

УДК 539.3

## РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ НА КОНТУРІ КУТОВОГО ЗАКРУГЛЕНОГО ВИРІЗУ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

М. П. САВРУК<sup>1,2</sup>, А. КАЗБЕРУК<sup>2</sup>, І. ТАРАСЮК<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Білостоцька політехніка, Польща

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок антипласкої задачі теорії пружності для площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом. На цій основі знайдено залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу. Проведено порівняння з відомим розв'язком аналогічної задачі для гіперболічного вирізу. Показано, що не тільки радіус закруглення вершини вирізу, але і форма її околу значно впливає на розподіл напружень на межовому контурі.

**Ключові слова:** механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, антипласка деформація, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

У механіці руйнування останнім часом значну увагу приділяють вивченню деформування та руйнування твердих тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. На сьогодні найбільш досліджено плоскі задачі теорії пружності для тіл з кутовими вирізами (I та II типи деформування). Розроблено єдиний підхід до розв'язування такого класу задач [1–4], коли коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого вирізу знаходять на основі даних про концентрацію напружень у вершинах відповідних закруглених кутових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами.

Нижче цей підхід поширено на антипласкі задачі теорії пружності для тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами (III тип деформування). Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок задачі для напівнескінченного закругленого кутового вирізу у пружній площині. На цій основі побудовано залежності між КІН  $\tilde{K}_{III}^V$  у вершині гострого кутового вирізу, максимальним напруженням на межовому контурі відповідного закругленого кутового вирізу та його радіусом закруглення. Такі залежності для обмежених тіл мають асимптотичний характер, коли радіус кривини у вершині вирізу прямує до нуля, що дає змогу їх використати для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі даних для закруглених вирізів.

**Розподіл напружень у пружному тілі з кутовим вирізом за антипласкої деформації.** Розглянемо антипласку задачу на власні значення для пружного клина, що займає область  $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$ , де  $r, \theta$  – полярні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його діагоналі:  $z = x + iy = re^{i\theta}$  (рис. 1а). На гранях клина відсутні дотичні напруження:

$$\tau_{\theta z} = 0, \quad \theta = \pm\alpha. \quad (1)$$

Переміщення  $w$  та напруження  $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$  у клині виразимо через комплексні потенціали  $f_0(z)$  і  $F_0(z) = f_0'(z)$  за формулами [5]

$$Gw(x, y) = \operatorname{Re} f_0(z), \quad \tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = e^{i\theta} F_0(z), \quad (2)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

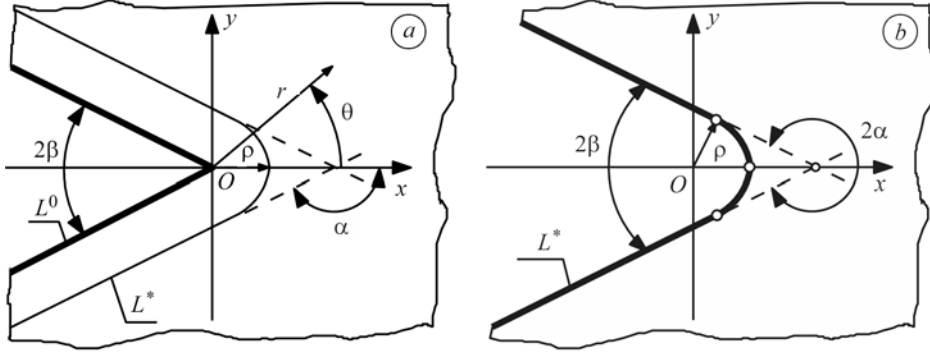


Рис. 1. Гострий (а) та закруглений (б) кутові вирізи у пружній площині.

Fig. 1. Sharp (a) and rounded (b) V-notches in an elastic plane.

Потенціал напружень шукатимемо у вигляді

$$F_0(z) = Az^{-\lambda}, \quad (3)$$

де  $A$  – комплексна стала;  $\lambda < 1$  – дійсний параметр.

