

УДК 678:539.376

**Дырда В.И.**, д-р техн. наук, профессор  
(ИГТМ НАН Украины),  
**Гребенюк С.Н.**, д-р техн. наук,  
**Решевская Е.С.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЗНУ),  
**Сокол С.П.**, канд. техн. наук, доцент  
(ДГАЭУ)  
**Новикова А.В.**, магистр  
(ИГТМ НАН Украины)

### **СЖАТИЕ ТОНКОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ\***

**Дирда В.І.**, д-р техн. наук, професор  
(ІГТМ НАН України),  
**Гребенюк С.М.**, д-р техн. наук,  
**Решевська К.С.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЗНУ),  
**Сокол С.П.**, канд. техн. наук  
(ДДАЕУ),  
**Новікова А.В.**, магістр, мол. наук. співр.  
(ІГТМ НАН України)

### **СТИСК ТОНКОШАРОВИХ ГУМОМЕТАЛЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**Dyrda V.I.**, D. Sc. (Tech.), Professor  
(IGTM NAS of Ukraine),  
**Grebennyuk S.N.**, D. Sc. (Tech.),  
**Reshevskaya K.S.**, Ph. D. (Tech.), Associate Professor  
(ZNU),  
**Sokol S.P.**, Ph. D. (Tech.)  
(DSAEU),  
**Novikova A.V.**, M.S. (Tech.)  
(IGTM NAS of Ukraine)

### **COMPRESSION OF THIN LAYER RUBBER-METAL ELEMENTS**

**Аннотация.** Исследуются тонкослойные резинометаллические элементы, содержащие чередующиеся слои эластомера и металлические армирующие тарели. Подобные элементы применяются в тяжело нагруженных устройствах с целью обеспечения точной фиксации конструкции в одном направлении при свободе перемещений в других. Сжимающие нагрузки, допускаемые для тонкослойных элементов, достигают 100 МПа.

В статье проводится численный расчёт величины сжатия тонкого эластомерного слоя под действием вертикально приложенного усилия с применением моментной схемы конечного элемента, учитывающей специфические свойства эластомеров. Приводится также сравнение расчётов, полученных аналитически В.Л. Бидерманом с учётом упрощений, моделирующих поведение элементов, полученными численными методами, – моментной схемой конечного элемента. Моментная схема заключается в разложении в ряд полей перемещений, компонент деформаций, функции изменения объёма и удержании определённого количества слагаемых

\* © Дырда В.И., Гребенюк С.Н., Решевская Е.С., Сокол С.П., Новикова А.В., 2017

согласно определённым правилам. Полученные численные решения сравниваются с известными аналитическими, полученными с учётом упрощений, моделирующих поведение элементов, толщина которых в десятки и сотни раз меньше размеров элементов в плане. Упрощения заключаются в ограничениях на перемещения по осям, совмещённым со срединной плоскостью резинового слоя. Снятие ограничений позволило получить расчёт трёхмерного напряжённо-деформированного состояния при различных значениях размеров элементов. Проведен пространственный расчёт тонкослойного резинометаллического элемента в виде шайбы для различных значений соотношения радиус-толщина.

**Ключевые слова:** тонкослойный резиновый элемент, моментная схема конечного элемента, численные решения, расчёт трёхмерного напряжённо-деформированного состояния

Тонкослойные резинометаллические элементы (ТРМЭ) нашли широкое применение в различных областях современного машиностроения в качестве упругих шарниров лопастей вертолётов, опоры рулевых устройств, подвижных опор мостов и т.п.

ТРМЭ – это упругий элемент из чередующихся тонких эластомерных слоёв и металла, собранный в пакет из двух и более слоёв, имеющий повышенную нагрузочную способность (более 30 МПа) в нормальном к слою направлении и высшую податливость (50...200 % относительной деформации) в поперечном направлении. Благодаря этим свойствам ТРМЭ используются в тяжелонагруженных устройствах, для обеспечения точной фиксации конструкции в одном направлении при свободе перемещений в других.

При расчёте напряжённо-деформированного состояния ТРМЭ необходимо учитывать ряд специфических свойств резины, в том числе и их несжимаемость. В работе [1] с целью обхода математических сложностей, связанных с данной спецификой резиновых материалов используется модификация метода конечных элементов – моментная схема конечного элемента для слабосжимаемых материалов.

