

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ**

**В.Д. РОМАНЕНКО**

Рассмотрены теоретические положения проектирования разнотемповых систем прогнозирования динамических координат одномерных и многомерных процессов при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования и выходных координат с большими. Динамика стационарных процессов представлена моделями авторегрессии и скользящего среднего (АРСС), а нестационарных процессов — моделями авторегрессии и интегрированного скользящего среднего (АРИСС) с разнотемповой дискретизацией.

### **ВВЕДЕНИЕ**

На основе многочисленных публикаций формируется теория дискретных разнотемповых систем (РС) фильтрации, прогнозирования и управления. Динамические процессы, входящие в состав РС, характеризуются:

- разномасштабностью скоростей изменения групп взаимосвязанных переменных;
- наличием дискретных измерений отдельных координат динамического процесса с различными периодами квантования;
- взаимосвязанностью координат, которые изменяются с разными скоростями;
- неполнотой информации о скоростях изменения отдельных координат при различных условиях и режимах функционирования процессов и систем.

В данной статье рассматриваются динамические процессы, в которых выходные координаты можно измерить только в дискретные моменты времени с увеличенными периодами квантования по сравнению с малыми периодами при дискретизации входных возмущающих воздействий. К указанным процессам можно отнести финансово- и социально-экономические процессы, где выходные координаты измеряются в дискретные моменты с периодами квантования, равными декаде, месяцу, кварталу, полугодию или году. Периоды квантования фиксируемых входных возмущений соответственно равняются одним суткам, неделе или месяцу. В таком случае для описания динамики этих процессов в дискретном времени необходимо применять математические модели с разнотемповой дискретизацией координат.

В литературе описано много методов прогнозирования на основе использования временных рядов с однотемповой дискретизацией. Систематизация этих методов выполнена в работе [1], однако приведенные в ней методы не подходят для прогнозирования процессов с разнотемповой дискретизацией координат.

В работах [3, 4] описан метод прогнозирования выходной координаты модели АРСС с одготемповой дискретизацией и использованием диофантовых уравнений при синтезе цифровых регуляторов в технических системах. Данный метод не применяется для прогнозирования финансово-экономических процессов из-за неоднозначности решения диофантовых уравнений.

Цель настоящей статьи — разработка методики прогнозирования стационарных и нестационарных временных рядов с дискретизацией выходных координат с увеличенными периодами квантования и входных координат с малым базовым периодом квантования.

## I. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ И СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

### 1. Разработка разготемповой модели АРСС

Исходная одготемповая модель АРСС  $(1, n_b)$  имеет вид

$$(1 + \alpha_1 z^{-1})y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b})\xi(kT_0) + \delta, \quad (1)$$

где  $\{\xi(kT_0)\}$  — последовательность возмущений в виде дискретного белого шума с нулевым средним. Параметр  $\delta$  определяет уровень процесса. Выберем увеличенный период квантования  $h$  для дискретизации выходной координаты, который определяется соотношением

$$h = mT_0, \quad (2)$$

где  $T_0$  — базовый период квантования, а  $m$  — целое число, большее единицы.

Рассмотрим рекуррентную процедуру преобразования исходной модели (1) в разготемповую при дискретизации выходной координаты  $y$  с периодом квантования  $h$ . Для этого исходную модель (1) представим в разготемповой форме

$$y(kT_0) = -\alpha_1 y[(k-1)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots \\ \dots + b_{n_b} \xi[(k-n_b)T_0] + \delta;$$

а) при  $k=1$  получим

$$y(1T_0) = -\alpha_1 y(0T_0) + \xi(1T_0) + b_1 \xi(0T_0) + \delta;$$

б) при  $k=2$  после учета предыдущего шага

$$y(2T_0) = -\alpha_1 y(1T_0) + \xi(2T_0) + b_1 \xi(1T_0) + b_2 \xi(0T_0) + \delta = \\ = \alpha_1^2 y(0T_0) + \xi(2T_0) + (b_1 - \alpha_1) \xi(1T_0) + (b_2 - \alpha_1 b_1) \xi(0T_0) + (1 - \alpha_1) \delta;$$

в) при  $k = 3$  после учета предыдущего шага при условии  $n_b \geq 3$

$$\begin{aligned} y(3T_0) &= -\alpha_1 y(2T_0) + \xi(3T_0) + b_1 \xi(2T_0) + b_2 \xi(2T_0) + b_3 \xi(0T_0) + \delta = \\ &= -\alpha_1^3 y(0T_0) + \xi(3T_0) + (b_1 - \alpha_1) \xi(2T_0) + (\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 + b_2) \times \\ &\quad \times \xi(1T_0) + (\alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 b_2 + b_3) \xi(0T_0) + [1 - \alpha_1(1 - \alpha_1)] \delta ; \end{aligned}$$

г) при  $k = 4$  после учета предыдущего шага при условии  $n_b \geq 4$  получим

$$\begin{aligned} y(4T_0) &= -\alpha_1 y(3T_0) + \xi(4T_0) + b_1 \xi(3T_0) + b_2 \xi(2T_0) + \\ &\quad + b_3 \xi(1T_0) + b_4 \xi(0T_0) + \delta = \alpha_1^4 y(0T_0) + \xi(4T_0) + \\ &\quad + (b_1 - \alpha_1) \xi(3T_0) + (\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 + b_2) \xi(2T_0) + (-\alpha_1^3 + \alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 b_2 + b_3) \times \\ &\quad \times \xi(1T_0) + (-\alpha_1^3 b_1 + \alpha_1^2 b_2 - \alpha_1 b_3 + b_4) \xi(0T_0) + [1 + \alpha_1^2(1 - \alpha_1) - \alpha_1] \delta . \end{aligned}$$

