



УДК 519.8

К ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ТОЧНОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Г.М. БАКАН, А.В. ШОЛОХОВ

Решается задача гарантированной оценки точности линейной системы в дискретном времени при условии, что на входе системы действует ограниченная помеха, а начальное ее состояние известно с точностью до эллипсоидального множества в фазовом пространстве состояний. Используется матрица сжатия (растяжения) пространства, что позволяет получить более простое в вычислительном отношении решение по сравнению с известным. Приведены результаты моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема оценки точности управляемой системы возникает, в частности, тогда, когда система функционирует в условиях, не предусмотренных при ее расчете. Начальные условия могут существенно отличаться от расчетных, а реализуемые расчетные управления искажаются не учтенными при синтезе помехами. Если информация о мешающих факторах в том или ином виде задана, то можно решать задачу об оценке влияния этих факторов на отклонение от расчетной траектории движения системы. Подобная задача рассматривается в этой статье. Предполагается, что все мешающие факторы ограничены и известны множества принимаемых ими значений. В этих условиях решается задача о построении гарантированной оценки точности системы как отклонения от расчетной (идеальной) траектории ее движения. Она входит в класс задач, связанных с построением так называемых множеств достижимости [1]. В данной статье предлагается сравнительно простой алгоритм решения, учитывающий специфику рассматриваемой задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная управляемая система с аддитивной помехой, действующей на ее входе, и не точно известным начальным состоянием. Уравнение системы в фазовом пространстве переменных состояния имеет вид

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + w_j, \quad j \in T_0, \quad (1)$$

где $j \in T_0 = [0, 1, \dots, k]$ — дискретное время ($k \leq \infty$); $x_j \in R^n$ — вектор фазового состояния (в момент времени j); $u_j \in R^1$ — управление в тот же момент; $w_j \in R^n$ — вектор помехи; $A_j \in R^{n \times n}$, $B = R^{n \times 1}$ — заданные матрицы такие, что пара (A, B) управляема. Предполагается, что матрицы A, B имеют каноническую форму, в частности, $B^T = (0 \ 0 \ \dots \ 1)$.

Управления $u_j \in R^1$ заданы на всем интервале T_0 управления, образуя программу

$$\{ u_j \in R^1, j \in T_0 \}. \quad (2)$$

Помеха w_j действует аддитивно по отношению к управляющему воздействию. Она имеет вид

$$w_j = \lambda_j e_n; \quad (3)$$

где $\lambda_j \in R^1$ — ограниченный мешающий фактор такой, что

$$\forall j \in T_0 \quad |\lambda_j| \leq d, \quad d \geq 0;$$

$e_n^T = (0 \ 0 \ \dots \ 1)$ — единичный орт в R^n ; $d \geq 0$ — заданная константа.

Для множества реализаций помехи w_j можно записать

$$\left\{ w_j : |l^T w_j| \leq d \sqrt{l^T e_n e_n^T l}, \quad \forall l \in R^n \right\}. \quad (4)$$

Вектор $x_0 \in R^n$ начального состояния точно не задан. Известно, что он может принимать значения из ограниченного множества

$$E_0 = \left\{ x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^T \bar{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \leq 1 \right\}, \quad (5)$$

где $E_0 \subset R^n$ — многомерный эллипсоид с заданными параметрами $\bar{x}_0 \in R^n$ и $\bar{H}_0 \in R^{n \times n}$, ($\bar{H}_0^T = \bar{H}_0 > 0$).

Пусть $\{\tilde{x}_j, j \in T_0\}$ расчетная траектория системы есть решение уравнения

$$\tilde{x}_{j+1} = A\tilde{x}_j + Bu_j, \quad \tilde{x}_j \Big|_{j=0} = \bar{x}_0 \quad (6)$$

при управлениях (2).

Величину

$$\varepsilon_j = x_j - \tilde{x}_j,$$

где x_j — решение уравнения (1), при некотором $x_0 \in E_0$ и условиях (2), (4), (5) назовем ошибкой системы.

