

О СТОХАСТИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЯХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

О.И. ПАВЛЕНКО, Й.Я. ГОЛДШТЕЙНЕ

Рассмотрены два процесса, заданные с помощью связанных импульсных динамических систем, которые в совокупности являются аналогом авторегрессионной модели с GARCH остатками и марковским процессом вместо «белого шума», а также с переключениями в случайные моменты времени — пуассоновским потоком. При анализе поведения этих процессов комбинируется моделирование решений импульсных динамических систем в пакете MATLAB, усреднение исходных систем, диффузионная аппроксимация нормированных уклонений процессов от решений соответствующих усредненных уравнений, а также моделирование решений диффузионных уравнений в пакете MATHEMATICA.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие эконометрические и финансовые процессы описываются авторегрессионными, ARMA и другими моделями, в которых условная дисперсия ошибок не постоянна и оценивается с помощью GARCH-моделей, предложенных Engle и Bollersley. Методика выбора и оценивания таких моделей хорошо описана, например, в работе [1]. Однако в GARCH-моделях изменения происходят только в детерминированные моменты времени. Простейшие примеры: ежедневные изменения курса валют и различных финансовых индексов (RIGIBID, RIGIBOR, EURIBOR, LIBOR и др.). Хотя очевидно, что во многих случаях временную шкалу удобнее считать непрерывной, а моменты изменений случайными. Логично ввести такое предположение о характере этих случайностей: моменты переключений образуют пуассоновский поток (например, время поступления заявок на выплаты в страховую компанию обычно распределено экспоненциально).

При некоторых дополнительных ограничениях модель можно описать импульсными динамическими системами с марковскими переключениями. Аппарат анализа таких систем достаточно хорошо разработан профессором Е.Ф. Царьковым [2–4] и его учениками [5–7], а также украинскими математиками [4]. Следует упомянуть усреднение, получение условий устойчивости, а также диффузионную аппроксимацию решений импульсных динамических систем и их нормированных уклонений. Используя эту методику, можно получить диффузионные уравнения, к решениям которых сходятся решения исходных импульсных систем.

Специализированные компьютерные программы позволяют получать реализации некоторых диффузионных процессов, а также процессов, описываемых при помощи регрессионных моделей с остатками типа GARCH для проведения дальнейшего анализа их поведения.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим два кусочно-постоянных процесса $x(t)$, $y(t)$ со скачками в случайные моменты времени, одни и те же для обоих процессов. Они образуют пуассоновский поток. Процесс $x(t)$ описывается авторегрессионным уравнением первого порядка, причем $y(t)$ — условная дисперсия ошибки в уравнении для $x(t)$ — описывается уравнением с одним авторегрессионным слагаемым и слагаемым скользящего среднего первого порядка, т.е. моделью типа GARCH с некоторыми дополнительными ограничениями. В отличие от обычных ARMA и GARCH-процессов моменты переключений случайны. Как и в ARMA и GARCH-моделях, предположим, что в интервалах между переключениями $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$ оба процесса ($x(t)$ и $y(t)$) постоянны, т.е. модель задается с помощью двух динамических систем

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 0, & (1) \\ x(t) = A x(t-) + \sigma_t, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = 0, & (3) \\ y(t) = a_0 + a_1 \sigma_{t-}^2 + b y(t-), & (4) \end{cases}$$

связанных соотношением

$$\sigma_t = v_t \sqrt{y_t}. \quad (5)$$

По аналогии с обычной GARCH-моделью, где v_t — белый шум со средним 0 и дисперсией, равной 1, примем, что $E v_t = 0$, $E v_t^2 = 1$. Тогда безусловное и условное среднее ошибки уравнения (2) равно нулю.

$$E \sigma_t = E_{t-} \sigma_t = 0.$$

Условная дисперсия $D_{t-} x(t) = E_{t-} \sigma_t^2 = y_t$ не постоянна, а является процессом GARCH(1,1), заданным формулой (4). Согласно условию стационарности все коэффициенты уравнения (4) должны быть положительны и $a_1 + b < 1$. Уравнение (4) перепишем в виде

$$y(t) = a_0 + (a_1 v_{t-}^2 + b) y(t-).$$

Введем дополнительное ограничение: v_t может принимать только два значения. В дальнейшем результаты нетрудно будет обобщить на конечное число значений.