Урахувавши співвідношення (2), (3), з крайових умов (1) отримаємо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} Ae^{i\alpha(1-\lambda)} - \bar{A}e^{-i\alpha(1-\lambda)} = 0, \\ Ae^{-i\alpha(1-\lambda)} - \bar{A}e^{i\alpha(1-\lambda)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

для визначення величин  $A$  і  $\bar{A}$ . Нетривіальний розв'язок однорідної системи (4) існує, коли її визначник дорівнює нулю. З цієї умови отримуємо характеристичне рівняння задачі:

$$\sin 2\alpha(1-\lambda) = 0. \quad (5)$$

Найменший додатний корінь рівняння (5)  $\lambda_{III} = 1 - \pi/(2\alpha)$  визначає порядок особливості поля напружень у вершині клина. Введемо КІН у вершині клина за допомогою співвідношення

$$\tilde{K}_{III}^V = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (2\pi x)^{\lambda_{III}} \tau_{\theta z}(x, 0) \right].$$

Тоді для визначення сталої  $A$  маємо залежність  $A = -i(2\pi)^{-\lambda_{III}} \tilde{K}_{III}^V$  і комплексний потенціал (3) набуває вигляду [6]

$$F_0(z) = -\frac{i\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{III}}}. \quad (6)$$

Із співвідношень (2), (3) і (6) отримуємо розподіл сингулярних напружень і переміщень в околі вершини пружного клина в умовах антиплоскої деформації (III тип деформування) [7]:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{III}}} \sin(1-\lambda_{III})\theta, & \tau_{\theta z} &= \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{III}}} \cos(1-\lambda_{III})\theta, \\ w &= \frac{\tilde{K}_{III}^V}{G\lambda_{III}(2\pi r)^{\lambda_{III}}} \sin(1-\lambda_{III})\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Коли кут розхилу клина  $\alpha = \pi$ , із співвідношень (7) приходимо до залежностей, що характеризують напружено-деформований стан біля вершини тріщини поздовжнього зсуву [8].

**Напівнескінченний закруглений кутовий виріз у пружній площині.** Нехай пружна площина послаблена гострим кутовим вирізом з вершиною в початку координат і кутом розхилу  $2\beta$  ( $0 \leq \beta < \pi/2$ ) (рис. 1a). Вважатимемо, що напружений стан площини з вирізом описується комплексним потенціалом  $F_0(z)$  (6), який забезпечує відсутність напружень на контурі вирізу  $L^0$ . Розглянемо гладкий контур  $L^*$ , який складається з прямолінійних ділянок, паралельних до граней клина  $L^0$ , та дуги кола радіуса  $\rho$  з центром у його вершині. На контурі  $L^*$  знайдемо дотичні напруження

$$\tau_{nz}^0 = \text{Im} \left[ F_0(t) e^{i\tilde{\theta}} \right] = -p(t), \quad t \in L^*,$$

де  $\tilde{\theta}$  – кут, який утворює додатна дотична до контуру  $L^*$  в точці  $t$  з віссю  $Ox$ .

Тепер розглянемо у площині закруглений кутовий виріз такого ж кута розхилу з контуром  $L^*$ , вільним від напружень (рис. 1b). Нехай на нескінченності заданий асимптотичний розподіл напружень, що визначає потенціал  $F_0(z)$  (6). Крайову задачу для такої області розв’язуватимемо методом суперпозиції. Зобразимо потенціал напружень задачі у вигляді

$$F_*(z) = F_0(z) + F(z),$$

де  $F(z)$  – функція, що описує збурений напружений стан, викликаний закругленим кутовим вирізом  $L^*$ , зробленим у клині.

Для знаходження збуреного напруженого стану необхідно розв’язати крайову задачу для пружної площини, що має закруглений кутовий виріз, на контурі  $L^*$  якого виконується крайова умова

$$\tau_{nz} = \text{Im} \left[ F(t) e^{i\tilde{\theta}} \right] = p(t), \quad t \in L^*,$$

а на нескінченності напруження відсутні, причому мають порядок  $o(|z|^{-\lambda_{III}})$ .