Задача состоит в том, чтобы построить такое эллипсоидальное множество $E_j \subset R^n$ наименьшего многомерного объема, чтобы

$$\forall j \in T_0, \quad \varepsilon_j \in E_j. \quad (7)$$

Множество E_j назовем гарантированной оценкой точности системы (в j -й момент времени) или гарантированной оценкой точности реализации программы (2).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть искомая эллипсоидальная оценка в j -й момент времени имеет вид многомерного эллипсоида

$$E_j = \{x_0 : (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \leq 1\}, \quad (8)$$

где параметры $\bar{x}_0 \in R^n$ и $H_j \in R^{n \times n}$, ($H_j > 0$) предполагаются известными. В частности, для $j = 0$ $\bar{x}_j|_{j=0} = \bar{x}_0$, $H_0 = \bar{H}_0$.

Эллипсоид (8) можно записать в параметрическом виде

$$E_j = \{x_j : x_j = \bar{x}_j + \sqrt{H_j} \xi_j, \|\xi_j\| \leq 1\}, \quad (9)$$

где $\xi_j \in R^n$ — вспомогательный параметр и $\|\bullet\|$ — евклидова норма вектора.

Для определения оценки E_{j+1} на $j+1$ -м такте найдем образ эллипсоида при отображении его с помощью линейного преобразования (1). Для этого, пользуясь параметрическим представлением (9), исключим вектор x_j из уравнения (1). Тогда получим

$$x_{j+1} = A\bar{x}_j + A\sqrt{H_j}\xi_j + Bu_j + w_j.$$

Обозначим

$$\bar{x}_{j+1} = A\bar{x}_j + Bu_j, \quad (10)$$

тогда

$$x_{j+1} - \bar{x}_{j+1} = A\sqrt{H_j}\xi_j + w_j. \quad (11)$$

Так как в (10) $\bar{x}_j|_{j=0} = \bar{x}_0$, а управления определяются программой (2), следует считать $\bar{x}_{j+1} \equiv \tilde{x}_{j+1}$. С учетом этого для ошибки $\varepsilon_{j+1} = x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}$ согласно (11) можем записать

$$E_{j+1}^* = \{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1} = z_j + w_j, z_j = A\sqrt{H_j}\xi_j, \|\xi_j\| \leq 1, w_j = \lambda_j e_n, |\lambda_j| \leq d\}. \quad (12)$$

В соответствии с определением переменной z_j в (12) она принимает значения из множества

$$\{z_j : l^T z_j \leq \sqrt{l^T A H_j A^T l}, \forall l \in R^n\}. \quad (13)$$

Таким образом, ошибка ε_{j+1} на $j+1$ -м такте представляет собой сумму двух переменных, каждая из которых принимает значения из эллипсоидальных множеств (4) и (13). Учитывая, что эти множества заданы своими огибающими функциями, для множества (12) получаем

$$E_{j+1}^* = \{ \varepsilon_{j+1} : l^T \varepsilon_{j+1} \leq \sqrt{l^T H_{j+1|j} l} + \sqrt{l^T e_n e_n^T l} d, \forall l \in R^n \}, \quad (14)$$

где

$$H_{j+1|j} = A H_j A^T.$$

Здесь использован тот факт, что сумма двух векторов, каждый из которых задан эллипсоидальным множеством, принадлежит множеству с огибающей функцией, равной сумме огибающих функций исходных эллипсоидов.

Таким образом поставленная задача свелась к тому, чтобы аппроксимировать множество (14) эллипсоидальным множеством E_{j+1} наименьшего объема.

Исчерпывающее решение данной задачи содержится в монографии [1]. Однако оно связано с необходимостью одновременного приведения исходных эллипсоидов к диагональной форме, для чего приходится решать соответствующее характеристическое уравнение.

В этой статье предлагается более простой способ решения, учитывающий специфику рассматриваемой задачи. В его основе лежит идея использования матрицы сжатия [2] по заданному направлению, что позволяет относительно просто вычислять, а затем и минимизировать объем искомой эллипсоидальной оценки.

Поскольку множество (14) не является эллипсоидальным, найдем аппроксимирующее его эллипсоидальное множество. Для этого воспользуемся леммой, которую применительно к рассматриваемой здесь задаче запишем в уже принятых обозначениях, опуская индексы j и $j+1$.

