

**Кобец А.С.**, д-р економ. наук, професор  
(ДГАЭУ),

**Дырда В.И.**, д-р техн. наук, професор  
(ИГТМ НАН України),

**Кобец А.Н.**, канд. техн. наук, доцент,

**Толстенко А.В.**, канд. техн. наук  
(ДГАЭУ)

## **ОБОБЩЁННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В МЕТОДАХ РАСЧЁТА ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН**

**Кобець А.С.**, д-р економ. наук, професор  
(ДДАЕУ),

**Дирда В.І.**, д-р техн. наук, професор  
(ИГТМ НАН України),

**Кобець О.М.**, канд. техн. наук, доцент,

**Толстенко О.В.**, канд. техн. наук  
(ДДАЕУ)

## **УЗАГАЛЬНЕНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У МЕТОДАХ РОЗРАХУНКУ ВІБРОІЗОЛЯЦІЇ МАШИН**

**Kobets A.S.**, D. Sc. (Ec.), Professor  
(DSAEU),

**Dyrda V.I.**, D. Sc. (Tech.), Professor  
(IGTM NAS of Ukraine),

**Kobets A.N.**, Ph. D. (Tech.), Associate Professor

**Tolstenko A.V.**, Ph. D. (Tech.)  
(DSAEU)

## **GENERALIZED MATHEMATICAL MODELS IN METHODS FOR CALCULATING VIBRATION INSULATION OF MACHINES**

**Аннотация.** Рассматриваются две математические модели, наиболее полно соответствующие существующим физическим моделям и динамическим процессам, протекающим в реальных машинах. Первая модель на основе уравнения Фоккера-Планка учитывает нелинейность системы виброизоляции и стохастичность стационарных колебаний; она обладает сложностью и не совсем полно учитывает реологические характеристики материала, в том числе влияние старения и воздействие внешней агрессивной среды. Вторая модель на основе интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра достаточно полно учитывает и реологические характеристики материала, и нелинейность, и стохастичность колебаний. В качестве примера рассмотрена динамика одномассной системы, упругие характеристики которой изменяются со временем работы; повреждённость материала определяется методом Валпола. Отмечается удовлетворительное совпадение расчётных и экспериментальных результатов.

**Ключевые слова:** уравнение Фоккера-Планка, модель Больцмана-Вольтерра, реологические характеристики резин, динамика упругой системы

Виброизоляции машин и оборудования посвящена многочисленная литература, часть из которой цитируется ниже [1]. На некоторые системы и сред-

ства виброизоляции имеются государственные стандарты. Вместе с тем проблема защиты операторов, машин, приборов, аппаратуры, зданий и сооружений от действия вибраций и звукового давления по-прежнему остаётся актуальной.

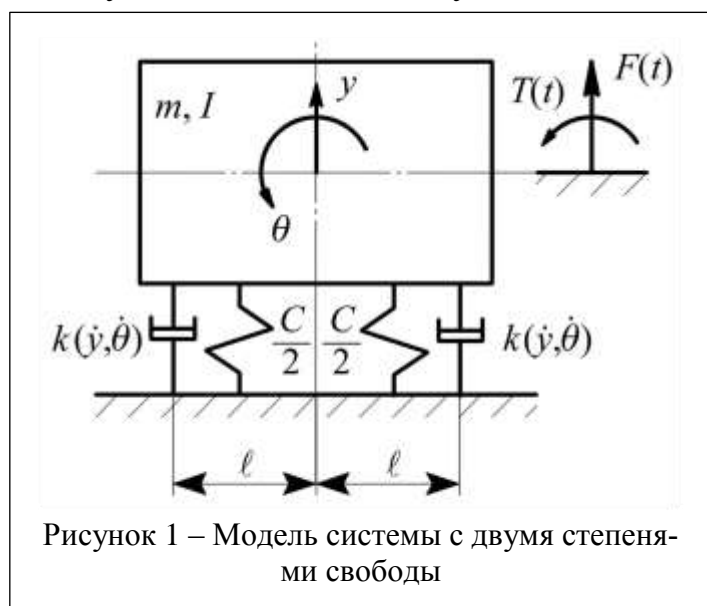
Особенно важной она является для таких сложных технических систем, как предприятия строительной и горно-обогатительной промышленности, в которых тяжёлое оборудование устанавливается в определённой последовательности согласно технологическим требованиям; при этом довольно часто машины устанавливаются в трёхмерном пространстве: например, смесители могут быть размещены на перекрытиях на отметке +18 м и т.д.