Оскільки напруження на нескінченності зникають, то зазначений збурений стан можна отримати також у граничному випадку площини з гладкою симетричною криволінійною тріщиною вздовж контуру  $L$  (рис. 2), довжина якої прямує до нескінченності, а її береги завантажені самозрівноваженими напруженнями

$$\tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^- = p(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

де верхні індекси вказують на граничні значення на контурі  $L$  відповідних величин за підходу до нього зліва (+) або справа (-). Саме таким способом і буде знайдено розв’язок поставленої задачі.

Задачу про розподіл напружень у пружній площині з криволінійною

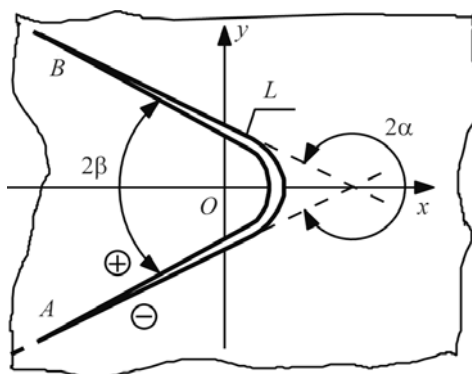


Рис. 2. Криволінійна тріщина в площині вздовж закругленого кутового вирізу.

Fig. 2. A curvilinear crack in the plane along the contour of a rounded V-notch.

тріщиною розв'язуватимемо методом сингулярних інтегральних рівнянь [5]. Інтегральне зображення розв'язку подамо у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\gamma'(t)}{t-z} dt, \quad (9)$$

де невідома функція  $\gamma'(t)$  – похідна стрибка переміщень на контурі тріщини.

Використовуючи потенціал (9) і задовольняючи крайові умови (8), отримуємо сингулярне інтегральне рівняння задачі [5]:

$$\frac{1}{\pi} \int_L K(t, t') \gamma'(t) dt = p(t'), \quad t' \in L, \quad (10)$$

де

$$K(t, t') = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{t-t'} \frac{dt'}{ds'} \right], \quad p(t') = -\operatorname{Im} \left[ i \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi t')^{\lambda_{III}}} \frac{dt'}{ds'} \right].$$

Тут  $s'$  – дугова абсциса, що відповідає точці  $t'$ .

Єдиний розв'язок інтегрального рівняння (10) в класі функцій з інтегрованою особливістю на кінцях контуру інтегрування існує за додаткової умови

$$\int_L \gamma'(t) dt = 0, \quad (11)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

Запишемо параметричне рівняння контуру тріщини (у граничному випадку, коли її довжина прямує до нескінченності) у вигляді

$$t = \rho \omega(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

де  $\rho$  – радіус дугової ділянки;

$$\omega(\xi) = e^{i\xi\alpha} \begin{cases} -1/\sin(\xi\alpha - \beta), & -1 \leq \xi < -\xi_B, \\ 1, & -\xi_B \leq \xi \leq \xi_B, \\ 1/\sin(\xi\alpha + \beta), & \xi_B < \xi \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

де  $\xi_B = (\pi - 2\beta)/[2(\pi - \beta)]$  – кутова координата  $\theta$  точки контуру  $L$ , в якій дуга кола переходить у прямолінійну ділянку.

Розглянемо також відповідний гіперболічний виріз, для якого функція  $\omega(\xi)$  має вигляд [6]

$$\omega(\xi) = \frac{e^{-i\xi\alpha} \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos(\xi\alpha)}, \quad -1 < \xi < 1. \quad (13)$$

Запишемо інтегральне рівняння (10) та додаткову умову (11) у канонічній безрозмірній формі:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta) \gamma'(\xi) d\xi = p(\eta), & -1 \leq \eta \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma'(\xi) d\xi = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$M(\xi, \eta) = \rho K(\rho\omega(\xi), \rho\omega(\eta)), \quad t' = \rho\omega(\eta),$$

$$\gamma'(\xi) = \frac{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}}{\tilde{K}_{III}^V} \gamma'(\rho\omega(\xi))\omega'(\xi), \quad p(\eta) = \frac{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}}{\tilde{K}_{III}^V} p(\rho\omega(\eta)).$$

