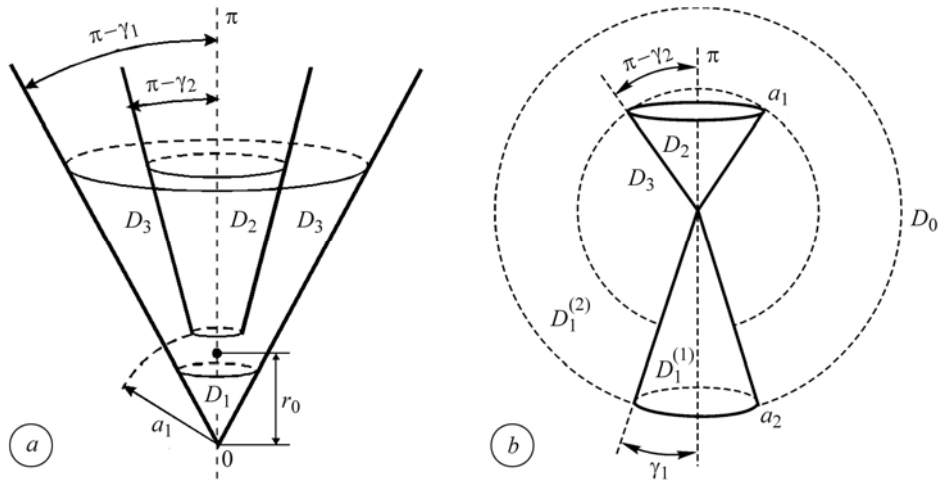


Рис. 3. Біконічні розсіювачі.

Fig. 3. Bi-conical scatterers.

Клиноподібні структури. Розроблений підхід поширено також для задач дифракції на клиноподібних структурах [9, 19–22]. З його допомогою вдалося розв'язати задачу дифракції на скінченному клині, зануреному у діелектричний циліндр, та клині зі скінченною кількістю щілин:

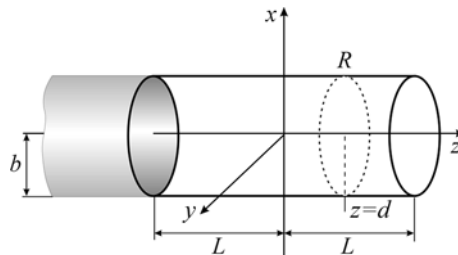
$$\mathbf{K} : \left\{ r \in \bigcup_{j=1}^N (c_{2j-1}, c_{2j}); \varphi = 0, \varphi = 2\gamma; z \in (-\infty, +\infty) \right\},$$

де N – кількість пар ідеально провідних нескінченно тонких стрічок; c_j – радіальні координати країв стрічок, задані у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) . Ці структури є базові для розв'язання задач антенної і резонаторної техніки та дефектоскопії. Задачі дифракції на обмежених клиноподібних структурах аналітико-числовими методами вивчали також у працях [3, 23, 24].

Розвиток методу Вінера–Хопфа для розв'язання задач дифракції електромагнетних хвиль на циліндричних кавернах. Векторні задачі дифракції. Розв'язки задач дифракції електромагнетних хвиль на циліндричних кавернах (рис. 4, 5) використовують для моделювання поля випромінювачів, коли розробляють засоби діагностування плоско-шаруватих діелектричних середовищ у НВЧ діапазоні. Оскільки електромагнетне поле необхідно визначати безпосередньо в апертурі випромінювача у широкому діапазоні зміни частотного параметра, то найбільш адекватним є метод Вінера–Хопфа. Задачі дифракції електромагнетних хвиль на прямокутних кавернах досліджували раніше [25, 26].

Рис. 4. Напівнескінченний циліндр з внутрішньою плоскою перегородкою (R – джерело випромінювання).

Fig. 4. A semi-infinite cylinder with internal plate termination (R – irradiation source).



Цей підхід вперше розвинуто для розв'язання векторних задач теорії дифракції на циліндричних кавернах [27, 28]. Для цього ввели подання Фур'є-перетворень потенціалів векторного поля, які враховують взаємодію електромагнетних хвиль різних поляризацій на краях циліндричної області.