Продолжая рекуррентную процедуру до  $k = m$  при условии, что  $m \geq n_b$ , получаем разнотемповую модель в обобщенной разностной форме

$$\begin{aligned} y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= -a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \xi(kT_0) + \\ &\quad + c_1 \xi[(k-1)T_0] + c_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + c_m \xi[(k-m)T_0] + a_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\left[\frac{k}{m}\right]$  — целое число от деления номера дискретного отсчета  $k$  на коэффициент  $m$ . Выражение (3) можно записать в виде разнотемповой модели АРСС

$$A(z_1^{-1})y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0, \quad (4)$$

где

$$A(z_1^{-1}) = 1 + a_1 z_1^{-1}, \quad (5)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_m z^{-m}. \quad (6)$$

Соотношение операторов обратного смещения в полиномах (5), (6) на основе выражения (2) будет

$$z_1^{-1} = z^{-m}. \quad (7)$$

Тогда равенство (5) примет вид

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-m}. \quad (8)$$

## 2. Устойчивость разнотемповой модели АРСС

Исходная однотемповая модель АРСС согласно (1) предполагается устойчивой, т.е. корни полинома  $(1 + \alpha_1 z^{-1}) = 0$   $|z_i| < 1$ , где  $i = 1, 2, \dots, n_a$ . При разработке разнотемповой модели АРСС (4) в процессе рекуррентной процедуры необходимо установить условия устойчивости этой модели, которые согласно (5) определяются нахождением корня  $A(z_1^{-1}) = 0$  внутри круга единичного радиуса. На основе (5) это выполняется при  $|a_1| < 1$ , так как корень  $z = -a_1$ .

Вследствие того, что исходная однотемповая модель (1) имеет характеристическое уравнение  $A(z^{-1}) = 0$  первого порядка, ее устойчивость обеспечивается при  $|a_1| < 1$ . При разработке разнотемповой модели на основе рекуррентной процедуры, приведенной в разд. 1, получим в выражении (5)

$$a_1 = (-1)^{m-1} \alpha_1^m.$$

Таким образом, если исходная однотемповая модель (1) будет устойчивой, то разнотемповая модель (4), (5), (6) также будет устойчивой.

В этом случае отсчеты выходных координат  $y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$  согласно (3) будут совпадать с отсчетами  $y(kT_0)$  в исходной модели (1) при  $kT_0 = \left[\frac{k}{m}\right]h$ .

## 3. Разработка процедуры прогнозирования на один период квантования $h$

При учете равенств (2), (7), (8) запишем (4) в виде

$$y[(r+1)h] = y[(k+m)T_0] = z^m \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}. \quad (9)$$

Для разделения влияния входных возмущений, которые действовали до настоящего времени, и на будущее составим диофантово уравнение [2, 3]:

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-m}F(z^{-1}), \quad (10)$$

на основе которого равенство (9) можно записать следующим образом:

$$y[(r+1)h] = y[(k+m)T_0] = z^m L(z^{-1}) \xi(kT_0) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{1}{A(z^{-1})} a_0. \quad (11)$$

При  $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$  из диофантового уравнения (10) при учете (8) однозначно определяется полином

$$F(z^{-1}) = -a_1 C(z^{-1}) = -a_1 (1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_m z^{-m}).$$

Так как порядок полинома  $L(z^{-1})$  равен  $m$ , то первый член в равенстве (11) представляет будущую ошибку прогнозирования на один период квантования

$$e[(k+m)T_0] = z^m L(z^{-1}) \xi(kT_0) = e[(r+1)h]. \quad (12)$$

Тогда на основе (11), принимая во внимание (12), можно записать функцию прогнозирования выходной координаты  $y$  на один период квантования  $h$ :

$$y^*[(r+1)h | rh] = \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})} = y^*[(k+m)T_0 | kT_0]. \quad (13)$$

При этом  $\xi(kT_0)$  считается известным на момент  $kT_0$  включительно.

#### 4. Разработка процедуры прогнозирования на $p$ периодов квантования $h$

При учете равенств (2), (7), (8) запишем уравнение (4) в виде

$$y[(r+p)h] = y[(k+pm)T_0] = z^{pm} \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}, \quad (14)$$

где  $p = 2, 3, \dots$

Составим диофантово уравнение

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1}) L(z^{-1}) + z^{-pm} F_p(z^{-1}), \quad (15)$$

на основе которого выражение (14) можно преобразовать к виду

$$y[(r+p)h] = y[(k+pm)T_0] = z^{pm} L(z^{-1}) \xi(kT_0) + \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}.$$

Тогда функция прогнозирования на  $p$  периодов квантования  $h$  будет аналогична (13):

$$y^*[(r+p)h | rh] = y^*[(k+pm)T_0 | kT_0] = \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}, \quad (16)$$

а ошибка прогнозирования

$$e[(r+p)h] = e[(k+pm)T_0] = z^{pm} L(z^{-1}) \xi(kT_0).$$

Определение полинома  $F_p(z^{-1})$  рассмотрим на основе разнотемповой модели процесса (4), (5), (8)

$$(1 + a_1 z^{-m})y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0. \quad (17)$$

При прогнозировании на  $2m$  периодов  $T_0$  при  $p = 2$  диофантово уравнение (15) запишется в виде

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-2m}F_p(z^{-1}).$$

Выбираем полином  $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m})C(z^{-1})$ . Тогда из диофантового уравнения однозначно определяется  $F_p(z^{-1}) = a_1^2 C(z^{-1})$ .