При этом виброн нагружаемость оборудования довольно значительна, а спектр частот включает весь диапазон от низких до высоких. Колебания носят чаще всего случайный характер типа белого шума и в первом приближении их можно рассматривать как квазигармонические.

Ниже рассматриваются некоторые вопросы виброизоляции тяжёлых горно-обогатительных машин, работающих в экстремальных условиях. В процессе эксплуатации такие машины испытывают стационарные динамические нагрузки, действие агрессивной среды от перерабатываемого материала и нередко довольно значительный перепад температур. К ним относятся смесители, окомкователи – смесители, дробилки, вибрационные питатели, грохоты и т.д. Во всех этих машинах вибрация приводит к увеличению динамических напряжений в деталях и узлах, к повышенному звуковому давлению, к ухудшению технологии переработки материала и качества исходного продукта; вибрация приводит к интенсивному износу деталей, отрицательно сказывается на строительных конструкциях аглофабрик и зачастую является основной причиной разрушения фундаментов.

Кинематическую схему таких машин в общем случае можно представить в виде одномассной системы (рисунок 1) с упруго-вязкой подвеской и двумя степенями свободы: поступательные и угловые колебания от вращения ротора и от движения загрузки. Математическая модель системы должна по возможности описывать как поступательные, так и угловые колебания и учитывать влияние нелинейных и диссипативных сил. Основным источником нелинейности машин рассматриваемого типа является нелинейная характеристика возмущающей силы и нелинейность упругой подвески.

Наиболее подходящей является нелинейная стохастическая модель с двумя степенями свободы; в качестве основной характеристики системы можно использовать коэффициент динамической жёсткости, определяемый по среднеквадратическому значению



случайных вынужденных колебаний.

Рассмотрим две математические модели, которые на наш взгляд, наиболее полно соответствуют физической модели (рис. 1) и динамическим процессам, протекающим в реальных машинах. Первая модель на основе уравнения Фоккера-Планка учитывает нелинейность упругой подвески и стохастичность стационарных колебаний. Она обладает сложностью и не совсем полно учитывает реологические характеристики материала виброизоляторов, что сказывается на точности определения амплитудно-частотных и фазовых характеристик систем, особенно в переходных режимах.

Вторая модель на основе интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра достаточно полно учитывает и реологические характеристики материала, и нелинейность упругой подвески, и стохастичность колебаний.

**Обобщённая математическая нелинейная стохастическая модель на основе уравнения Фоккера-Планка.** Практика испытаний рассматриваемых машин показывает, что стационарные случайные колебания в них весьма близки к гармоническим и в общем случае могут быть представлены в виде процессов типа белого шума. Обычно процессы белого шума относят к процессам со спектральной плотностью, близкой к постоянной в широкой полосе частот.

Поэтому вынужденные стационарные колебания смесителя приближённо можно представить в виде марковского процесса в пространстве переменных состояния. Анализ таких колебаний в исследовательской работе можно проводить на основе уравнения Фоккера-Планка.

Для модели (рис. 1) стохастические дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = F(t); \quad (1)$$

$$I\ddot{\theta} + k\ell^2\dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = M(t), \quad (2)$$

или в общепринятом виде

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + c(y)y = F(t); \quad (3)$$

$$I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + c(\theta)\theta = M(t). \quad (4)$$