Крайову задачу електродинаміки у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) для каверни $S = S_1 \cup S_2$ (рис. 4), де S_1 – циліндрична поверхня, S_2 – внутрішня дискова перегородка,

$$S_1 = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z \in \left\{ \begin{array}{l} (-\infty, L), \quad \rho = b + 0 \\ (-L, L), \quad \rho = b - 0 \end{array} \right\} \right\},$$

$$S_2 = \{(\rho, \varphi, z) \mid 0 \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = -L\},$$

записуємо так:

$$\begin{pmatrix} \Delta + k^2 & 0 \\ 0 & \Delta + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\rho, z) \\ u_2(\rho, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Крайові умови на зовнішній і внутрішній циліндричних поверхнях $z \in (-\infty, L)$, якщо $\rho = b + 0$, і $z \in (-L, L)$, якщо $\rho = b - 0$, подаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G} [\partial^2 / \partial z^2 + k^2] & 0 \\ \mathfrak{G} m \rho^{-1} \partial / \partial z & \partial / \partial \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а на внутрішній плоскій перегородці $\rho \in (0, b)$, $z = -L$ записуємо так:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G} m \rho^{-1} \partial / \partial z & \partial / \partial \rho \\ \mathfrak{G} m \partial^2 / \partial \rho \partial z & m / \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тут $u_{1(2)}$, $u_{1(2)}^t$ – потенціали відповідно дифрагованого та повного полів; $u_{1(2)}^t = u_{1(2)} + u_{1(2)}^0$, $u_{1(2)}^0$ – потенціали первинного поля; $\mathfrak{G} = i(\omega \epsilon)^{-1}$; m – номер азимутальної моди електромагнетного поля, яке збуджує джерело випромінювання, розміщене всередині каверни; L – глибина каверни; b – радіус циліндра. Каверну S збуджує джерело $e_z^0(\rho = b - 0, z) = \delta(z - d) \sin(m\varphi + \varphi_0)$, де $\delta(z - d)$ – дельта-функція Дірака, e_z^0 – компонента первинного поля.

Фур'є-трансформанти шуканих потенціалів, які враховують взаємодію електромагнетних хвиль різної поляризації на краю циліндричної каверни, мають вигляд

$$U_1(\rho, \alpha) = \begin{cases} i\omega \epsilon E_1^+(b, \alpha) e^{i\alpha L} \frac{K_m(\gamma \rho)}{\gamma^2 K_m(\gamma b)}, & \rho > b, \\ i\omega \epsilon E_1^+(b, \alpha) e^{i\alpha L} \frac{I_m(\gamma \rho)}{\gamma^2 I_m(\gamma b)} + \frac{kZ^{-1}c_1 - \alpha a_1}{i\gamma^2} e^{-i\alpha L} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m + \\ + i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n e^{-i\alpha L}}{\alpha^2 + \gamma_n^2} I_m(i\xi_n \rho / b) - U_1^i(\rho, \alpha), & 0 < \rho < b, \end{cases} \quad (12a)$$

$$U_2(\rho, \alpha) = \begin{cases} \tilde{V}_2^+(\alpha) \frac{K_m(\gamma \rho)}{\gamma(\alpha - k) K_m'(\gamma b)}, & \rho > b, \\ \tilde{V}_2^+(\alpha) \frac{I_m(\gamma \rho)}{\gamma(\alpha - k) I_m'(\gamma b)} + \frac{kZ a_1 - \alpha c_1}{i\gamma^2} e^{-i\alpha L} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n e^{-i\alpha L}}{\alpha^2 + \tilde{\gamma}_n^2} I_m(i\eta_n \rho / b) - U_2^i(\rho, \alpha), & 0 < \rho < b. \end{cases} \quad (12b)$$

Тут $E_1^+(b, \alpha)$, $\tilde{V}_2^+(b, \alpha)$ – невідомі функції, регулярні у верхній півплощині $\tau > -k_2$ ($\alpha = \sigma + i\tau$, $k = k_1 + ik_2$, $k_1, k_2 > 0$); a_1, c_1, g_n, f_n – невідомі сталі; $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ ($\text{Re } \gamma > 0$), $\gamma_n = [(\xi_n/b)^2 - k^2]^{1/2}$, $\tilde{\gamma}_n = [(\eta_n/b)^2 - k^2]^{1/2}$; ξ_n, η_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) – нулі функцій Бесселя $J_m(\cdot)$ і $J'_m(\cdot)$; Z – імпеданс середовища.

Використовуючи подання (12), крайову задачу (10), (11) звели до функціонального рівняння Вінера–Хопфа, яке допускає факторизацію. Ця методика спрощується під час розв'язання скалярних задач теорії дифракції.