Лемма. Пусть $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ — числовые параметры такие, что

$$\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1. \quad (15)$$

Тогда любой эллипсоид из параметрического семейства

$$E(\gamma_1, \gamma_2) = \{ \varepsilon : \varepsilon \leq \sqrt{l^T (\gamma_1 e_n e_n^T d^2 + \gamma_2 H) l}, \forall l \in R^n \} \quad (16)$$

имеет свойство

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \quad E^* \subset E(\gamma_1, \gamma_2), \quad (17)$$

где

$$E^* = \{ \varepsilon : l^T \varepsilon \leq \sqrt{l^T e_n e_n^T l} d + \sqrt{l^T H l} \}.$$

Доказательство леммы основано на известном неравенстве [3]

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{\gamma_1 x^T x + \gamma_2 y^T y}, \quad (18)$$

где $x, y \in R^n$, $\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1$.

На основании этой леммы для аппроксимирующего множества (14) эллипсоидов можем использовать семейство

$$E(\gamma_1, \gamma_2) = \{ \varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1}^T H_{j+1}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) \varepsilon_{j+1} \leq 1 \}, \quad (19)$$

где

$$H_{j+1}(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_{1,j} e_n e_n^T d^2 + \gamma_{2,j} H_{j+1|j}) \quad (20)$$

и

$$\gamma_{1,j}^{-1} + \gamma_{2,j}^{-1} = 1. \quad (21)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы выбрать из семейства (19) аппроксимирующий эллипсоид наименьшего объема. Найдем выражения для объема эллипсоида (19) как функцию от параметров $\gamma_{1,j}$ и $\gamma_{2,j}$. По определению имеем

$$v(E(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})) = v(1)(\det H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}))^{1/2}, \quad (22)$$

где $v(1)$ — объем единичного шара в R^n ; $\det H$ — определитель матрицы $H \in R^{n \times n}$. С использованием матрицы сжатия (растяжения) матрицу (20) представим в виде

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j} \sqrt{H_{j+1|j}} R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n \right) \sqrt{H_{j+1|j}}, \quad (23)$$

где $R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n \right)$ — матрица сжатия (растяжения) по направлению $\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n$

$$R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n \right) = I - (1 - \beta_j^{-2}) \frac{\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n e_n^T \sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}}{e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n}, \quad (24)$$

где $I \in R^{n \times n}$ — единичная матрица и

$$\beta_j^{-2} = 1 + \frac{\gamma_{1,j}}{\gamma_{2,j}} \kappa_j^2, \quad (25)$$

где

$$\kappa_j^2 = e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n d^2. \quad (26)$$

С учетом свойства матрицы сжатия

$$\det R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} e_n \right) = \beta_j^{-2} \quad (27)$$

для объема (22) находим

$$v(E(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})) = v(1) \gamma_{2,j}^{n/2} \beta_j^{-1} (\det H_{j+1|j})^{1/2}. \quad (28)$$

Утверждение. Пусть δ_j^+ положительный корень уравнения

$$n \delta_j^2 + \kappa_j^2 (n-1) \delta_j - \kappa_j^2 = 0, \quad (29)$$

тогда оптимальные значения $\gamma_{1,j}^*$ и $\gamma_{2,j}^*$ параметров $\gamma_{1,j}$ и $\gamma_{2,j}$, на которых достигается минимальное значение объема (22) аппроксимирующего эллипсоида, связаны между собой соотношением

$$\delta_j^+ = \frac{\gamma_{2,j}^*}{\gamma_{1,j}^*}, \quad (30)$$

что с учетом ограничения (21) дает

$$\gamma_{1,j}^* = \frac{1 + \delta_j^+}{\delta_j^+}, \quad \gamma_{2,j}^* = 1 + \delta_j^+. \quad (31)$$

Доказательство утверждения следует непосредственно из необходимого условия минимума функции (28) с учетом ограничения (15).

Таким образом, для искомой оптимальной оценки ошибки на $j+1$ -м такте находим

$$E_{j+1} = \{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1}^T H_{j+1}^{-1} \varepsilon_{j+1} \leq 1\}, \quad (32)$$

где матрица $H_{j+1} = H_{j+1}(\gamma_{1,j}^*, \gamma_{2,j}^*)$ в соответствии с (20) равна

$$H_{j+1} = \gamma_{1,j}^* e_n e_n^T d^2 + \gamma_{2,j}^* H_{j+1|j}.$$

Для максимального положительного корня, решая уравнение (29), получаем

$$\delta_j^+ = d(e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n)^{1/2} b_j = \kappa_j b_j,$$