Невідому дійсну функцію  $\gamma'(\xi)$  шукаємо в класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях інтервалу інтегрування:

$$\gamma'(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Скориставшись для числового розв'язування інтегрального рівняння (14) квадратурним методом, прийдемо до системи  $2n$  лінійних алгебричних рівнянь [5]:

$$\begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} M(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) = p(\eta_m), & m=1, \dots, (2n-1), \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u(\xi_k) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$\xi_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \quad k=1, \dots, n; \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{2n}, \quad m=1, \dots, (2n-1). \quad (16)$$

Оскільки задача антисиметрична відносно осі  $Ox$ , то справедлива умова:

$$u(-\xi) = u(\xi). \quad (17)$$

Врахувавши залежності (17), вдвоє зменшимо порядок системи (15). Внаслідок цього отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [M(-\xi_k, \eta_m) + M(\xi_k, \eta_m)] u(\xi_k) = p(\eta_m), & m=1, \dots, (n-1), \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

Дотичні напруження на контурі вирізу  $L$  обчислимо із залежності [5]

$$\tau_{sz}^* = \operatorname{Re} \left\{ \left[ F_0(t) + F^-(t) \right] e^{i\theta} \right\}. \quad (19)$$

Граничне значення потенціалу  $F^-(t)$  знайдемо, користуючись формулами Сохоцького–Племеля [9]:

$$F^-(t') = -\gamma'(t') + \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\gamma'(t)}{t-t'} dt, \quad t' \in L. \quad (20)$$

Підставивши залежність (20) до формули (19), після застосування до сингулярного інтеграла квадратурних формул, отримуємо:

$$\begin{aligned} \tau_{sz}^*(\eta_m) &= \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}} R_{III}(\beta, \eta_m) = \\ &= \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}} \operatorname{Re} \left\{ \left[ -\frac{i}{\omega(\eta_m)} - \frac{u(\eta_m)}{\omega'(\eta_m)} + \frac{1}{2in} \sum_{k=1}^{2n} \frac{u(\xi_k)}{\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)} \right] \frac{\omega'(\eta_m)}{|\omega'(\eta_m)|} \right\}. \end{aligned}$$

Врахувавши умову симетрії (17), визначимо безрозмірні напруження на контурі вирізу за формулою

$$R_{III}(\beta, \eta_m) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ -\frac{i}{\omega(\eta_m)} - \frac{u(\eta_m)}{\omega'(\eta_m)} + \frac{1}{2in} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) \left( \frac{1}{\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)} + \frac{1}{\overline{\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)}} \right) \right] \frac{\omega'(\eta_m)}{|\omega'(\eta_m)|} \right\}. \quad (21)$$

Значення  $u(\eta_m)$  знайдемо з інтерполяційної формули [5], яка після врахування умови (17) набуде вигляду

$$u(\eta_m) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+m} \sqrt{1 - \xi_k^2} u(\xi_k) \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_k} - \frac{1}{\eta_m + \xi_k} \right]. \quad (22)$$

**Числові результати.** Розрахунки напружень вздовж контуру вирізу зроблено для кутів розхилу в інтервалі  $0 < 2\beta \leq \pi$  для двох різних форм: кутового закругленого (12) та гіперболічного (13) вирізів. Радіус закруглення в них у вершині вирізів ( $\xi = 0$ ) рівний  $\rho$ . Наведено (рис. 3) порівняння розподілів безрозмірних напружень  $R_{III}(\beta, \eta) = R_{III}(\theta)$  ( $\theta = \arg t$ ,  $t \in L$ ) вздовж контурів обох форм для різних кутів розхилу  $2\beta$ . Числові результати для кутового закругленого вирізу (рис. 3a) значно відрізняються від результатів для гіперболічного вирізу (рис. 3b).