Скалярні задачі дифракції на циліндричних кавернах скінченної довжини. Скалярну (осесиметрична) задачу дифракції на циліндричній каверні

$$S = \{(p, \varphi, z) \mid p = b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq L\} \cup \{(p, \varphi, z) \mid 0 \leq p \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = -L\}$$

(рис. 5) формулюємо так [27]:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (13)$$

Крайові умови на циліндричній поверхні $z \in (-L, L)$, якщо $p = b \pm 0$:

$$[\partial^2 / \partial z^2 + k^2] u^t = 0,$$

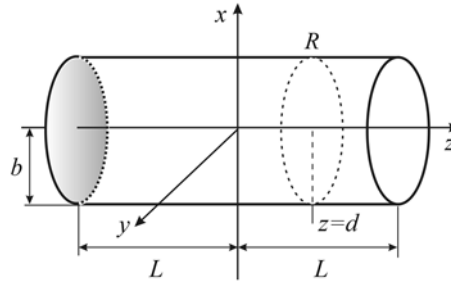
а на внутрішній плоскій перегородці: $p \in (0, b)$ і $z = -L \pm 0$

$$\partial^2 / \partial p \partial z [u^t] = 0, \quad (14)$$

де $u^t = u + u^0$. Каверну збуджує джерело $e_z^0(p = b - 0, z) = \delta(z - d)$.

Рис. 5. Однобічно закритий скінченний циліндр (R – джерело випромінювання).

Fig. 5. An open-ended finite cylinder (R – irradiation source).



Цю задачу зводимо до розв'язування рівняння Вінера–Хопфа, яке у факторизованому вигляді запишемо так:

$$E_-(b, \alpha) + M_-(\alpha) \left[J_E^{(1)}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_+(i\gamma_n) E_-(b, -i\gamma_n)}{i\gamma_n(\alpha - i\gamma_n)} \right] = M_-(\alpha) R_-(\alpha), \quad (15)$$

$$E_+(b, \alpha) - M_+(\alpha) \left[J_E^{(2)}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4\gamma_n L} M_+(i\gamma_n) E_+(b, i\gamma_n)}{i\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \right] = M_+(\alpha) R_+(\alpha). \quad (16)$$

Тут $E_{\pm}(b, \alpha)$ – невідомі функції, а $R_{\pm}(\alpha)$, $M_{\pm}(\alpha)$ – відомі, регулярні у півплощинах $\tau \gtrless \mp k_2$;

$$J_E^{(1,2)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\pm k}^{\pm i\infty \pm k} \frac{e^{\pm 2i\nu L} M_{\pm}(\nu) E_{\pm}(b, \nu)}{\gamma_{\nu}^2 K_0(\gamma_{\nu} b) [K_0(\gamma_{\nu} b) - i\pi I_0(\gamma_{\nu} b)]} \nu - \alpha. \quad (17)$$

Беручи до уваги експоненційну збіжність підінтегральних функцій у формулі (17), запишемо асимптотичну оцінку цього інтеграла для глибоких каверн ($kL \gg 1$) у вигляді

$$J_E^{(1)}(\alpha) \sim \frac{1}{2} e^{2ikL} b^2 \chi(\alpha) M_+(k) E_+(b, k), \quad J_E^{(2)}(\alpha) \sim \frac{1}{2} e^{2ikL} b^2 \chi(-\alpha) M_+(k) E_-(b, -k), \quad (18)$$

$$\text{де } \chi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-2iL}}{[t - i(k - \alpha)] R_0(t)} dt,$$

$$R_0(t) = 2itkb^2 K_0\left(i^{1/2} \sqrt{2ktb^2}\right) \left[K_0\left(i^{1/2} \sqrt{2ktb^2}\right) - i\pi I_0\left(i^{1/2} \sqrt{2ktb^2}\right) \right], \quad (19)$$

$$|\alpha - k| > 0 \quad \text{і} \quad -\pi/2 < \arg(\alpha - k) < 3\pi/2. \quad (20)$$

За умови (20) інтеграл $\chi(\alpha)$ є рівномірно збіжний, оскільки для $t \rightarrow 0$ особливість $R_0^{-1}(t) = O(t^{-1}(\ln t)^{-2})$ інтегровна. З урахуванням формул (18) функціональні рівняння (15), (16) стандартним методом зводимо до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку можна розв'язати з заданою точністю.