где

$$b_j = \frac{\sqrt{\kappa_j^2 (n-1)^2 + 4n}}{2n} - \frac{\kappa_j (n-1)}{2n}.$$

Используя соотношения (31), с учетом полученного выражения для максимального корня искомую матрицу H_{j+1} можем записать

$$H_{j+1} = (1 + \delta_j^+) \left(H_{j+1|j} + \frac{d}{b_j} \frac{e_n e_n^T}{(e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n)} \right). \quad (33)$$

Формулы (5) и (33) с учетом определения ошибки $\varepsilon_{j+1} = x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}$ дают искомый рекуррентный алгоритм построения гарантированной оценки ошибки реализации программы (2). Начальными значениями здесь служат параметры априорного множества (3).

Заметим, что уравнение (29) совпадает с уравнением, полученным в работе [1] для частного случая, когда матрица $H_{j+1|j} = I$.

Пример моделирования алгоритма. Возьмем систему третьего порядка и зададимся устойчивыми значениями собственных чисел матрицы динамики A : $\lambda_i = 0,75; 0,5; -0,5$. По ним построим матрицу A , имеющую форму Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1875 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Управления в программе (2) примем равными $\bar{u}_j = 1, \forall j \in \overline{1, k}$, помеху λ_i зададим в виде $\lambda_i = d(-1)^j$. Начальное значение $\bar{x}_0^T = [5 \ -10 \ 12]$ удовлетворяет условию (5), где

$$H_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0^T = [0 \ 0 \ 0].$$

Моделирование системы произведем в среде MATLAB. В качестве результата рассмотрим график изменений квадратного корня из определителя матрицы H_j (рис. 1) и график зависимости значения квадратичной формы (32) от номера j итерации (рис. 2).

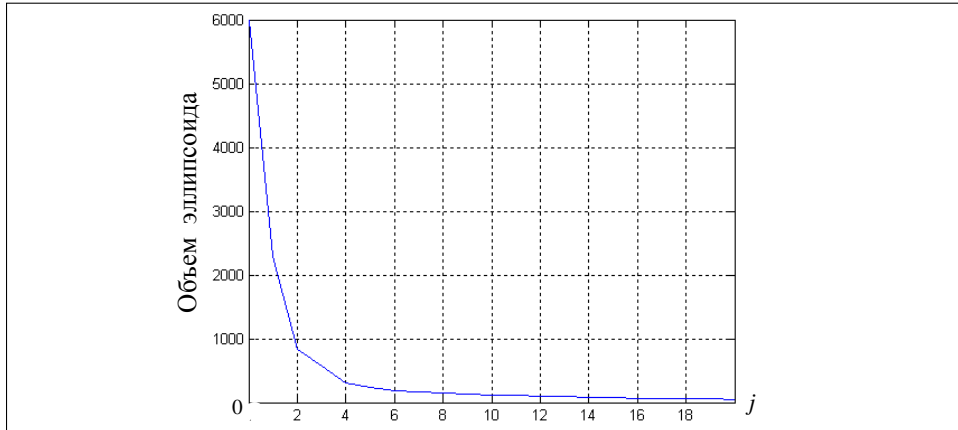


Рис. 1. Аппроксимация множества достижимости при $\lambda_i=0,75; 0,5; -0,5$

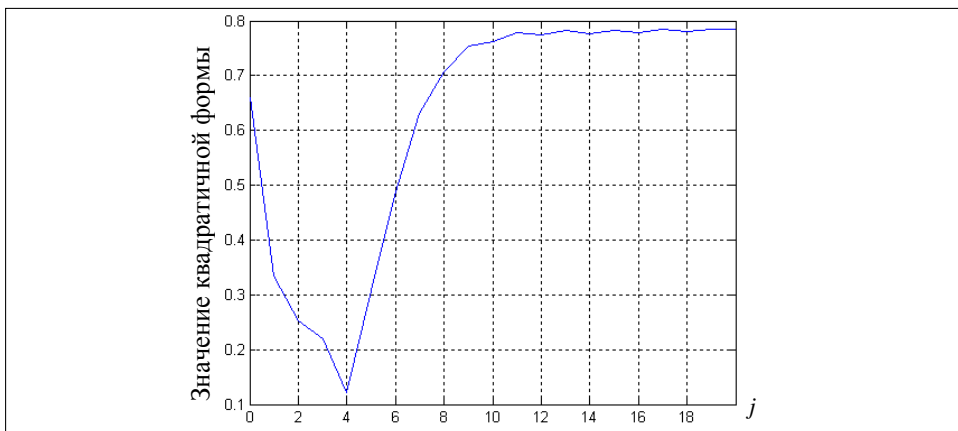


Рис. 2. Оценка вектора ошибки при $\lambda_i=0,75; 0,5; -0,5$

Из рис. 1 видно, что точность гарантированной оценки ошибки возрастает с ростом числа итераций. При этом (рис. 2) эллипсоид (32) гарантированно содержит ошибку в качестве своего элемента.