При прогнозировании на  $3m$  периодов  $T_0$  при  $p = 3$  запишем диофантово уравнение

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-3m}F_p(z^{-1}).$$

При выборе полинома  $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m} + a_1^2 z^{-2m})C(z^{-1})$  полином  $F_p(z^{-1})$  однозначно определяется

$$F_p(z^{-1}) = -a_1^3 c(z^{-1}).$$

При прогнозировании на  $4m$  периодов  $T_0$  при  $p = 4$  диофантово уравнение будет

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-4m}F_p(z^{-1}).$$

Выбираем полином  $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m} + a_1^2 z^{-2m} - a_1^3 z^{-3m})C(z^{-1})$ , тогда полином  $F_p(z^{-1}) = a_1^4 C(z^{-1})$ .

Таким образом, при прогнозировании выходной координаты процесса (17) на  $p$  периодов квантования  $h$  согласно функции (16) полином  $F_p(z^{-1})$  будет определяться однозначно из диофантового уравнения (15) в следующем виде:

$$F_p(z^{-1}) = (-1)^p a_1^p C(z^{-1}). \quad (18)$$

Определим на основе (14), (16) дисперсию ошибки прогнозирования при  $a_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} & M \{ y[(r+p)h] - y^*[(r+p)h | rh] \}^2 = \\ & = M \left\{ z^{pm} \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) - \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) \right\}^2 = \\ & = M \left\{ z^{pm} \frac{[A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-pm}F_p(z^{-1})]}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) \right\}^2 = M \left\{ L(z^{-1}) \xi[k + pm]T_0 \right\} +$$

$$\left. + \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) - \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) \right\}^2 = M \left\{ L(z^{-1}) \xi[(k + pm)T_0] \right\}^2,$$

где  $M$  — оператор математического ожидания.

Таким образом, использование функции прогнозирования (16) обеспечивает минимизацию дисперсии ошибки прогнозирования выходной координаты  $y$  на  $p$  периодов квантования  $h$ .

**Пример 1.** Динамический процесс представлен однопериодной моделью АРСС первого порядка

$$(1 + \alpha_1 z^{-1})y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1})\xi(kT_0),$$

где  $\alpha_1 = -0,9802$ ;  $b_1 = -0,5$ . Эта модель получена из непрерывной модели первого порядка с постоянной времени  $T = 800$  с при выбранном базовом периоде квантования  $T_0 = 16$  с.

Необходимо разработать процедуру прогнозирования координаты  $y$  на период квантования  $h = 5T_0 = 80$  с.

Запишем исходную модель в разностной форме

$$y(kT_0) = -\alpha_1 y[(k-1)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0].$$

На основе рекуррентной процедуры, приведенной в подразделе 1, при  $k = 5$  получим разнотемповую модель в обобщенной разностной форме

$$y\left[\left[\frac{k}{5}\right]h\right] = -\alpha_1^5 y\left[\left(\left[\frac{k}{5}\right]-1\right)h\right] + \xi(kT_0) +$$

$$+ (b_1 - \alpha_1) \xi[(k-1)T_0] - \alpha_1(b_1 - \alpha_1) \xi[(k-2)T_0] +$$

$$+ \alpha_1^2(b_1 - \alpha_1) \xi[(k-3)T_0] - \alpha_1^3(b_1 - \alpha_1) \xi[(k-4)T_0] + \alpha_1^4 b_1 \xi[(k-5)T_0], \quad (19)$$

где  $\left[\frac{k}{5}\right]$  — целое число от деления номера отсчета  $k$  на 5. При подстановке значений коэффициентов  $d_1$ ,  $b_1$  эта модель примет вид

$$y\left[\left[\frac{k}{5}\right]h\right] = 0,9048 y\left[\left(\left[\frac{k}{5}\right]-1\right)h\right] + \xi(kT_0) +$$

$$+ 0,4802 \xi[(k-1)T_0] + 0,47069 \xi[(k-2)T_0] +$$

$$+ 0,46137 \xi[(k-3)T_0] + 0,45223 \xi[(k-4)T_0] - 0,46156 \xi[(k-5)T_0].$$

Запишем это выражение в форме разнотемповой модели АРСС

$$A(z^{-1})y\left[\left[\frac{k}{5}\right]h\right] = C(z^{-1})\xi(kT_0),$$

где  $A(z^{-1}) = 1 - 0,9048z^{-5}$ ;  $C(z^{-1}) = (1 + 0,4802z^{-1} + 0,47069z^{-2} + 0,46137z^{-3} + 0,45223z^{-4} - 0,46156z^{-5})$ .

Составим диофантово уравнение

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-5}F(z^{-1}),$$

из которого при  $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$  определяем полином  $F(z^{-1}) = 0,9048 + 0,4344z^{-1} + 0,42588z^{-2} + 0,41744z^{-3} + 0,40917z^{-4} - 0,41762z^{-5}$ .