Розвиток методу Вінера–Хопфа для задач дифракції пружних хвиль на міжфазних тріщинах. Цим методом розв'язали задачі дифракції пружних SH-хвиль [29–33] на міжфазних тріщинах. Розглянемо задачу дифракції плоскої SH-хвилі на скінченній міжфазній тріщині, яка у декартовій системі координат займає область $\{(x, y, z) | -L < x < 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ і розташована на межі двох жорстко з'єднаних пружних ізотропних середовищ.

Вважатимемо, що тріщину опромінює плоска монохроматична SH-хвиля $u^{inc}(x, y) = e^{-ik_1(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}$ (рис. 6). Верхній ($y > 0$) і нижній ($y < 0$) півпростори характеризуються відповідно густинами ρ_1, ρ_2 та параметрами Ламе μ_1, μ_2 . Хвильові числа для областей $y > 0$ і $y < 0$ задають співвідношення $k_l = \omega \sqrt{\rho_l / \mu_l}$, де $k_l = k_l' + ik_l''$, $k_l', k_l'' > 0$, $k_l' \gg k_l''$, $k_2'' > k_1''$, $l = 1$ – для $y > 0$, $l = 2$ – для $y < 0$.

Дифраговане поле зміщень $u(x, y)$ знаходимо з розв'язку крайової задачі

$$\Delta u + k_l^2 u = 0, \quad (21)$$

$$\mu_1 u_y^t(x, +0) = \mu_2 u_y^t(x, -0) = 0 \quad \text{для } x \in (-L, 0), \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} u^t(x, +0) - u^t(x, -0) &= 0 \\ \mu_1 u_y^t(x, +0) - \mu_2 u_y^t(x, -0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (23)$$

Тут $u^t(x, y) = u(x, y) + u_0(x, y)$, $u_0(x, y)$ – поле, розсіяне бездефектним з'єднанням. Крім того, функція $u(x, y)$ повинна задовольняти умову граничного поглинання на нескінченності та умову Мейкснера біля вершин тріщини. Її розв'язок подаємо у вигляді інтегралів Фур'є:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A_l(\alpha) e^{-\gamma_l |y| - i\alpha x} dx, \quad (24)$$

де $A_l(\alpha)$ – невідомі спектральні густини; $\gamma_l = \sqrt{\alpha^2 - k_l^2} = -i\sqrt{k_l^2 - \alpha^2}$.

Застосовуючи перетворення Фур'є до крайової задачі (21)–(23) і враховуючи подання (24), приходимо до функціонального рівняння Вінера–Хопфа, яке отримуюємо методом Джонса і записуємо так:

$$J_1(\alpha) + \frac{M(\alpha)}{\gamma_1} \left[\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L} \Psi^{-}(\alpha) \right] = 0. \quad (25)$$

Тут $\alpha \in \Pi: (\tau_- < \tau < \tau_+)$, де $\tau = \text{Im} \alpha$,
 $\tau_+ = k_1'' \cos \theta_0$, $\tau_- = -k_1''$, $0 < \theta_0 < \pi/2$;
 $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – невідомі трансформанти Фур'є поля напружень на межі з'єднання поза тріщиною, через які виражені спектральні густини $A_l(\alpha)$. Ці функції регулярні відповідно у півплощинах $\tau < \tau_+$ та $\tau > \tau_-$, за винятком точки $\alpha = k_1 \cos \theta_0$, де $\Psi^{(+)}(\alpha)$ має простий полюс, бо містить відомий сингулярний доданок. В областях регулярності $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$; $J_1(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка є трансформантою Фур'є-стрибка зміщень на берегах тріщини.

Характеристична функція

$$M(\alpha) = (\mu_1 \sqrt{\alpha^2 - k_1^2} + \mu_2 \sqrt{\alpha^2 - k_2^2}) / \mu_2 \sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \quad (26)$$

регулярна у смузі Π і допускає факторизацію у вигляді

$$M(\alpha) = M_+(\alpha) M_-(\alpha), \quad (27)$$

де функції $M_{\pm}(\alpha)$ – регулярні і не мають нулів відповідно у півплощинах $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$, а в областях регулярності $M_{\pm}(\alpha) = O(1)$, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Функціональне рівняння (25), використовуючи метод факторизації, зводимо до системи інтегральних рівнянь другого роду з контурами інтегрування, що проходять паралельно уявній осі уздовж розрізів комплексної площини v , від точок галуження підінтегральних функцій для $v = \pm k_{1(2)}$ до нескінченності. Необхідний лист ріманової поверхні вибираємо з умови $\text{Re} \gamma_{1(2)} > 0$, коли $|v| \rightarrow \infty$. Остаточню:

$$\begin{aligned} & \frac{M_+(\alpha) \Psi^{(+)}(\alpha)}{\sqrt{\alpha + k_1}} + \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{i\infty+k_1} \frac{e^{ivL} \Psi^-(v)}{M_+(v) \sqrt{v - k_1}} \frac{dv}{v + \alpha} + \\ & + \frac{\mu_1}{\pi \mu_2} \int_{k_2}^{i\infty+k_2} \frac{\sqrt{v + k_1} e^{ivL} \Psi^-(v)}{M_+(v) \sqrt{v^2 - k_2^2}} \frac{dv}{v + \alpha} = \tilde{F}_1(\alpha), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_-(\alpha) \Psi^-(\alpha)}{\sqrt{\alpha - k_1}} - \frac{1}{\pi i} \int_{k_1}^{i\infty+k_1} \frac{e^{ivL} \Psi^{(+)}(v)}{M_+(v) \sqrt{v - k_1}} \frac{dv}{v - \alpha} - \\ & - \frac{\mu_1}{\pi i \mu_2} \int_{k_2}^{i\infty+k_2} \frac{e^{ivL} \sqrt{v + k_1} \Psi^{(+)}(v)}{M_+(v) \sqrt{v^2 - k_2^2}} \frac{dv}{v - \alpha} = \tilde{F}_2(\alpha). \end{aligned} \quad (29)$$

Тут $\tilde{F}_1(\alpha)$, $\tilde{F}_2(\alpha)$ – відомі функції.

Інтегральні рівняння (28), (29) розглядаємо у високочастотній області ($k_{1(2)} L \gg 1$). За цієї умови обмежились першими членами розвинення в ряд Тейлора функцій $\Psi^{(+)}(v)$, $M_+(v)$, $\Psi^-(v)$ у точках $v = k_{1(2)}$ і перейшли до таких співвідношень:

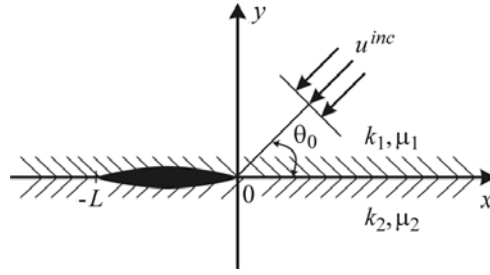


Рис. 6. Опромінення міжфазної тріщини.

Fig. 6. Illumination of the interface crack.

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha + k_1}}{M_+(\alpha)} \left[\tilde{F}_1(\alpha) - \frac{I_{11}(\alpha)}{\pi} \Psi^(-k_1) - \frac{\mu_1 I_{12}(\alpha)}{\pi \mu_2} \Psi^(-k_2) \right], \quad (30)$$

$$\Psi^-(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha - k_1}}{M_-(\alpha)} \left[\tilde{F}_2(\alpha) + \frac{I_{21}(\alpha)}{\pi i} \Psi^{(+)}(k_1) + \frac{\mu_1 I_{22}(\alpha)}{\pi i \mu_2} \Psi^{(+)}(k_2) \right]. \quad (31)$$

Тут

$$I_{mn}(\alpha) = B_{mn} \Gamma_1 \left[1/2, -iL(k_n - (-1)^m \alpha) \right], \quad (32)$$

де $\Gamma_1[\cdot]$ – узагальнена гама-функція [25, 26]; B_{mn} – відомі сталі ($m, n = 1, 2$);

$$\Gamma_j[u, v] = \int_0^\infty \frac{t^{u-1} e^{-t}}{(t+v)^j} dt, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Щоб знайти дифрагзоване поле і коефіцієнти інтенсивності напружень за довільних кутів зондування та спостереження пропонуємо регуляризаційну процедуру обчислення функцій (32) для довільного параметра α , яка коректно враховує особливості в точках $\alpha = \pm k_{1(2)}$. Невідомі величини $\Psi^{(+)}(k_1)$, $\Psi^{(+)}(k_2)$, $\Psi^(-k_1)$, $\Psi^(-k_2)$ у виразах (30), (31) отримали із розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{14} & 1 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{(+)}(k_1) \\ \Psi^{(+)}(k_2) \\ \Psi^(-k_1) \\ \Psi^(-k_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

де $a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, f_1, f_2, f_3, f_4$ – відомі параметри.