С учётом известных преобразований получим

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_1^2 y = \frac{F(t)}{m}, \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + p_1^2 \theta = \frac{M(t)}{I}. \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$p_1^2 = \frac{k(y)g}{W} = \frac{c(y)}{m}; \quad 2n = \frac{k(y)g}{W} = \frac{k(y)}{m}; \quad (7)$$

$$p_1^2 = \frac{c(\theta)}{I}; \quad 2n = \frac{k(\theta)}{I}, \quad (8)$$

где  $c(y)$  – коэффициент нелинейной статической жёсткости упругой подвески;  $p_1(y)$  – собственная частота колебаний нелинейной системы;  $m$  – инерционный коэффициент (обобщённая масса);  $y = y(t)$  – обобщённая координата поступательного движения;  $\theta = \theta(t)$  – обобщённая координата углового движения;  $k$  – сила вязкого сопротивления, пропорциональная скорости;  $W$  – вес машины;  $g$  – ускорение свободного падения;  $F(t)$ ,  $M(t)$  – случайно изменяющиеся во времени составляющие возмущающей силы и момента соответственно;  $I$  – массовый момент инерции обобщённой массы;  $V$  – потенциальная энергия нелинейной упругой подвески;  $\ell$  – расстояние между центром тяжести системы и элементами упругой подвески.

Для системы уравнений (5) и (6) в работе [2] получено уравнение Фоккера-Планка в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & D_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} + D_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_4^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} (x_3 p) - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_4 p) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \left( p^2 x_3 + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) p \right] + \frac{\partial}{\partial x_4} \left[ \left( \gamma x_4 + \frac{1}{I} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) p \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\dot{x}_1 = x_3$ ,  $\dot{x}_2 = x_4$ ,  $\dot{x}_3 = -(2n)^2 x_3 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x_1} + f(t)$ ,  $\dot{x}_4 = -\gamma x_4 - \frac{1}{I} \frac{\partial V}{\partial x_2} + T(t)$ .

Здесь  $x_1 = y$ ;  $x_2 = \theta$ ;  $x_3 = \dot{y}$ ;  $x_4 = \dot{\theta}$ ,  $2n = \frac{k}{m}$ ;  $\gamma = \frac{k\ell^2}{I}$ ;  $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ ;  $T(t) = \frac{M(t)}{I}$ .

В уравнении (9) совокупность переменных состояния  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в общем случае образует векторный марковский процесс, а совместная плотность вероятности  $p(x_1, x_2, x_3, x_4, t)$  удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка.

Если принять  $\partial p / \partial t = 0$ , то решение уравнения (9) при  $t \rightarrow \infty$  для стационарного колебательного процесса получено в виде [2]:

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = R \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} V(x_1, x_2) - \frac{p_1^2}{2D_1} x_3^2 - \frac{\gamma}{2D_2} x_4^2 \right], \quad (10)$$

где  $R$  – постоянная нормировки;  $D_1, D_2$  – коэффициенты интенсивности случайных сил и моментов

$$D_1 = \frac{(2n)^2 Tm}{2}; \quad D_2 = \frac{\gamma T I}{2}.$$

Из выражения (10) для плотности вероятности получают формулы для моментов переменных состояния

$$\sigma^2 y = \langle x_1^2 \rangle = \frac{D_1 m^2}{2kc} \left( 1 - 3\beta_1 \frac{D_1 m^2}{kc} \right); \quad \sigma_\theta^2 = \langle x_2^2 \rangle = \frac{D_2 I^2}{2kcl^4} \left( 1 - 3\beta_1 \frac{D_2 m^2}{kc} \right),$$

где  $\beta_1$  – коэффициент нелинейной компоненты статической жёсткости упругой системы.

Расчёты по приведённым формулам при достоверной (и довольно обширной) экспериментальной информации дают удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Как видно, рассматриваемая нелинейная стохастическая математическая модель позволяет описывать системы с поступательными и угловыми колебаниями, которые приближённо могут рассматриваться как стационарные широкополосные гауссовские случайные процессы. Модель обладает универсальностью, а сам метод даёт точное решение для плотностей вероятности процессов, в данном случае стационарных колебаний.

Вместе с тем модель имеет и существенные недостатки, ограничивающие её применение. Во-первых, решение уравнения Фоккера-Планка получено лишь для упрощённых физических моделей при определённых допущениях; при учёте таких эффектов как старение (нестабильность параметров системы во времени), зависимость реологических характеристик материала от амплитуды, частоты колебаний и температуры внешней среды, корректно решить это уравнение весьма проблематично. Во-вторых, необходимо весьма обширная экспериментальная информация о характере возмущений силы  $F(t)$ , момента  $M(t)$  и математическая интерпретация случайных процессов в виде корреляционных функций.