Моментная схема конечного элемента основана на введении тройной аппроксимации: полей перемещений, деформаций и функции изменения объёма [1]. Причём порядок разложения деформаций и функции изменения объёма выбирается с таким расчётом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жёсткие смещения и эффект «ложного сдвига», и все компоненты функции изменения объёма, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Вывод матрицы жёсткости трёхмерного конечного элемента основывается на вариации упругой энергии деформации:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (1)$$

где  $\sigma^{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $V$  – заданный объём.

Учитывая закон Гука в форме

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}, \quad (2)$$

где  $\mu, \lambda$  – коэффициенты Ляме;  $g^{ik}, g^{jl}, g^{ij}$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $\theta = \varepsilon_{ii}$  – функция объёмного сжатия,

$$\text{имеем} \quad \delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3)$$

$$\text{или} \quad \delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta \theta) dV. \quad (4)$$

Для построения матрицы жёсткости конечного элемента внутри конечного элемента проводится тройная аппроксимация: полей перемещений  $u_{k'}$ , компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и функции изменения объёма  $\theta$ .

Аппроксимация перемещений имеет вид

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (5)$$

где  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;  $\psi^{(pqr)}$  – набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p!q!r!}, \quad (6)$$

где  $p = 0, 1, 2, 3$ ;  $q = 0, 1, 2, 3$ ;  $r = 0, 1, 2, 3$  – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим направлениям.

Компоненты тензора деформаций аппроксимируются путём разложения компонент  $\varepsilon_{ij}$  в ряд Маклорена в окрестности начала координат

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (7)$$

где  $\{\psi_{ij}\}$  – степенные координатные функции, а коэффициенты  $e_{ij}$  записываются следующим образом в матричной форме

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (8)$$

Аппроксимация функции изменения объёма записывается следующим образом

$$\theta = \sum_{a=0}^0 \sum_{b=0}^0 \sum_{c=0}^2 \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (9)$$

где  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  – коэффициенты разложения, которые находятся из соотношения

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\alpha (\partial x_2)^\beta (\partial x_3)^\gamma} \Bigg|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (10)$$

В матричной форме выражения (9) и (10) имеют вид

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (11)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (12)$$

В результате выражение для вариации упругой энергии деформации выглядит так

$$\delta W = \delta \{ \omega_{s'} \}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{ \omega_t \} + \delta \{ \omega_{s'} \}^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{(\theta)}] [F_{\theta}^t] \{ \omega_t \}, \quad (13)$$

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{ \psi_{ij} \} \{ \psi_{kl} \}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

$$[H^{\theta}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{ \psi_{\theta} \} \{ \psi_{\theta} \}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Представляя в матричном виде коэффициенты разложения перемещений и перемещениями

$$\{ \omega_{k'} \} = [A] \{ u_{k'} \}, \quad (14)$$

либо связь между функциями формы и степенными функциями в виде

$$\{ N \} = [A]^T \{ \psi \}, \quad (15)$$

где  $[A]$  – матрица преобразования, подлежащая определению для конкретного вида аппроксимирующих функций.

Подставляя (14) в (13), имеем

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \{ u_{s'} \}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] [A] \{ u_{t'} \} + \\ &+ \delta \{ u_{s'} \}^T [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^t] [A] \{ u_{t'} \} = \\ &= \delta \{ u_{s'} \} [G^{s't'}] \{ u_{t'} \} + \delta \{ u_{s'} \} [G_{\theta}^{s't'}] \{ u_{t'} \}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $[G^{s't'}]$  и  $[G_{\theta}^{s't'}]$  – матрицы, определяемые выражениями

$$[G^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] [A]; \quad [G_{\theta}^{s't'}] = [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^t] [A]. \quad (17)$$

Матрица жёсткости КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] [A] + [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^t] [A]. \quad (18)$$

Таким образом, для конкретных видов КЭ и аппроксимирующих полиномов для получения матрицы жёсткости необходимо построение специальных матриц  $[F_{ij}^s]$ ,  $[F_{\theta}^s]$ ,  $[A]$ .