Встановлено, що за умови, коли у середовищі є втрати деформаційної енергії ($\text{Im } k_l \neq 0$), наближений розв'язок системи (34) допускає подання у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(k_1) &\approx f_1 - a_{13}f_3 - a_{14}f_4, & \Psi^(-k_1) &\approx f_3 - a_{13}f_2 - a_{14}f_1, \\ \Psi^{(+)}(k_2) &\approx f_2 - a_{23}f_3 - a_{24}f_4, & \Psi^(-k_2) &\approx f_4 - a_{23}f_1 - a_{24}f_2. \end{aligned} \quad (35)$$

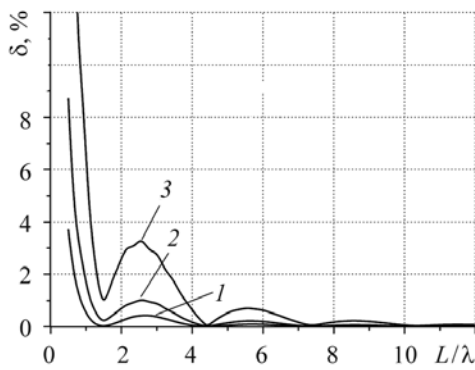


Рис. 7. Оцінка точності розв'язків:
1 – $\theta_0 = 45^\circ$; 2 – 20° ; 3 – 10° .

Fig. 7. Estimation of the solution accuracy:
1 – $\theta_0 = 45^\circ$; 2 – 20° ; 3 – 10° .

Оцінку точності формул (35) ілюструє рис. 7, де побудовано залежність модуля максимальної відносної похибки δ від безрозмірної ширини тріщини за різних кутів зондування з'єднання залізо–цинк ($k_1 = 310 \text{ m}^{-1}(1 + i0,0161)$, $k_2 = 310 \text{ m}^{-1}(1 + i0,0241)$). Як бачимо, коли $L > 4\lambda$ (λ – довжина зондувальної хвилі), то δ не перевищує 1%. Для тріщин рівної ширини формули (35) є тим точніші, що більші уявні частини хвильових чисел.

Співвідношення (30), (31) разом з розв'язками рівняння (34) дають наближений розв'язок рівняння Вінера–

Хопфа (25). Поле зміщень, подане інтегралом (24), у зоні випромінювання ($|k_{1(2)}r| \rightarrow \infty$) знайшли методом перевалу і в полярній системі координат з початком у вершині тріщини ($x = 0, y = 0$) записали так:

$$u(r, \theta) = -\text{sign}\theta \frac{\tilde{K} e^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{k_1 r}} \left[\Psi^{(+)}(-k_l \cos \theta) + \Psi^{-}(-k_l \cos \theta) e^{ik_l L \cos \theta} \right] + u_{lat}(r, \theta), \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (36)$$

Тут $\tilde{K} = \mu_1 / \mu_2$, коли $-\pi < \theta < 0$, і $\tilde{K} = 1$, коли $0 < \theta < \pi$. Доданок $u_{lat}(r, \theta)$ описує вклад бічної хвилі у дифраговане поле і відмінний від нуля у середовищі з меншою швидкістю поширення поперечних хвиль. Для напівнескінченної міжфазної тріщини, яка займає область ($y = 0, -\infty < x < 0$), вираз для бічної хвилі має вигляд

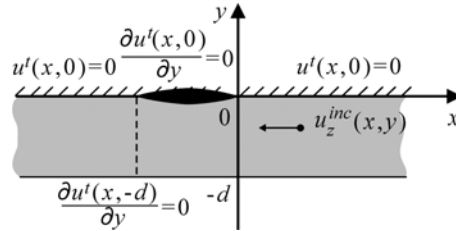
$$u_{lat}(r, \theta) \approx \frac{P}{2\sqrt{2}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{e^{-i\pi/4} \sqrt{k_2 \sin \beta_1} M_+(k_1)}{k_1 (1 + \cos \theta_0)} \frac{e^{ik_2 r \cos(\beta_1 - |\theta|)}}{[k_2 r \sin(\beta_1 - |\theta|)]^{3/2}}, \quad (37)$$

де $|k_2| > |k_1|$, θ_c – критичний кут ($\theta_c = \text{Re} \beta_1$, $\beta_1 = \arccos(k_1 / k_2)$), $0 < \theta_0 < \pi/2$, P – відома величина. Модуль комплексної амплітуди (37) за фіксованих параметрів середовища та умов зондування досягає максимуму, коли $\theta \rightarrow \theta_c$.