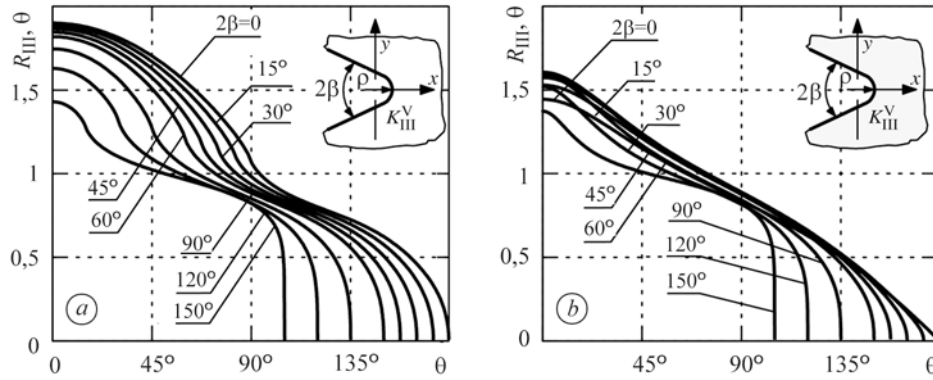


Рис. 3. Розподіл безрозмірного напруження  $R_{III}(\theta)$  вздовж контурів кутового закругленого (a) та гіперболічного (b) вирізів для різних кутів розхилу  $2\beta$ .

Fig. 3. Dimensionless stress,  $R_{III}(\theta)$ , distribution along a rounded V-notch (a) and hyperbolic notch (b) edges for different notch vertex,  $2\beta$ .

У вершині вирізу  $t = \rho$  ( $\xi = 0$ ) безрозмірне напруження досягає найбільшого значення  $R_{III} = R_{III}(\beta) = R_{III}(\beta, 0)$ . Тоді отримуємо:

$$\tau_{\max} = \tau_{\theta z}(\rho, 0) = \tilde{K}_{III}^V R_{III}(2\pi\rho)^{-\lambda_{III}}.$$

Параметр  $R_{III}$  називають коефіцієнтом впливу закруглення вирізу на напруження в його вершині [6]. Його знаходимо з формули (21). Значення функції  $u(\xi)$  в точці  $\xi = 0$  отримуємо зі співвідношення (22), яке у цьому разі спрощується до вигляду

$$u(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} u(\xi_k) \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(2k-1)}{4n} \right|.$$

Обчислення коефіцієнтів впливу закруглення на напруження  $R_{III}(\beta)$  провели для кутів розхилу  $2\beta$  в інтервалі  $0 \leq 2\beta < \pi$  з кроком  $\pi/360$ . Точність отриманих

результатів оцінювали, подвоюючи кількість квадратурних вузлів Гауса–Чебишова (16), що призводило до подвоєння порядку системи (18). Обчислення припиняли, коли відносна різниця в чергових значеннях коефіцієнта  $R_{III}$  для заданого кута  $\beta$  була менша ніж 0,1%. Для гіперболічного вирізу отримані значення коефіцієнта впливу закруглення на напруження  $R_{III}$  добре узгоджувалися з числовими результатами Бентхема [6] (відносна різниця не перевищувала 0,1%), а також з його аналітичним розв’язком:

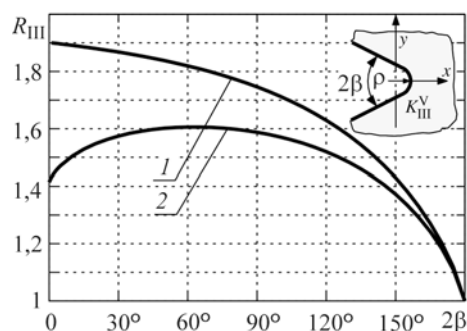
$$R_{III} = (\sin \alpha)^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \left( -\frac{1}{2} \cos \alpha \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}-1}.$$