Целью данной работы является проведение численного расчёта величины сжатия тонкого эластомерного слоя под действием вертикально приложенного усилия. А также сравнение расчётов, полученных аналитически в работе [2] с учётом упрощений, моделирующих поведение элементов, толщина которых в десятки и сотни раз меньше размеров элементов в плане, с результатами, полученными численным методом – моментной схемой конечного элемента.

**Постановка задачи.** Основным элементом резинометаллического пакета является слой резины, высотой  $h$ , заключённый между двумя металлическими

пластинами, имеющими форму шайбы (рис. 1). Нижняя пластина закреплена неподвижно на горизонтальном основании, а на верхнюю пластину действует вертикально направленная сила.

Под действием силы  $P$  резиновый элемент сжимается на величину  $S$ .

Совместим плоскость  $x, y$  декартовой системы координат со срединной плоскостью резинового слоя. Компоненты перемещения по направлениям  $x, y, z$  обозначим через  $u, v, w$  соответственно.

Перемещения  $u$  и  $v$  являются быстроизменяющимися функциями координаты  $z$  и медленно меняющимися в зависимости от  $x$  и  $y$ . Перемещение  $w$  либо не зависит от  $x$  и  $y$ , либо меняется по этим координатам медленно.

В работе [2] предлагается пренебречь рядом слагаемых в соотношениях Коши для сдвиговых деформаций и считать, что деформация  $\gamma_{xy}$  мала по сравнению с  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ . Учитывая данные допущения, при расчётах учитывались лишь деформации  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ , которые вычислялись по формулам:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (19)$$

Соответственно для напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , были приняты зависимости:

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (20)$$

Напряжение  $\tau_{xy}$  также не учитывается при дальнейших расчётах.

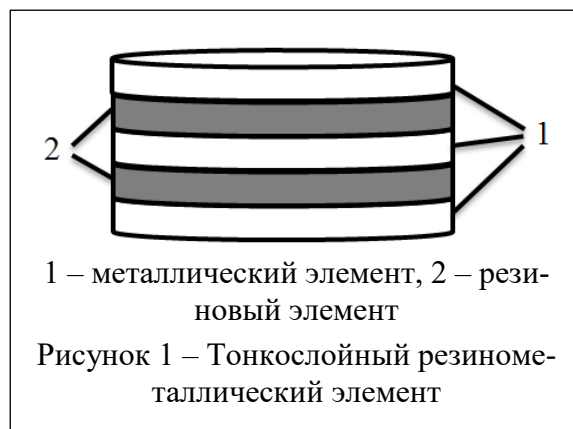
В результате выведено соотношение зависимости осадки резины от величины нагрузки [2]

$$S = \frac{2}{3} \frac{h^3}{G\pi R^4} P, \quad (21)$$

где  $S$  – осадка;  $G$  – модуль сдвига;  $h$  – толщина шайбы;  $R$  – радиус шайбы;  $P$  – нагрузка.

Таблица 1

$G$ , МПа	$P$ , МПа	$R/h = 2 \dots 6$	Осадка по формуле (21), м	Осадка по МСКЭ, м	Относительная погрешность, %	Осадка по МСКЭ в трёхмерной постановке, м
1,79	3	4	0,0278	0,02608	6,59	0,02019
	4		0,037066	0,03478	6,57	0,02691
	5		0,046333	0,04345	6,63	0,03365
	6		0,055599	0,05217	6,57	0,04038
	7		0,064866	0,06085	6,60	0,04711
	8		0,074132	0,06957	6,56	0,05384
	9		0,083399	0,07827	6,55	0,06056
	10		0,092665	0,0869	6,63	0,06729



Область применения формулы ограничена условием  $R/h = 2 \dots 6$  (меньшие значения соответствуют жёстким резинам) с допустимой погрешностью 10%, в связи с этим были выбраны размерные соотношения шайбы в данном диапазоне и рассчитаны величины осадки при различных значениях величины нагрузки по формуле (21).

Также проведены расчёты значений величины осадки с применением численного метода – МСКЭ [1] с учетом жёсткого закрепления по контуру шайбы и без него.

Результаты расчётов при  $R = 0,2$  м,  $h = 0,05$  м и нагрузке в диапазоне от 3 до 10 МПа представлены в таблице 1.