Тогда на основе (13) можно выполнить прогнозирование выходной координаты на  $1h = 5T_0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} y^*[(r+1)h | rh] &= y^*[(k+5)T_0 | kT_0] = \\ &= 0,9048 y(rh) + 0,9048 \xi(kT_0) + 0,4344 \xi[(k-1)T_0] + \\ &+ 0,42588 \xi[(k-2)T_0] + 0,41744 \xi[(k-3)T_0] + \\ &+ 0,40917 \xi[(k-4)T_0] - 0,41762 \xi[(k-5)T_0]. \end{aligned} \quad (20)$$

Результаты цифрового моделирования разнотемповой модели (19) и прогнозируемого значения  $y^*[(r+1)h | rh]$  (20) приведены на рис. 1 при подаче на вход дополнительного единичного ступенчатого возмущения.

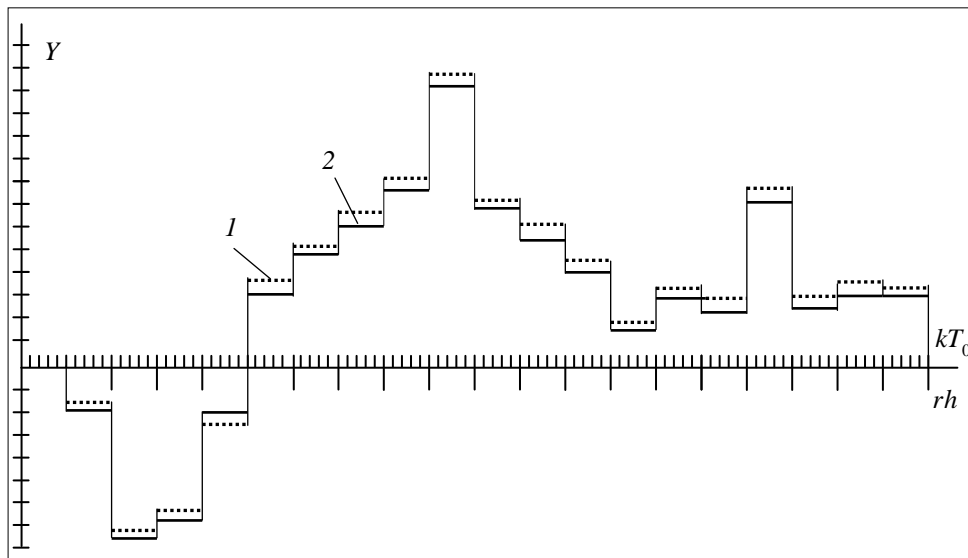


Рис. 1. Графики моделирования выходной переменной (1) и их прогнозируемых значений (2) разнотемповой одномерной системы



## II. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Разнотемповая многомерная дискретная модель АРСС представлена в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_2^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

При этом соотношение периодов квантования для дискретных отсчетов выходных координат будет следующее:

$$h_i = m_i T_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

где  $m_i$  — целое число, большее единицы. Тогда соотношение операторов обратного сдвига

$$z_i^{-1} = z^{-m_i}, \quad (23)$$

где  $z^{-1}$  — оператор обратного сдвига на один период квантования  $T_0$ ;  $z_i^{-1}$  — оператор обратного сдвига на один период  $h_i$ . Структура полиномов в модели (17) имеет вид

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1i} z_i^{-1}, \quad (24)$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1ij} z^{-1} + c_{2ij} z^{-2} + \dots + c_{m_{ij}} z^{-m}, \quad (25)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, n).$$

При этом предполагается, что  $\xi_i(kT_0)$  — это дискретный белый шум, а  $a_{0i}$  — смещение  $i$ -й выходной координаты, равное  $A_{ii}(1)u_{i_{cp}}$ .

На основе равенства (23) динамические полиномы  $A_{ii}(z_i^{-1})$  можно представить через базовый оператор  $z$  следующим образом:

$$A_{ii}(z^{-1}) = 1 + a_{1i} z^{-m_i}. \quad (26)$$

Разрешим дискретную модель (21) относительно  $y_i(r_i h_i)$ :

$$\begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Умножим левую и правую части на  $\text{diag}\{z^{+p_i m_i}\}$

$$\begin{bmatrix} y_1[(r_1 + p_1)h_1] \\ \vdots \\ y_n[(r_n + p_n)h_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \times \right. \\ \times \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix} \left. \right\}. \quad (28)$$

С учетом (23), при котором  $A_{ii}(z^{-1})$  определяется согласно (26), составим следующее диофантово уравнение:

$$\begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \cdots & L_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \cdots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{-p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \right]. \quad (29)$$

С помощью(29) и с учетом (26) определим первую составляющую правой части модели (28):

$$\begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times \\
 & \times \left\{ \begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \dots & L_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \dots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \right\} + \\
 & + \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{-p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \dots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \dots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \dots & L_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \dots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \dots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \dots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Первая составляющая в правой части этого выражения представляет вектор будущих ошибок  $\{e_1[(k + p_1 m_1)T_0], \dots, e_n[(k + p_n m_n)T_0]\}^T$ .