Будем считать v_t марковским процессом. Пусть его инфинитезимальная матрица имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ q_2 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда нетрудно найти инвариантную меру

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2\} = \left\{ \frac{q_2}{q_1 + q_2}; \frac{q_1}{q_1 + q_2} \right\}$$

и значения самого процесса выразить через параметры инфинитезимальной матрицы

$$v_t = \begin{cases} \sqrt{q_1/q_2} & \text{с вероятностью } \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \\ -\sqrt{q_2/q_1} & \text{с вероятностью } \frac{q_1}{q_1 + q_2}. \end{cases}$$

Чтобы представить случайные решения процессов $x(t)$, $y(t)$, смоделируем их в пакете MATLAB для следующих значений параметров (рис. 1 и 2):

$$b = 0,1; a_0 = 0,1; a_1 = 0,75; q_1 = 0,6; q_2 = 0,3; A = 0,9.$$

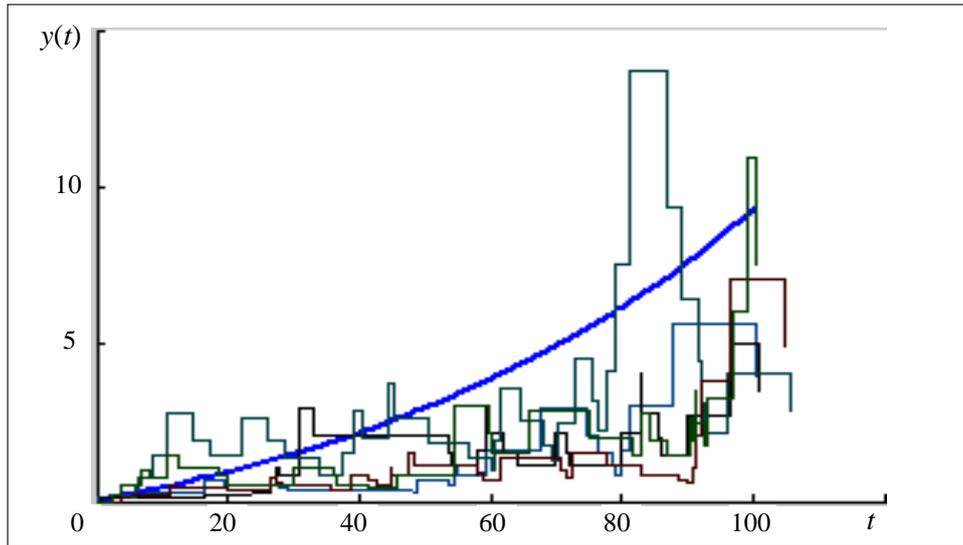


Рис. 1. Пять случайных реализаций процесса $y(t)$ и решение усредненного уравнения для $y(t)$

ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Добавим малый положительный параметр ε в уравнения (1)–(4). Перейдем к процессу $z(t) = \varepsilon x(t)$. Пусть A имеет форму $A = 1 + \varepsilon A_1$. Необходимо потребовать $A_1 < 0$, чтобы в уравнении (2) не было единичного корня. Предположим, что коэффициенты a_0 , a_1 малы, а b близко к 1 (однако меньше 1, чтобы не было единичного корня), т.е. $a_0 = \varepsilon \alpha_0$, $a_1 = \varepsilon \alpha_1$, $b - 1 = \varepsilon \beta$ ($\beta < 0$).