Спектральні задачі теорії дифракції. Метод Вінера–Хопфа використали для знаходження дискретного спектра SH-коливань динамічної системи “з’єднання пружної пластини і півпростору з міжфазною тріщиною” (рис. 8).

Рис. 8. З’єднання пружної пластини і півпростору з міжфазною тріщиною.

Fig. 8. Joining of the elastic plate and a semi-space with an interface crack.



Знаходження спектра базується на розв’язанні крайової задачі теорії дифракції:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (38)$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^i)}{\partial y} = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (39)$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^i)}{\partial y} = 0, \quad y = 0; \quad x \in (-L, 0), \quad (40)$$

$$u + u^i = 0, \quad y = 0; \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (41)$$

Тут $u = u(x, y)$ – z -компонента зміщення; $u^i(x, y) = A_j e^{\sqrt{\beta_j^2 - k^2} x} \sin(\beta_j y)$ – збуджувальне поле, $\beta_j = \pi(2j + 1) / 2d$. З урахуванням умов випромінювання і обмеженості енергії поля крайову задачу (38)–(41) методом Вінера–Хопфа звели до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь другого роду:

$$[I + A(k)]X = F, \quad (42)$$

де I – одиничний оператор; $A(k)$ – матриця-функція; F – відомий вектор; X – вектор невідомих комплексних амплітуд нормальних мод. Дискретний спектр задачі визначають з розв’язку рівняння

$$\text{Det}[I + A(k)] = 0. \quad (43)$$

Тут спектральний параметр k входить у дисперсійне рівняння нелінійно.

ВИСНОВКИ

Розроблено ефективний математичний апарат розв'язування задач теорії дифракції на конічних, біконічних та клиноподібних структурах, який базується на точному аналітичному оберненні головних частин асимптотик вихідних динамічних задач, і розвинуто метод Вінера–Хопфа для розв'язання задач дифракції на циліндричних кавернах і міжфазних тріщинах.

РЕЗЮМЕ. Дан обзор работ о развитии методов аналитической регуляризации при решении смешанных краевых задач теории дифракции. Рассмотрены задачи дифракции электромагнитных и акустических волн на фрагментах конических, клинообразных и цилиндрических идеальных поверхностей, а также упругих волн на межфазных трещинах. Для решения этих задач использованы метод частичного обращения оператора и метод Винера–Хопфа.

SUMMARY. Survey of the authors' results in the field of analytical regularization technique development for the solution of a mixed boundary-value diffraction problems is proposed. The problems of electromagnetic and acoustic wave diffraction by the fragments of conical, wedge-like and cylindrical perfect surfaces, as well as elastic wave diffraction by the interface cracks are considered. For the solution of these problems the semi-inversion method and Wiener–Hopf technique are used.

1. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе // Акуст. журн. – 1971. – 17, № 1. – С. 33–42.
2. Гошин Г. Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987. – 127 с.
3. Математические методы в граничных задачах электродинамики / В. П. Беличенко, Г. Г. Гошин, А. Г. Дмитренко и др. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1990. – 170 с.
4. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звуковой волны из полого конечного конуса // Линейные краевые задачи мат. физики. – К.: Наук. думка, 1973. – С. 129–139.
5. Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах. – М.: Физмат, 2009. – 272 с.
6. Куриляк Д. Б. Сумматорные уравнения с присоединенными функциями Лежандра на границе конических и сферической областей и их применение в скалярных задачах теории дифракции // Доп. НАН України. – 2000. – № 10. – С. 70–78.
7. Куриляк Д. Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной. I. Сопоставление метода рядов и метода интегральных преобразований // Радиофизика и радиоастрономия. – 1999. – 4, № 2. – С. 121–128.
8. Куриляк Д. Б. Осесимметричное поле электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной. II. Численное моделирование // Там же. – 2000. – 5, № 3. – С. 284–290.
9. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – К.: Наук. думка, 2006. – 280 с.
10. Kuryliak D. B. and Nazarchuk Z. T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Science, 43, RS4S03, doi: 10.1029/2007RS003792, 2008.
11. Kuryliak D. B. and Nazarchuk Z. T. Dual series equations for the wave diffraction by conical edge // Доп. НАН України. – 2000. – № 11. – С. 103–111.
12. Kuryliak D. B. and Nazarchuk Z. T. Dual series equations for the wave diffraction by conical edge: rigorous solution and approximate technique // Technical Report, Institute of Electronics, Information and Communication Engineers of Japan. – 2000. – 100, № 68. – P. 81–88.
13. Куриляк Д. Б. Розв'язок векторної задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на скінченному конусі // Доп. НАН України. – 2000. – № 2. – С. 91–98.
14. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Возбуждение симметричных электромагнитных колебаний в системе из конечного и усеченного конусов с различными углами раскрытия // Радиофизика и радиоастрономия. – 2002. – 7, № 1. – С. 64–73.
15. Куриляк Д. Б. Симметричное возбуждение конических волноводов со щелями // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1992. – 35, № 3. – С. 3–9.