Если выражение (30) подставить в уравнение (28), то будущее значение выходных координат

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} y_1[(r_1 + p_1)h_1] \\ \vdots \\ y_n[(r_n + p_n)h_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \dots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \dots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1[(k + p_1 m_1)T_0] \\ \vdots \\ e_n[(k + p_n m_n)T_0] \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1^*[(r_1 + p_1)h_1 | r_1 h_1] \\ \vdots \\ y_n^*[(r_n + p_n)h_n | r_n h_n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1[(k + p_1 m_1)T_0] \\ \vdots \\ e_n[(k + p_n m_n)T_0] \end{bmatrix},$$

где прогнозируемые значения выходных координат

$$\begin{bmatrix} y_1^*[(r_1 + p_1)h_1 | r_1 h_1] \\ \vdots \\ y_n^*[(r_n + p_n)h_n | r_n h_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

В этом выражении прогнозируемый вектор измерения согласно (22) равен

$$\begin{bmatrix} y_1^*[(r_1 + p_1)h_1 | r_1 h_1] \\ \vdots \\ y_n^*[(r_n + p_n)h_n | r_n h_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^*[(k + p_1 m_1)T_0 | kT_0] \\ \vdots \\ y_n^*[(k + p_n m_n)T_0 | kT_0] \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Тогда на основе (23), (24) каждую составляющую  $y_j^*[(r_j + p_j)h_j | r_j h_j]$  необходимо вычислять на основе разностной рекуррентной процедуры

$$y_j^*[(r_j + p_j)h_j | r_j h_j] = -a_1 y_j^*[(r_j + p_j - 1)h_j | r_j h_j] +$$

$$+ F_{j1}(z^{-1})\xi_1(kT_0) + \dots + F_{jn}(z^{-1})\xi_n(kT_0) + a_{0j}.$$

Определение матричного полинома

$$\begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

выполняется путем решения матричного диофантового уравнения (29), которое можно представить в форме одномерных диофантовых уравнений

$$C_{ij}(z^{-1}) = A_{ii}(z^{-1})L_{ij}(z^{-1}) + z^{-p_i m_i} F_{ij}(z^{-1})$$

при  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Эти уравнения решаются относительно полиномов  $F_{ij}(z^{-1})$  при заданных  $p_i$  и полиномах  $C_{ij}(z^{-1})$ ,  $A_{ii}(z^{-1})$  согласно методике, изложенной в подразделе 4, т. е.

$$F_{ij}(z^{-1}) = (-1)^{p_i} a_{1_{ii}}^{p_i} C_{ij}(z^{-1}). \quad (33)$$

**Пример 2.** Динамический процесс представлен двухмерной однополовой моделью АРСС

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(kT_0) \\ y_2(kT_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(z^{-1}) & B_{12}(z^{-1}) \\ B_{21}(z^{-1}) & B_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

где

$$A_{11}(z^{-1}) = (1 + \alpha_1 z^{-1}) = (1 - 0,9802 z^{-1});$$

$$A_{22}(z^{-1}) = (1 + \alpha_2 z^{-1}) = (1 - 0,99 z^{-1});$$

$$B_{11}(z^{-1}) = (1 + b_{11} z^{-1}) = (1 - 0,5 z^{-1}); \quad B_{12}(z^{-1}) = (1 + b_{12} z^{-1}) = (1 + 0,6 z^{-1});$$

$$B_{21}(z^{-1}) = (1 + b_{21} z^{-1}) = (1 - 0,7 z^{-1}); \quad B_{22}(z^{-1}) = (1 + b_{22} z^{-1}) = (1 - 0,45 z^{-1}).$$

При разработке данной модели применен базовый период квантования  $T_0 = 16$  с.

### Постановка задачи

1. Разработать разнотемповую модель при дискретизации координаты  $y_1$  с периодом квантования  $h_1 = m_1 T_0 = 80$  с, а координаты  $y_2$  с периодом квантования  $h_2 = m_2 T_0 = 160$  с, где  $m_1 = 5$ ,  $m_2 = 10$ .

2. Выполнить процедуру прогнозирования координаты  $y_1$  на период квантования  $h_1$ , а координаты  $y_2$  — на период  $h_2$  вперед.

**Решение.** На основе рекуррентной процедуры, приведенной в подразделе 1, из исходной модели (34) получена разнотемповая модель процесса

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \left[ \left[ \frac{k}{5} \right] h_1 \right] \\ y_2 \left[ \left[ \frac{k}{10} \right] h_2 \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

где  $A_{11}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1^5 z^{-5}$ ;  $A_{22}(z^{-1}) = 1 + \alpha_2^{10} z^{-10}$ ;

$$\begin{aligned}
 C_{11}(z^{-1}) &= 1 + (b_{11} - \alpha_1)z^{-1} - \alpha_1(b_{11} - \alpha_1)z^{-2} + \\
 &+ \alpha_1^2(b_{11} - \alpha_1)z^{-3} - \alpha_1^3(b_{11} - \alpha_1)z^{-4} + \alpha_1^4 b_{11} z^{-5}; \\
 C_{12}(z^{-1}) &= 1 + (b_{12} - \alpha_1)z^{-1} - \alpha_1(b_{12} - \alpha_1)z^{-2} + \\
 &+ \alpha_1^2(b_{12} - \alpha_1)z^{-3} - \alpha_1^3(b_{12} - \alpha_1)z^{-4} + \alpha_1^4 b_{12} z^{-5}; \\
 C_{21}(z^{-1}) &= 1 + (b_{21} - \alpha_2)z^{-1} - \alpha_2(b_{21} - \alpha_1)z^{-2} + \\
 &+ \alpha_2^2(b_{21} - \alpha_2)z^{-3} - \alpha_2^3(b_{21} - \alpha_2)z^{-4} + \alpha_2^4(b_{21} - \alpha_2)z^{-5} - \alpha_2^5(b_{21} - \alpha_2)z^{-6} + \\
 &+ \alpha_2^6(b_{21} - \alpha_2)z^{-7} - \alpha_2^7(b_{21} - \alpha_2)z^{-8} + \alpha_2^8(b_{21} - \alpha_2)z^{-9} - \alpha_2^9 b_{21} z^{-10}; \\
 C_{22}(z^{-1}) &= 1 + (b_{22} - \alpha_2)z^{-1} - \alpha_2(b_{22} - \alpha_2)z^{-2} + \alpha_2^2(b_{22} - \alpha_2)z^{-3} - \\
 &- \alpha_2^3(b_{22} - \alpha_2)z^{-4} + \alpha_2^4(b_{22} - \alpha_2)z^{-5} - \alpha_2^5(b_{22} - \alpha_2)z^{-6} + \\
 &+ \alpha_2^6(b_{22} - \alpha_2)z^{-7} - \alpha_2^7(b_{22} - \alpha_2)z^{-8} + \alpha_2^8(b_{22} - \alpha_2)z^{-9} - \alpha_2^9 b_{22} z^{-10},
 \end{aligned}$$