Сравнение полученных результатов показывает небольшие значения относительной погрешности (порядка 6%) относительно аналитического решения, полученного в [2]. Снятие ограничения на перемещения по осям  $x$  и  $y$ , т.е. расчёт по соотношениям трёхмерной теории упругости приводит к осадкам на 37-38 % меньше, чем при учёте ограничивающих гипотез. Однако, применение МСКЭ позволяет исследовать объёмные деформации, возникающие в ТРМЭ.

На рис. 2 показаны тоновые модели распределения объёмных деформаций, возникающих в «шайбе» под действием нагрузки, приложенной вертикально.

Изменение величины размерного соотношения  $R/h$  влияет на жёсткость пластины из несжимаемого материала. На рис. 3 и рис. 4 показана зависимость величины прогиба и максимального касательного напряжения от величины  $R/h$  при нагрузке равной 10 МПа.

Таким образом, в работе проведено сравнение величин перемещений при вертикальной нагрузке, полученных из соотношений, выведенных в [2] в двумерной постановке  $\left(\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0\right)$  со значениями полученными на основе МСКЭ. Сравнительный анализ результатов показал незначительные расхождения в значениях (6 %), полученных с применением обоих методов. Применение численного метода МСКЭ без учёта упрощений, предложенных в [2], позволяет проводить расчёт без ограничений на значение  $R/h$  в трёхмерной постановке и