Всё это сужает область применения обобщённой математической модели; для исследовательской работы эта модель весьма привлекательна, особенно если возмущающая сила имеет случайный характер в широком диапазоне амплитуд и частот. На практике её применение ограничено, прежде всего, вследствие сложности и невозможности учесть весьма важные свойства, присущие вязкоупругим материалам типа резины.

**Математическая модель на основе интегральных соотношений Вольтерра.** В инженерной практике при исследовании динамики стационарных технологических машин рассмотренных выше сложностей стараются избегать, используя определённые допущения: случайные колебания считают квазигармоническими, упругую систему выполняют таким образом, чтобы в рамках рабочих амплитуд и частот её упругая характеристика была практически линейная, а угловые колебания настолько малыми, чтобы ими можно было пренебречь.

В этом случае систему виброизоляции рассматривают как систему с одной степенью свободы, и уравнение колебаний записывают в известном виде

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = P \sin \omega t. \quad (11)$$

Решение этого уравнения достаточно подробно изложено в работе С.П. Тимошенко «Колебания в инженерном деле».

Если необходимо рассмотреть нелинейный стохастический процесс колебаний, то в правой части уравнения возмущающую силу  $f(t)$  представляют как широкополосный стационарный случайный процесс и входные воздействия записывают либо в виде корреляционных функций, либо в виде функций спектральной мощности

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_1^2 y = f(t),$$

где  $f(t)$  – функция случайного входного воздействия на колебательную систему.

Обычно в качестве элементов упругой подвески используют резиновые детали специальной конструкции. Для виброизоляции тяжёлых горнообогатительных машин резина на сегодняшний день не может быть заменена ни одним из существующих материалов. Она обладает способностью к большим обратимым деформациям, имеет высокие упругие и диссипативные свойства, не имеет внезапности отказа, а её усталостные характеристики превышают все существующие конструкционные материалы.

К недостаткам следует отнести зависимость вязкоупругих свойств от режима нагружения, агрессивной среды и времени эксплуатации. К тому же резина не подчиняется упрощённым моделям Кельвина-Фохта, а её диссипативные свойства не являются прямо пропорциональными скорости деформирования, как это следует из уравнений (5) и (6). Тем не менее, в теории колебаний используют именно эти уравнения благодаря хорошо разработанному математическому аппарату. В последнее время появились и другие подходы к рассмотрению этого вопроса.

Рассмотрим применение двух методов к расчёту линейных колебательных систем с одной степенью свободы.

Первый метод предусматривает, что механическая реакция упругой подвески описывается с помощью модели Кельвина-Фохта и напряжение подчиняется закону

$$\sigma = E\varepsilon + \mu E\dot{\varepsilon},$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\varepsilon$  – относительная деформация виброизолятора;  $\mu$  – коэффициент внутренних сопротивлений резины, величина которого пропорциональна скорости деформации, для средне наполненных резин  $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$  с (получено экспериментально в работе [3]).

В этом случае уравнение движения массы  $m$  (рис. 1) можно записать в виде

$$\ddot{y} + \mu\omega_0^2 \dot{y} + \omega_0^2 y = q_1 \sin \omega t. \quad (12)$$

Для амплитуды стационарных вынужденных колебаний справедливо соотношение

$$A = \frac{q_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 \omega_0^2}}, \quad (13)$$

где  $\omega$  – частота вынужденных колебаний системы;  $\omega_0$  – собственная частота колебаний системы;  $q_1$  – сила инерции, приходящаяся на единицу колеблющейся массы.