где  $z^{-1}$  — оператор обратного сдвига на один период квантования  $T_0$ .

При подстановке значений коэффициентов с учетом равенств (22), (23) запишем модель (35) в разностной форме по двум каналам:

$$\begin{aligned}
 y_1 \left[ \left[ \frac{k}{5} \right] h_1 \right] &= 0,9048 y_1 \left[ \left( \left[ \frac{k}{5} \right] - 1 \right) h_1 \right] + \xi(kT_0) + \\
 &+ 0,4802 \xi_1[(k-1)T_0] + 0,47069 \xi_1[(k-2)T_0] + \\
 &+ 0,46137 \xi_1[(k-3)T_0] + 0,45223 \xi_1[(k-4)T_0] - \\
 &- 0,46156 \xi_1[(k-5)T_0] + \xi_2(kT_0) + 1,5802 \xi_2[(k-1)T_0] + \\
 &+ 1,5489 \xi_2[(k-2)T_0] + 1,51824 \xi_2[(k-3)T_0] + \\
 &+ 1,48818 \xi_2[(k-4)T_0] + 0,55387 \xi_2[(k-5)T_0]. \tag{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 \left[ \left[ \frac{k}{10} \right] h_2 \right] &= 0,90438 y_2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{10} \right] - 1 \right) h_2 \right] + \xi_1(kT_0) + \\
 &+ 0,29 \xi_1[(k-1)T_0] + 0,2871 \xi_1[(k-2)T_0] + 0,2842 \xi_1[(k-3)T_0] + \\
 &+ 0,28138 \xi_1[(k-4)T_0] + 0,27857 \xi_1[(k-5)T_0] + 0,2558 \xi_1[(k-6)T_0] + \\
 &+ 0,273 \xi_1[(k-7)T_0] + 0,2703 \xi_1[(k-8)T_0] + 0,26759 \xi_1[(k-9)T_0] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -0,2649\xi_1[(k-10)T_0] + \xi_2(kT_0) + 0,54\xi_2[(k-1)T_0] + 0,5346\xi_2[(k-2)T_0] + \\
 & + 0,52925\xi_2[(k-3)T_0] + 0,52396\xi_2[(k-4)T_0] + \\
 & + 0,51872\xi_2[(k-5)T_0] - 0,51353\xi_2[(k-6)T_0] + \\
 & + 0,50839\xi_2[(k-7)T_0] + 0,5033\xi_2[(k-8)T_0] + \\
 & + 0,49828\xi_2[(k-9)T_0] - 0,41107\xi_2[(k-10)T_0]. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Составим диофантово уравнение в матричной форме:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & L_{12}(z^{-1}) \\ L_{21}(z^{-1}) & L_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} z^{-5} & 0 \\ 0 & z^{-10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & F_{12}(z^{-1}) \\ F_{21}(z^{-1}) & F_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

из которого при  $L_{11}(z^{-1}) = C_{11}(z^{-1})$ ,  $L_{12}(z^{-1}) = C_{12}(z^{-1})$ ,  $L_{21}(z^{-1}) = C_{21}(z^{-1})$ ,  $L_{22}(z^{-1}) = C_{22}(z^{-1})$  определяем полиномы

$$\begin{aligned}
 F_{11}(z^{-1}) &= -\alpha_1^5 - \alpha_1^5(b_{11} - \alpha_1)z^{-1} + \alpha_1^6(b_{11} - \alpha_1)z^{-2} - \\
 & - \alpha_1^7(b_{11} - \alpha_1)z^{-3} + \alpha_1^8(b_{11} - \alpha_1)z^{-4} - \alpha_1^9 b_{11} z^{-5}, \\
 F_{12}(z^{-1}) &= -\alpha_1^5 - \alpha_1^5(b_{12} - \alpha_1)z^{-1} + \alpha_1^6(b_{12} - \alpha_1)z^{-2} - \\
 & - \alpha_1^7(b_{12} - \alpha_1)z^{-3} + \alpha_1^8(b_{12} - \alpha_1)z^{-4} - \alpha_1^9 b_{12} z^{-5}, \\
 F_{21}(z^{-1}) &= \alpha_2^{10} + \alpha_2^{10}(b_{21} - \alpha_2)z^{-1} - \alpha_2^{11}(b_{21} - \alpha_2)z^{-2} + \\
 & + \alpha_2^{12}(b_{21} - \alpha_2)z^{-3} - \alpha_2^{13}(b_{21} - \alpha_2)z^{-4} + \alpha_2^{14}(b_{21} - \alpha_2)z^{-5} - \\
 & - \alpha_2^{15}(b_{21} - \alpha_2)z^{-6} + \alpha_2^{16}(b_{21} - \alpha_2)z^{-7} - \alpha_2^{17}(b_{21} - \alpha_2)z^{-8} + \\
 & + \alpha_2^{18}(b_{21} - \alpha_2)z^{-9} - \alpha_2^{19} b_{21} z^{-10}, \\
 F_{22}(z^{-1}) &= \alpha_2^{10} + \alpha_2^{10}(b_{22} - \alpha_2)z^{-1} - \alpha_2^{11}(b_{22} - \alpha_2)z^{-2} + \alpha_2^{12}(b_{22} - \alpha_2)z^{-3} - \\
 & - \alpha_2^{13}(b_{22} - \alpha_2)z^{-4} + \alpha_2^{14}(b_{22} - \alpha_2)z^{-5} - \alpha_2^{15}(b_{22} - \alpha_2)z^{-6} + \\
 & + \alpha_2^{16}(b_{22} - \alpha_2)z^{-7} - \alpha_2^{17}(b_{22} - \alpha_2)z^{-8} + \alpha_2^{18}(b_{22} - \alpha_2)z^{-9} - \alpha_2^{19} b_{22} z^{-10}.
 \end{aligned}$$