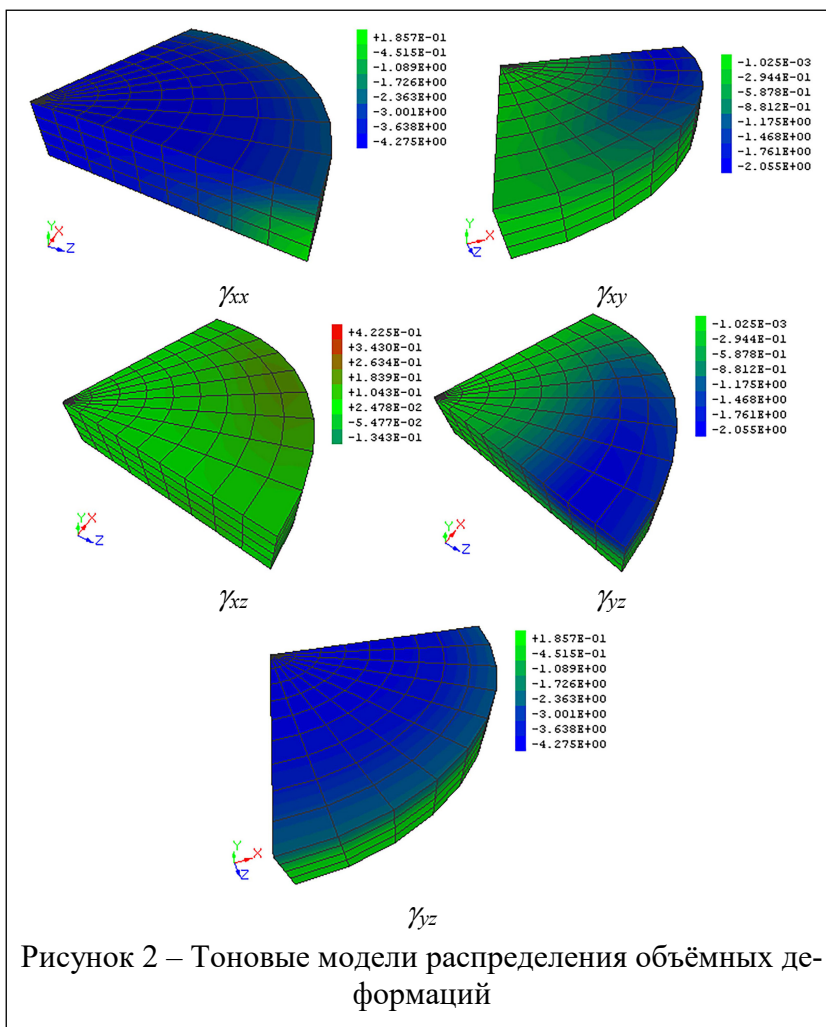


Рисунок 2 – Тоновые модели распределения объёмных деформаций

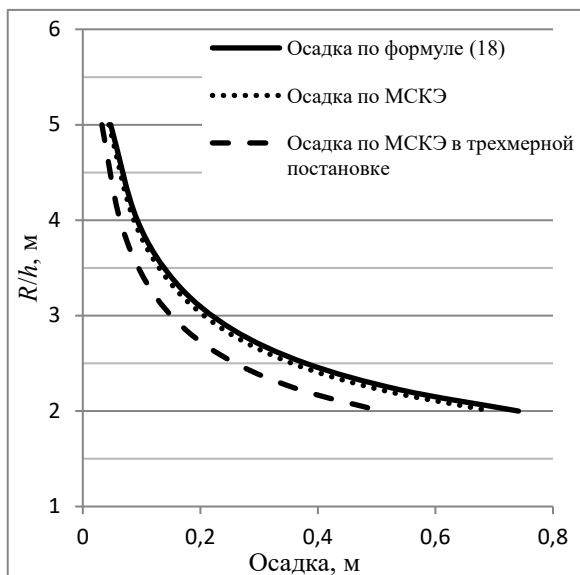


Рисунок 3 – Зависимость величины осадки от соотношения  $R/h$

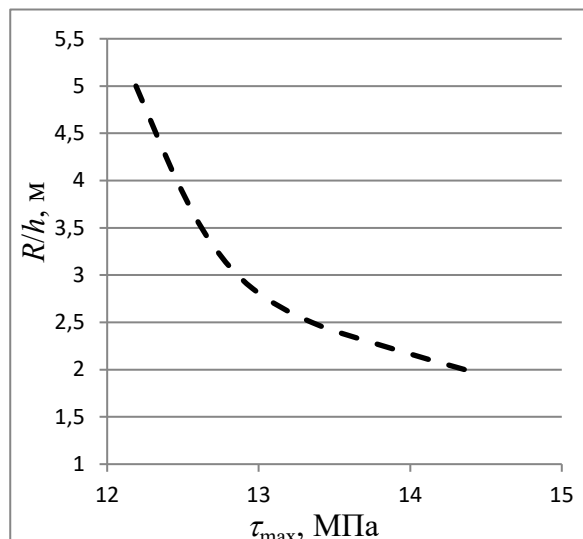


Рисунок 4 – Зависимость величины максимальных касательных напряжений от соотношения  $R/h$

получать значения деформаций и, соответственно, напряжений, во всех трёх направлениях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киричевский, В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский. – Киев: Наук. думка, 2002. – 655 с.
2. Бидерман, В.Л. Сжатие и изгиб тонкослойных резинометаллических элементов / В.Л. Бидерман, Г.В. Мартьянова // Расчеты на прочность. – М., 1983. – Вып. 23. – С. 32-47.
3. Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Дырда, В.И. Решение задачи о сжатии вязкоупругого цилиндра методом Ритца / В.И. Дырда, А.В. Гончаренко, Л.А. Жарко // Геотехническая механика. – 2010. – Вып. 86. – С. 113-124.

#### REFERENCES

1. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [The finite element method in mechanics of elastomers], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
2. Biderman, V.L. and Martyanova, G.V. (1983), “Compression and bending of thin-layer rubber-metal elements”, *Raschety na prochnost*, no. 23, pp. 32-47.
3. Zenkevich, O.K. (1975), *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering], Mir, Moscow, USSR.
4. Dyrda, V.I., Goncharenko, A.V. and Zharko, L.A. (2010), “Solution of the problem of compression of a viscoelastic cylinder by the Ritz method”, *Geo-Technical Mechanics*, no. 86, pp. 113-124.