Со всеми этими предположениями наша система переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = 0, & (6) \\ z(t) = z(t-) + \varepsilon g_1(z(t-), y(t-))v(t), & (7) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 0, & (8) \\ y(t) = y(t-) + \varepsilon g_2(y(t-), v_t), & (9) \end{cases}$$

где

$$g_1(z(t-), y(t-), v(t)) = A_1 z(t-) + v(t)\sqrt{y(t-)},$$

$$g_2(y(t-), v(t)) = \alpha_0 + (\alpha_1 v_{t-}^2 + \beta)y(t-).$$

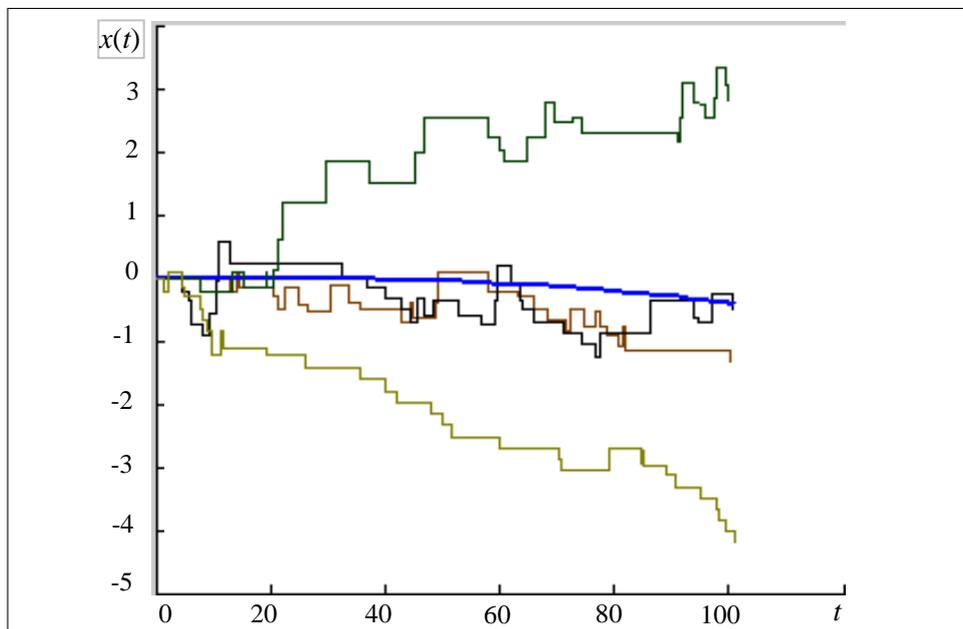


Рис. 2. Четыре случайных реализации процесса $x(t)$ и решение усредненного уравнения для $x(t)$

Мы видим, что система уравнений (8), (9) явно не зависит от z . Значит, сначала будем анализировать решение (8), (9), а затем (6), (7).

УСРЕДНЕНИЕ

Для обеих систем справедлив принцип усреднения [2], т.е. можем выписать усредненные уравнения, к решениям которых стремятся решения систем (6), (7) и (8), (9) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Усредненное уравнение для (8), (9) имеет вид

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{F}_2(\bar{y}),$$

$$\bar{F}_2(y) = \int_Y a(v)g_2(y, v)\mu(dv),$$
(10)

где $a(v) = \{q_1, q_2\}$ — интенсивности перехода для марковского процесса v_t , принимающего два значения; Y — область определения v_t , $Y = \left\{ \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}, -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right\}$.

После интегрирования получаем

$$\bar{F}_2(y) = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(2\alpha_0 + 2\beta y + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} y \right).$$

Тогда решение уравнения (10) имеет вид

$$\bar{y}(t) = (y_0 + k)e^{at} - k,$$

где y_0 — начальное значение $y_0 = y(0)$;

$$a = \left(2\beta + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \right) \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2}; \quad (11)$$

$$k = 2\alpha_0 \left(2\beta + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \right)^{-1}. \quad (12)$$

А теперь сравним решение усредненного уравнения, построенное в пакете MATLAB со смоделированными случайными решениями исходного процесса.

Мы видим, что оно только приближенно описывает динамику поведения процессов. Необходим дальнейший анализ.