Тогда на основе (31) можно выполнить прогнозирование выходных координат в разностной форме при разнотемповой дискретизации координат:

$$\begin{aligned}
 y_1^* \left[ \left( \left[ \frac{k}{5} \right] + 1 \right) h_1 \mid \left[ \frac{k}{5} \right] h_1 \right] &= 0,9048 y_1 \left[ \left[ \frac{k}{5} \right] h_1 \right] + 0,9048 \xi_1(kT_0) + \\
 &+ 0,43488 \xi_1[(k-1)T_0] + 0,42587 \xi_1[(k-2)T_0] + \\
 &+ 0,41744 \xi_1[(k-3)T_0] + 0,40917 \xi_1[(k-4)T_0] - \\
 - 0,41762 \xi_1[(k-5)T_0] &+ 0,9048 \xi_2(kT_0) + 1,42976 \xi_2[(k-1)T_0] + \\
 &+ 1,40145 \xi_2[(k-2)T_0] + 1,3737 \xi_2[(k-3)T_0] + \\
 &+ 1,3465 \xi_2[(k-4)T_0] + 0,50114 \xi_2[(k-5)T_0]. \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2^* \left[ \left( \left[ \frac{k}{10} \right] + 1 \right) h_2 \mid \left[ \frac{k}{10} \right] h_2 \right] &= 0,90438 y_2 \left[ \left[ \frac{k}{10} \right] h_2 \right] + \\
 &+ 0,90438 \xi_1(kT_0) + 0,26227 \xi_1[(k-1)T_0] + 0,25964 \times \\
 \times \xi_1[(k-2)T_0] &+ 0,25705 \xi_1[(k-3)T_0] + 0,25448 \xi_1[(k-4)T_0] + \\
 + 0,25193 \xi_1[(k-5)T_0] &+ 0,24941 \xi_1[(k-6)T_0] + 0,24692 \xi_1[(k-7)T_0] + \\
 &+ 0,24445 \xi_1[(k-8)T_0] + 0,242 \xi_1[(k-9)T_0] - \\
 - 0,57831 \xi_1[(k-10)T_0] &+ 0,90438 \xi_2(kT_0) + \\
 + 0,48836 \xi_2[(k-1)T_0] &+ 0,48348 \xi_2[(k-2)T_0] + \\
 + 0,47864 \xi_2[(k-3)T_0] &+ 0,47386 \xi_2[(k-4)T_0] + \\
 + 0,46912 \xi_2[(k-5)T_0] &+ 0,46443 \xi_2[(k-6)T_0] + \\
 + 0,46443 \xi_2[(k-7)T_0] &+ 0,45978 \xi_2[(k-8)T_0] + \\
 + 0,45063 \xi_2[(k-9)T_0] &- 0,37177 \xi_2[(k-10)T_0]. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Результаты цифрового моделирования разнотемповой модели (36), (37) и прогнозируемых значений выходных координат (38), (39) при дополнительной подаче на входы единичных ступенчатых возмущений приведены на рис. 2.