Результаты аналогичных расчетов приведены на рис. 3 и 4 для случая, когда собственные числа матрицы A равны $\lambda_i = 0,5; 0,4 + 0,6i; 0,4 - 0,6i$ при одинаковых прочих условиях.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,26 & -0,92 & 1,3 \end{bmatrix}.$$

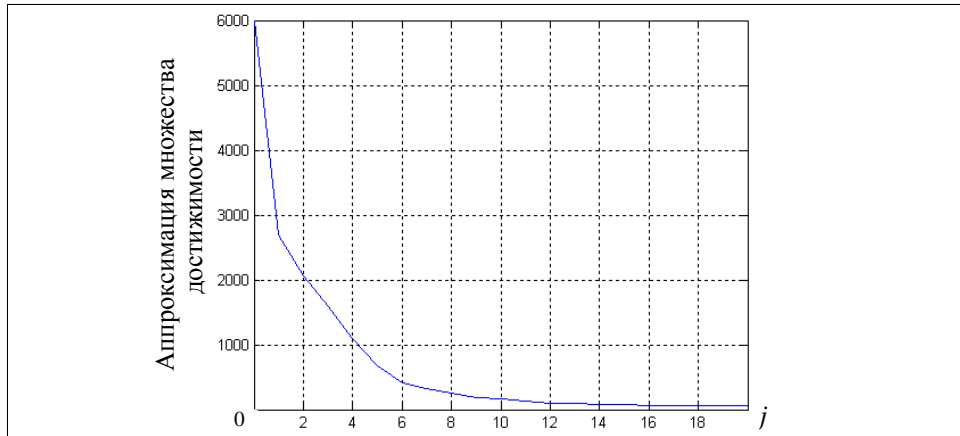


Рис. 3. Аппроксимация множества достижимости при $\lambda_i = 0,5; 0,4 + 0,6_i; 0,4 - 0,6_i$

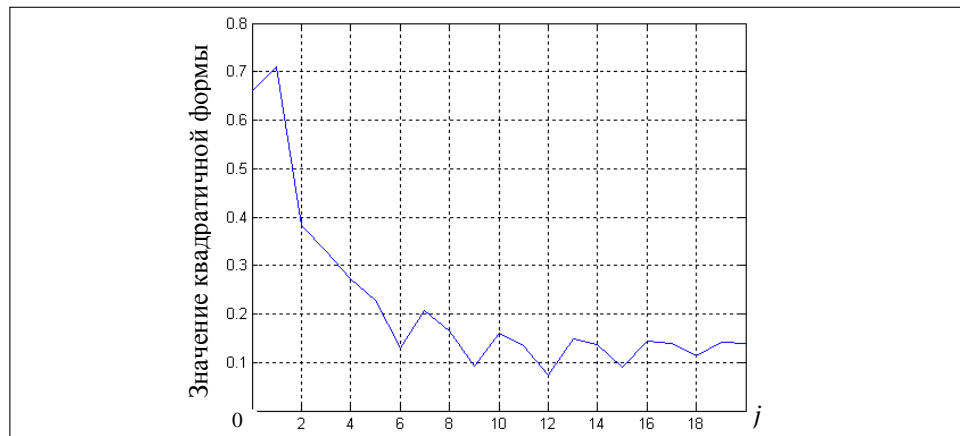


Рис. 4. Оценка вектора ошибки при $\lambda_i = 0,5; 0,4 + 0,6_i; 0,4 - 0,6_i$

ВЫВОДЫ

С помощью предложенного алгоритма решается поставленная задача гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы для случая скалярных управлений и помехи. При этом решение достигается с меньшими вычислительными затратами по сравнению с алгоритмом, приведенным в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
2. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 94–95.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

Поступила 03.12.2004