Аналогично может быть получено усредненное уравнение системы (6), (7).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}(t)}{dt} &= \bar{F}_1(\bar{z}), \\ \bar{F}_1(\bar{z}) &= \int_Y a(v) \int_Y g_1(y, v, \tilde{v}) P(v, d\tilde{v}) \mu(dv). \end{aligned} \quad (13)$$

После интегрирования получаем

$$\bar{F}_1(z, y) = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(2A_1 z - \sqrt{y} \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{q_1 q_2}} \right).$$

Уравнение (13) тоже может быть решено, хотя решение будет более сложным образом зависеть от значений параметров. Логично предположить, что в начальный момент условная дисперсия ошибки равна нулю. Тогда получаем следующее решение уравнения (13):

$$\bar{z}(t) = z_0 e^{at} + \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{q_1 q_2}} \frac{\sqrt{k}}{2A_1} \left[\sqrt{e^{at} - 1} + e^{at} \arctg \left(\sqrt{e^{at} - 1} \right) \right],$$

где z_0 — начальное значение $z_0 = z(0)$; a и k заданы формулами (11), (12). Действительное решение существует только при положительных значениях a . Для выбранных ранее значений параметров это выполнено.

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Диффузионная аппроксимация для систем вида (8), (9) (импульсная система с марковскими переключениями) доказана в работах Е.Ф. Царькова. Для системы с упреждающими марковскими переключениями (системы вида (6), (7)) диффузионная аппроксимация получена в работе [7].

Теорема (о диффузионной аппроксимации) Если выполнены все описанные выше предположения, в том числе правая часть усредненного уравнения тождественно равна нулю, тогда решение системы (6), (7) $z(t)$ слабо сходится, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, к диффузионному процессу $\tilde{Z}(t)$, являющемуся решением уравнения

$$d\tilde{Z}(t) = b_1(\tilde{Z})dt + \sigma_1(\tilde{Z})dw_1(t),$$

$$b_1(Z) = \int_Y G_1 \{D_Z \Pi[F_1(Z, Y, \nu)]\} \mu(d\nu),$$

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2(Z) = \int_Y \frac{a(\nu)}{2} \int_Y g_1^2(Z, Y, \nu, \tilde{\nu}) P(\nu, d\tilde{\nu}) \mu(d\nu) + \int_Y G_1 \{\Pi[F_1(Z, Y, \nu)]\} \mu(d\nu),$$

где

$$F_1(Z, Y, \nu) = a(\nu) \int_Y g(Z, Y, \tilde{\nu}) P(\nu, d\tilde{\nu}); \Pi — потенциал;$$

$$G_1 u(Z, Y, \nu) = a(\nu) \int_Y g(Z, Y, \nu, \tilde{\nu}) u(Z, Y, \nu, \tilde{\nu}) P(\nu, d\tilde{\nu}).$$

Так как правые части наших усредненных уравнений в общем случае тождественно не равны нулю, то мы не можем прямо использовать диффузионную аппроксимацию.

Перейдем к нормированным отклонениям решений систем (6), (7) и (8), (9) от решений соответствующих усредненных уравнений.

$$\tilde{y}(t) = \frac{y(t) - \bar{y}(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{z}(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Применим диффузионную аппроксимацию к импульсной системе уравнений, описывающей нормированные отклонения процесса $y(t)$. Получим диффузионное уравнение вида

$$d\tilde{Y}(t) = b_2(\tilde{Y})dt + \sigma_2(\tilde{Y}, \bar{y})dw_2(t),$$

где

$$b_2(y) = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left[\frac{q_2}{q_1 + q_2} \left(\alpha_1 \frac{q_2}{q_1} + \beta \right) \left(\alpha_0 + \left(\alpha_1 \frac{q_1}{q_2} + \beta \right) y + y - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{q_1}{q_1 + q_2} \left(\alpha_1 \frac{q_1}{q_2} + \beta \right) \left(\alpha_0 + \left(\alpha_1 \frac{q_2}{q_1} + \beta \right) y + y - 1 \right) \right],$$

$$\frac{\sigma_2^2(y)}{2} = \frac{q_1 q_2}{2(q_1 + q_2)} \left(2\alpha_0 + 2\beta y + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} y \right) \times$$

$$\times \left[\left(2\alpha_0 + 2\beta y + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} y \right) - \frac{2q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(2\alpha_0 + 2\beta \bar{y} + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \bar{y} \right) \right],$$

где \bar{y} — решение усредненного уравнения (10) (функция от t).