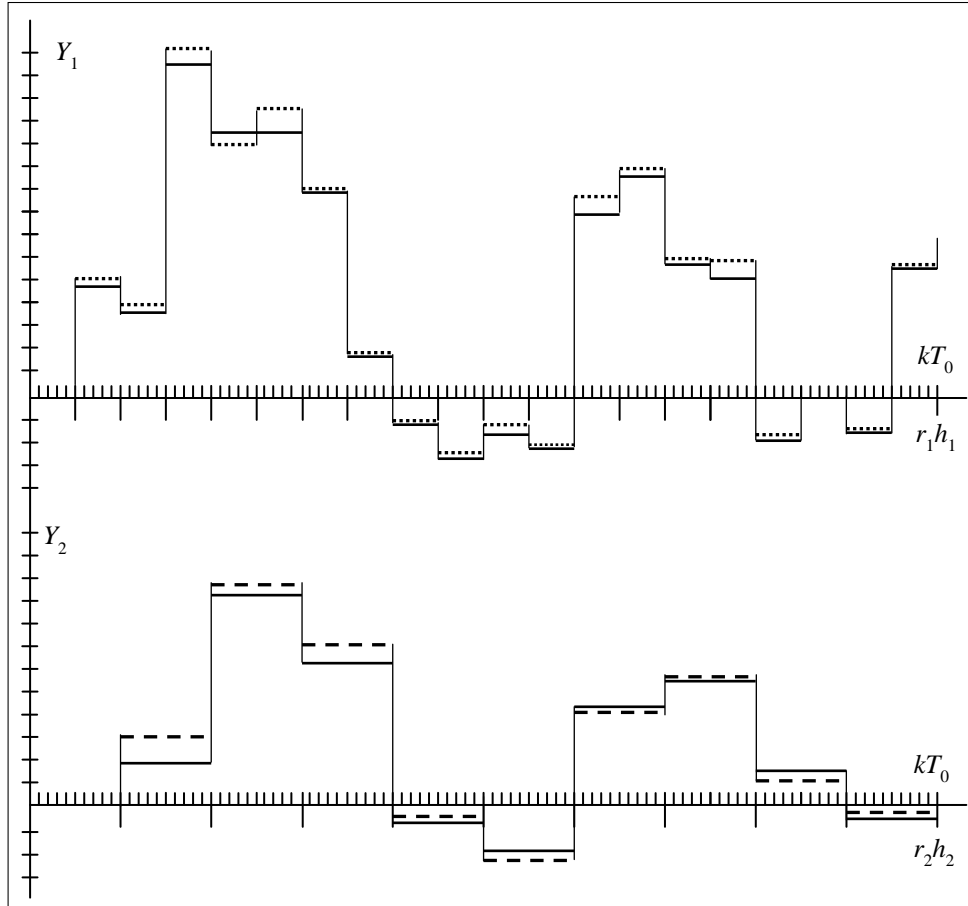


Рис. 2. Графики моделирования выходных переменных ( .....  $Y_1$ , - - -  $Y_2$  ) и их прогнозируемых значений ( — ) разнотемповой двухмерной системы

### III. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Динамика нестационарного процесса относительно тренда представлена математической моделью АРИССс разнотемповой дискретизацией

$$A(z_1^{-1})\nabla y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0, \quad (40)$$

где первая разность  $\nabla y(rh) = y(rh) - y[(r-1)h]$ . Полином  $A(z_1^{-1})$  имеет вид (5), а

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}. \quad (41)$$

Соотношение периодов квантования в (40) представлено выражением (2), при котором операторы обратного смещения в полиномах  $A(z_1^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$

связаны соотношением (7). В результате полином  $A(z_1^{-1})$  можно записать через оператор  $z$ , соответствующий базовому периоду квантования  $T_0$ , на основе выражения (8). На основе равенств (2), (5), (7), (8) запишем уравнение АРИСС (40) в форме

$$(1 - z^{-m})A(z^{-1})y(kT_0) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0.$$

Представим это выражение в виде

$$\begin{aligned} y[(k+m)T_0] &= y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = \\ &= z^m \frac{C(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (42)$$

Составим диофантово уравнение

$$C(z^{-1}) = (1 - z^{-m})A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-m}F(z^{-1}), \quad (43)$$

на основе которого выражение (42) можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} y[(k+m)T_0] &= y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = \\ &= z^m L(z^{-1})\xi(kT_0) + \frac{F(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (44)$$

Первое слагаемое в правой части (44) представляет собой ошибку предсказания выходного сигнала  $y$  на  $m$  периодов квантования  $T_0$  или один период квантования  $h$ , т.е.

$$e[(k+m)T_0] = e\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = z^m L(z^{-1})\xi(kT_0).$$

Тогда прогнозируемое значение выходного сигнала будет

$$\begin{aligned} y^*[(k+m)T_0 | kT_0] &= y^*\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h \mid \left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \\ &= \frac{F(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (45)$$

Полином  $F(z^{-1})$  однозначно определяется из диофантового уравнения (43) при  $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$  на основе  $(1 - a_1 + a_1 z^{-m})C(z^{-1})$ .

## ВЫВОДЫ

1. Разработана методика среднесрочного и долгосрочного прогнозирования выходных координат динамических процессов на основе одномерных и многомерных математических моделей авторегрессии и скользящего среднего, а также авторегрессии и интегрированного скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией.

2. Для решения поставленной задачи разработаны:

- Одномерная модель авторегрессии и скользящего среднего с дискретизацией входной координаты с малым периодом квантования и выходной координаты с большим периодом квантования. Рассмотрены условия устойчивости этой модели.

- Процедуры прогнозирования выходной координаты разнотемповой модели АРСС на один и на  $p$  больших периодов квантования на основе использования диофантовых уравнений. При этом обеспечивается однозначное решение диофантовых уравнений.

- Процедура прогнозирования выходных координат многомерной модели авторегрессии и скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией при различной размерности векторов координат на входе и выходе. При этом обеспечивается прогнозирование различных составляющих вектора выходных координат на различные сроки.

3. Получены функции прогнозирования нестационарных процессов на основе моделей авторегрессии и интегрированного скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией.

4. Проведено экспериментальное исследование разработанной методики прогнозирования на основе цифрового моделирования, которое подтвердило высокую точность прогнозирования для одно- и двухмерных процессов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88–110.
2. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 319 с.
3. Clarke D.W., Phil M.A.D., Gawthrop P.J. Self-tuning controller // Proc. of the IEE: Contr. scie. — 1975. — 122, № 9. — P. 929 – 935.

Поступила 10. 12. 2004