16. *Куриляк Д. Б.* Решение задачи дифракции на разветвлении конической области // Там же. – 1998. – **41**, № 9. – С. 13–22.
17. *Куриляк Д. Б.* Біконічна лінія з щілинами в осесиметричному електромагнітному полі // Тези доп. сем. “Прямі та обернені задачі теорії електромагнітних та акустичних хвиль”. – Львів; Брюховичі, 1995. – С. 46–47.
18. *Kuryliak D. B. and Nazarchuk Z. T.* One conical waveguide bifurcation problem // Technical Report on Electromagnetic Theory, Institute of Electrical Engineers of Japan. – 1997. – № EMT-97-50. – P. 51–56.
19. *Куриляк Д. Б.* Методы частичного обращения оператора в задачах определения электромагнитных полей клиновидных структур конечной протяженности // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 8. – С. 16–18.
20. *Куриляк Д. Б.* Электромагнитное поле нити синфазного тока в присутствии конечного усеченного клина // Там же. – 1993. – № 4. – С. 10–17.
21. *Куриляк Д. Б.* Векторне рівняння Вінера–Гопфа для однієї змішаної крайової задачі дифракції в клині, розсіченому півплощиною // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 87–92.
22. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т.* Матричные операторы типа свертки в задачах дифракции на клиньях конечной протяженности // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 66–73.
23. *Шербак В. В.* Матричные операторы во внешних задачах дифракции // ДАН СССР. – 1982. – **262**, № 4. – С. 313–316.
24. *Гринченко И. Ю., Мацыгура В. Т.* Рассеяние звука на конечных клиновидных областях // Акуст. вісн. – 2003. – **6**, № 2. – С. 23–33.
25. *Kobayashi K. and Sawai A.* Plane wave diffraction by open-ended parallel plate waveguide cavity // J. Electromagnetic waves and application. – 1992. – **6**, № 4. – P. 475–512.
26. *Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory* / Ed. M. Hashimoto, M. Idemen, O. Tretyakov. – Tokyo: Science House, 1993. – 572 p.
27. *Wiener-Hopf analysis of the axial symmetric wave diffraction problem for a circular waveguide cavity* / D. B. Kuryliak, S. Koshikawa, K. Kobayashi, and Z. T. Nazarchuk // Int. Workshop on Direct and Inverse Wave Scattering. – Gebze (Turkey). – 2000. – P. 2-67–2-81.
28. *Wiener-Hopf analysis of the diffraction by circular waveguide cavities* / D. Kuryliak, K. Kobayashi, S. Koshikawa, and Z. T. Nazarchuk // J. of the Inst. of Sci. and Eng. – Tokyo: Chuo University. March 2004. – **10**. – P. 45–51.
29. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 5–16.
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* Analysis of the Field of a Plane SH-Wave Scattered by a Finite Crack on the Interface of Materials // Materials Science. – 2006. – **42**, № 6. – P. 711–724.)
30. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Поле напружень за опромінення плоскою SH- хвилею тріщини на межі поділу матеріалів // Там же. – 2007. – **43**, № 4. – С. 18–30.
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* Stress Field in a Crack on the Interface of Materials Irradiated with SH-Waves // Materials Science. – 2007. – **43**, № 4. – P. 464–478.)
31. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Дифракція SH-поля зосередженої сили на міжфазній тріщині // Там же. – 2008. – **44**, № 6. – С. 67–77.
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* Diffraction of SH-waves on interface cracks under the action of concentrated forces // Materials Science. – 2008. – **44**, № 6. – P. 815–826.)
32. *Pal S. C. and Chosh M. L.* High frequency scattering of antiplane shear waves by interface crack // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – **21**, № 12. – P. 1107–1124.
33. *Pratanik R., Pal S. C., and Ghosh M. L.* High frequency scattering due to a pair of time-harmonic antiplane forces on the faces of a finite interface crack between dissimilar anisotropic materials // Eur. J. Mech. A/Solids. – 1999. – **18**. – P. 1013–1026.

Одержано 08.04.2011