Конечно, бóльший интерес представляет диффузионная аппроксимация самой импульсной системы, а не нормированных уклонений. Приведем диффузионную аппроксимирующую частного вида импульсных систем, для которых это возможно. Правые части дифференциальных уравнений этих систем не равны нулю, а подобраны так, чтобы в усредненных уравнениях они были тождественно равны нулю.

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = -\bar{F}_1(z, \bar{y}), & (14) \\ z(t) = z(t-) + \varepsilon g_1(z(t-), y(t-), v(t)), & (15) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\bar{F}_2(\bar{y}), & (16) \\ y(t) = y(t-) + \varepsilon g_2(y(t-), v_t). & (17) \end{cases}$$

Тогда решение системы (14), (15) сходится к решению следующего однородного диффузионного уравнения:

$$d\tilde{Y}(t) = b_2(\tilde{Y})dt + \sigma_2(\tilde{Y})dw_2(t),$$

где

$$b_2(y) = B_1 + B_2 y,$$

$$B_1 = \frac{q_1 q_2 \alpha_0}{(q_1 + q_2)^2} \left(\frac{-2q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(2\beta + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \right) + \beta(q_1 + q_2) + \alpha_1 \left(\frac{q_1^2}{q_2} + \frac{q_2^2}{q_1} \right) \right),$$

$$B_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 + q_2)^2} \left(2 \left(\alpha_1 \frac{q_1}{q_2} + \beta \right) \left(\alpha_1 \frac{q_2}{q_1} + \beta \right) - \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(2\beta + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \right)^2 \right);$$

$$\sigma_2(y) = S_1 + S_2 y,$$

$$S_1 = 2\alpha_0 \sqrt{\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(1 - \frac{2q_1 q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right)},$$

$$S_2 = \left(2\beta + \alpha_1 \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \right) \sqrt{\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \left(1 - \frac{2q_1 q_2}{(q_1 + q_2)^2} \right)}.$$

Теперь возможны моделирование решения уравнения (18) в пакете МАТНЕМАТИСА и анализ поведения решения при разных значениях параметров.

Реализации диффузионного процесса, к которому сходится решение измененной системы (16), (17), где $y(t)$ может принимать отрицательные значения, показаны на рис. 3.

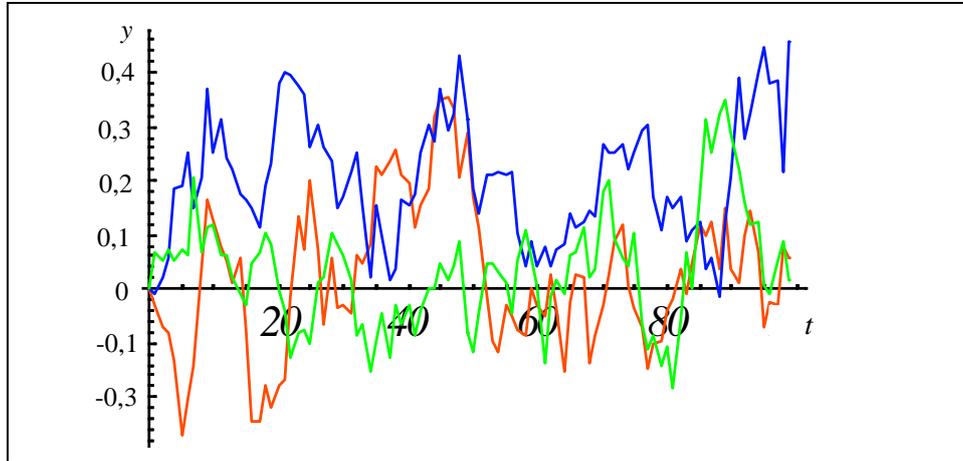


Рис. 3. Три случайных реализации решения диффузионного уравнения (18) для процесса $y(t)$

Диффузионное уравнение для процесса $\tilde{Z}(t)$, к которому сходится решение системы (14), (15), получается неоднородным, его коэффициенты зависят не только от $\tilde{Z}(t)$, но и от $\tilde{Y}(t)$ (диффузионного процесса, удовлетворяющего уравнению (18)).