Наведено (рис. 4) порівняння графіків функцій  $R_{III}(\beta)$  для кутового закругленого (крива 1) та гіперболічного (крива 2) вирізів. Обидві криві для кута  $2\beta = \pi$  досягають очевидного значення  $R_{III} = 1$ . Якщо кут  $2\beta = 0$ , тобто, коли гіперболічний виріз переходить у параболічний, то отримане значення близьке до точного розв’язку  $R_{III} = \sqrt{2}$  [8]. Для U-подібного вирізу ( $\beta = 0$ )  $R_{III} = 1,901$ . Відносна різниця максимальних напружень для закругленого кутового та гіперболічного вирізів найбільша (25,6%) для кута розхилу  $2\beta = 0$  і зі збільшенням цього кута до  $2\beta = \pi$  прямує до нуля.

Цікаво відзначити, що у клині, який має коловий виріз із центром у вершині, коефіцієнт  $R_{III} = 2$  і не залежить від кута розхилу  $2\beta$  [10].

Рис. 4. Залежність коефіцієнта впливу закруглення на напруження  $R_{III}$  для кутового закругленого (1) та гіперболічного (2) вирізів від кута розхилу  $2\beta$ .

Fig. 4. Dependence of the stress rounding factor,  $R_{III}$ , for a rounded V-notch (1) and a hyperbolic notch (2) on the notch vertex,  $2\beta$ .



На основі отриманих числових результатів для кутового закругленого вирізу побудовано апроксимаційну формулу

$$R_{III} = \frac{1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5}{1 + 14,248\gamma}, \quad \gamma = \pi/2 - \beta,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,1% для всіх кутів  $\beta \in [0, \pi/2]$ .

## ВИСНОВКИ

Розроблено єдиний підхід до розв’язування антиплоских задач теорії пружності для тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв’язок антиплоскої задачі теорії пружності для площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом. На цій основі знайдено залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу. Проведено порівняння з відомим розв’язком аналогічної задачі для гіперболічного вирізу. Показано, що не тільки радіус закруглення вершини вирізу, але і форма її околу значно (до 25,6%) впливає на розподіл напружень на межовому контурі. Для скінченних тіл з кутовими вирізами отримані залежності мають асимптотичний характер, коли віднос-

ний радіус закруглення вершини вирізу прямує до нуля. Такі співвідношення можна використовувати в граничних переходах для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі розв'язків для відповідних закруглених концентраторів напружень.

*РЕЗЮМЕ.* Методом сингулярних інтегральних уравнений получено решение антиплоской задачи теории упругости для плоскости с полубесконечным угловым закругленным вырезом. На этой основе найдена связь между коэффициентами интенсивности и концентрации напряжений в острой и закругленной вершине углового выреза. Проведено сравнение с известным решением аналогичной задачи для гиперболического выреза. Показано, что не только радиус закругления вершины выреза, но и форма ее окрестности значительно влияет на распределение напряжений на граничном контуре.

*SUMMARY.* The solution of antiplane problem of the theory of elasticity for a plane with a semi-infinite rounded V-shaped notch was obtained by the singular integral equation method. On this basis, the relationship between stress concentration factor for a rounded notch and stress intensity factor for a sharp notch was obtained. The comparison with the known similar problem solution for the hyperbolic notch was performed. It was shown that the shape in the neighbourhood of the rounded notch vertex significantly influences the distribution of stresses at the boundary contour.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
2. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
3. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z korbami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
4. *Саврук М. П., Казберук А.* Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 4. – С. 52–61.
5. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. *Benthem J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
7. *Seweryn A.* Metody numeryczne w mechanice pękania. – Warszawa: IPPT PAN, 2003. – 361 s.
8. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос.* / Под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.
9. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. *Саврук М. П.* Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 5. – С. 57–65.  
(*Savruk M. P.* Longitudinal shear of an elastic wedge with cracks and notches // *Materials Science.* – 2002. – **38**, № 5. – P. 672–684.)

*Одержано 17.11.2011*