#### Об авторах

**Дырда Виталий Илларионович**, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, vita.igtm@gmail.com

**Гребенюк Сергей Николаевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой математического анализа Запорожского национального университета (ЗНУ), Запорожье, Украина

**Решевская Екатерина Сергеевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий Запорожского национального университета (ЗНУ), Запорожье, Украина

**Сокол Сергей Петрович**, канд. техн. наук, старший преподаватель Днепропетровского государственного аграрно-экономического университета (ДГАЭУ), Днепропетровск, Украина, info@dsau.dp.ua

**Новикова Алина Вячеславовна**, магистр, младший научный сотрудник отдела механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, a\_v\_novikova@mail.ru

### About the authors

**Dyrda Vitaly Illarionovich**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Professor, Head of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnipro, Ukraine, vita.igtm@gmail.com

**Grebenyuk Sergey Nikolayevich**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Head of the Department of Mathematical Analysis in Zaporizhzhya National University (ZNU), Zaporizhzhya, Ukraine

**Reshevskaya Yekaterina Sergeevna**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor of Information Technologies in Zaporizhzhya National University (ZNU), Zaporizhzhya, Ukraine

**Sokol Sergey Petrovich**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Teacher of Dnepropetrovsk State Agrarian and Economic University (DSAEU), Dnipro, Ukraine, info@dsau.dp.ua

**Novikova Alina Vyacheslavovna**, Master of Science, Junior Researcher of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnipro, Ukraine, a\_v\_novikova@mail.ru

**Анотація.** Досліджуються тонкошарові гумометалеві елементи, що містять шари еластомеру і металеві армуючі тарелі, що чергуються. Подібні елементи застосовуються в важко навантажених пристроях з метою забезпечення точної фіксації конструкції в одному напрямку при свободі переміщень в інших. Стискуючі навантаження, що допускаються для тонкошарових елементів, досягають 100 МПа.

У статті проводиться чисельний розрахунок величини стиску тонкого еластомерного шару під дією вертикально прикладеного зусилля із застосуванням моментної схеми кінцевого елемента, що враховує специфічні властивості еластомерів. Наводиться також порівняння розрахунків, отриманих аналітично В.Л. Бідерманом з урахуванням спрощень, що моделюють поведінку елементів, отриманими чисельними методами, – моментною схемою кінцевого елемента. Моментна схема полягає в розкладанні в ряд полів переміщень, компонент деформацій, функції зміни об'єму і утриманні певної кількості доданків відповідно до певних правил. Отримані чисельні рішення порівнюються з відомими аналітичними, отриманими з урахуванням спрощень, що моделюють поведінку елементів, товщина яких в десятки і сотні разів менше розмірів елементів в плані. Спрощення полягають в обмеженнях на переміщення по осях, суміщених із серединною площиною гумового шару. Зняття обмежень дозволило отримати розрахунок тривимірного напружено-деформованого стану при різних значеннях розмірів елементів. Проведено просторовий розрахунок тонкошарового гумометалевого елемента у вигляді шайби для різних значень співвідношення радіус-товщина.

**Ключові слова:** тонкошаровий гумовий елемент, моментна схема кінцевого елемента, чисельні рішення, розрахунок тривимірного напружено-деформованого стану

**Abstract.** The authors study the thin-layer rubber-metal elements containing alternating layers of elastomer and metallic reinforcing plates. Similar elements are used in heavily loaded devices in order to ensure an accurate fixation of the structure in one direction and free movement in other directions. The compressive loads allowed for the thin-layer elements can reach 100 MPa.

The article presents numerical calculation of the thin elastomeric layer compression under the action of vertically applied force with using of moment scheme of finite element and with taking into account the elastomer specific properties. The calculations obtained analytically by V.L. Biederman with taking into account simplifications that simulate the behavior of the elements are compared with calculations obtained by numerical methods based on the moment scheme of the finite element. The moment scheme assumes a series expansion of displacement fields, deformation components, volume change functions and retention of a certain number of terms according to the relevant rules. The obtained numerical results are compared with the known analytical ones obtained with allowance for simplifications simulating the behavior of elements whose thickness is tens and hundreds times smaller than the dimensions of the elements in the plan. The simplifications relate to restrictions for moving along the axes aligned with the mean plane of the rubber layer. The removal of constraints made it possible to calculate the three-dimensional stress-strain state with different dimensions of the elements. Spatial calculation of the thin-layer rubber-metal element in the form of a washer was carried out with different values of the radius-thickness relationship.

**Keywords:** thin-layer rubber element, moment scheme of the finite element, numerical solutions, calculation of three-dimensional stress-strain state

*Стаття поступила в редакцію 11.04.2017*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, проф. В.П. Франчуком*