$$d\tilde{Z}(t) = b_2(\tilde{Z}, \tilde{Y})dt + \sigma_2(\tilde{Z}, \tilde{Y})dw_2(t),$$

$$b_2(z, y) = B_1(y) + B_2z,$$

$$B_1(y) = \frac{\sqrt{q_1 q_2} (q_1 - q_2) (q_1^2 + q_2^2) A_1}{(q_1 + q_2)^3} \sqrt{y};$$

$$B_2 = \frac{q_1 q_2 (q_1 - q_2)^2 A_1^2}{(q_1 + q_2)^3},$$

$$\sigma_2(z, y) = S_1(y) + S_2z,$$

$$S_1(y) = \sqrt{y} \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{q_1 q_2}} \sqrt{\frac{q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2)}{(q_1 + q_2)^3}},$$

$$S_2 = 2A_1 \sqrt{\frac{q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2)}{(q_1 + q_2)^3}}.$$

К сожалению, пакет МАТНЕМАТИСА не позволяет моделировать решения неоднородных диффузионных уравнений.

ПРИМЕР

Интересный пример может быть получен, если предположить, что параметры инфинитезимальной матрицы равны, т.е. $q_1 = q_2 = q$: $Q = \begin{pmatrix} -q & q \\ q & -q \end{pmatrix}$. Тогда диффузионные уравнения значительно упрощаются. Они теряют неоднородность и становятся независимыми.

$$d\tilde{Z}(t) = A_1 \tilde{Z} \sqrt{q} dw_1(t),$$

$$d\tilde{Y}(t) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)^2(1 - q)\tilde{Y}dt + (\alpha_0\sqrt{q} + (\alpha_1 + \beta)\sqrt{q}\tilde{Y})dw_2(t).$$

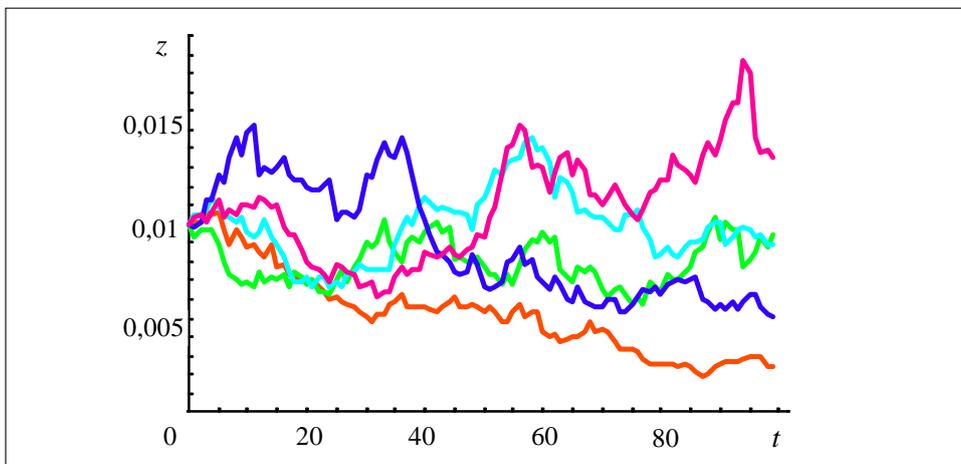


Рис. 4. Пять симуляций диффузионного процесса $\tilde{Z}(t)$

Их решения могут быть проанализированы с помощью пакета МАТНЕМАТИСА. На рис. 4 и 5 показано по пять симуляций диффузионных процессов (\tilde{Z} и \tilde{Y}) при $q = 0,4$; $A_1 = -0,1$; $\beta = -0,9$.

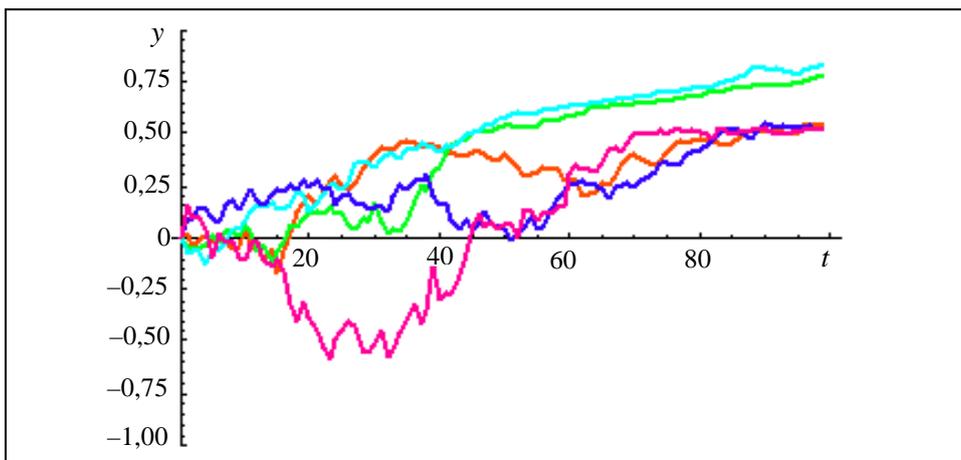


Рис. 5. Пять симуляций диффузионного процесса $\tilde{Y}(t)$

Анализируя большое количество реализаций процессов \tilde{Z} и \tilde{Y} на значительно большем интервале времени, приходим к выводу, что при данных параметрах процесс \tilde{Y} имеет тенденцию к незначительному возрастанию, а значения процесса \tilde{Z} со временем убывают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, перейдя к системе уравнений с малым параметром (6), (9), мы свели анализ решений полученной системы к анализу решений диффузионных уравнений, к которым сходятся нормированные отклонения решений систем (6)–(9) от решений усредненных уравнений (10), (13).

Кроме того, рассмотрен случай, когда возможна диффузионная аппроксимация самой импульсной системы, а не ее нормированных отклонений. Смоделировать реализации в этом случае удалось только при дополнительных предположениях (см. пример).

В общем же случае диффузионное уравнение для процесса $z(t)$ не является однородным. Используемая для получения реализаций диффузионных уравнений программа MATHEMATICA и дополнительные пакеты к ней, созданные для диффузионного анализа, не позволяют это сделать для процесса $z(t)$. Необходим переход к совершенно другому специализированному программному обеспечению, которое пока не найдено.

Анализировать решения полученных диффузионных уравнений намного легче, чем случайные решения исходных импульсных систем, полученные в MATLAB. Как дальнейшее направление работы можно рассматривать анализ введенных ограничений и отказ от некоторых из них. Например, отказ от ограничения, когда марковский процесс может принимать только два значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Enders Walter*. RATS Handbook for Econometric Time Series. — USA: John Wiley & Sons, Inc. 1996. — 204 p.
2. *Tsarkov Ye*. Asymptotic methods for stability analysis of Markov impulse dynamical systems // *Advances of Stability Theory of the End of XXth Century. Stability and Control: Theory, Methods and Applications* // Gordon and Breach Science Publishers, London. — 2000. — № 13. — P. 251–264.
3. *Tsarkov Ye*. Asymptotic methods for stability analysis Markov impulse dynamical systems // *Nonlinear dynamics and system theory*. — 2002. — 2, № 1. — P. 103–115.
4. *Swerdan M., Tsarkov Ye*. Stability of Stochastic Impulse Systems. — Riga: RTU, 1994. — 300 p.
5. *Carkovs J., Pola A*. A simple proof of averaging principle for random dynamical systems // *Proceedings of 1th International Conference APLIMAT 2002*. — Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia. — P. 109–114.
6. *Matvejevs An., Pavlenko O*. Diffusion approximation of normalised deviations of an impulse system describing the dynamics of insurance company capital // *Proceedings of the Latvian academy of sciences. Part B: Natural sciences*. — 2000. — 54, № 3. — P. 53–57.
7. *Pavlenko O*. Limit Theorems and Stability of Impulse System with Look-Ahead Markov Switching. — Riga: Doctor Thesis, 2001. — 108 p.

Поступила 20.07.2006