Второй метод предусматривает, что механическая реакция резины описывается интегральным соотношением типа Больцмана-Вольтерра с ядрами релаксации и последействия. В этом случае уравнение (12) в операторной форме переписывается в виде (3)

$$\ddot{y} + C_t y = q_1 \sin \omega t,$$

где  $C_t$  – оператор жёсткости упругой подвески.

$$C_t = C_0 [1 - \chi \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)], \quad (14)$$

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \varepsilon(t) = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (15)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) = (t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(n+2)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (16)$$

где  $C_0$  – мгновенное значение жёсткости упругой подвески;  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  – экспоненциальная функция дробного порядка Ю. Работнова;  $\alpha, \beta, \lambda$  – реологические параметры резины;  $\Gamma$  – гамма-функция.

В работе [1] получены следующие основные соотношения для определения реологических параметров резины

$$\psi = 2\pi B(\omega); \quad (17)$$

$$G(\omega)/G_0 = 1 - A(\omega); \quad (18)$$

$$A = \frac{\omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta}{\omega^{2(1+2)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (19)$$

$$B = \frac{\omega^{1+\alpha} \sin \delta}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}; \quad \alpha = 1 - \frac{4}{\pi} \arctg \frac{\psi_{\max}}{\pi \lambda}; \quad (21)$$

$$t_0 = [\omega(\psi_{\max})]^{-1}; \quad \beta = 1/t_0^{1+\alpha}; \quad \chi = \lambda/t_0^{1+\alpha},$$

где  $A$  и  $B$  – реологические характеристики резины (синус- и косинус-преобразования Фурье дробно-экспоненциальной функции);  $\psi$  – коэффициент диссипации энергии;  $G(\omega)$  – текущее значение модуля сдвига;  $G_0$  – мгновенное значение модуля сдвига;  $t_0$  – обобщённое время релаксации.

Для используемой ниже средне наполненной резины типа 2959 (или её аналога 6620) реологические параметры имеют следующие значения:

$$\alpha = -0,60; \quad \beta = 1,1; \quad \lambda = 0,58.$$

С учётом приведённых соотношений выражение амплитуды колебаний будет иметь вид

$$A = \frac{q_1}{\sqrt{[\omega_{0u}^2 (1 - \chi A) - \omega^2]^2 + \chi B^2 \omega_{0u}^4}}, \quad (22)$$

где  $\omega_{0u}$  – частота собственных колебаний идеально упругой системы.

Выражение (22) позволяет более точно определить амплитудно-частотную и фазовую характеристики при переходных режимах, например, в области резонанса, т.е. когда  $\omega = \omega_0$ ; при  $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$  выражения (13) и (22) дают примерно одинаковые результаты.

Как видно, математическая модель с использованием интегральных соотношений Вольтерра основана на более строгих предпосылках и более точно учитывает вязкоупругие свойства резины, чем модель Кельвина-Фохта, используемая в уравнениях (5) и (6). Она наиболее эффективна при исследовании нелинейных систем, переходных процессов в колебательных системах, а также при исследовании систем, реологические характеристики которых существенно зависят от времени, режима нагружения или медленно изменяющейся температуры (внешней или от диссипативного саморазогрева). Эта модель позволяет также включить в общий алгоритм расчёта систем изменение механических характеристик упругих связей от повреждённости материала и действия внешней среды.

**Расчёт виброизоляции машин с учётом развивающейся в материале упругих связей повреждённости.** Как известно, в процессе длительной эксплуатации машин механические свойства упругих элементов вследствие повреждённости материала существенно изменяются, и это приводит к изменению параметров самих машин. Рассмотрим вибромашину, амплитуда колебаний которой уменьшается вследствие увеличения жёсткости упругих звеньев. Используя полученную модель разрушения резины, построим макроскопическую характеристику резиновых элементов в виде эффективного упругого модуля резины с повреждённостью, моделируемой включениями, с отличными от исходного материала свойствами. С учётом предположений, что материал в исходном состоянии однороден и изотропен, модуль образующихся включений в  $n$  раз больше модуля основного материала, развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени, можно построить выражение для эффективного модуля резины с изменяющимися от повреждённости свойствами. Связь между деформацией и напряжением можно записать в виде



$$\tau = G_{нач} \gamma \left[ n + \frac{(1-n)(1-p)(n+0,75)}{(n+0,75) + p(1-n)} \right].$$

Применительно к элементам из резины 51-1562 значение начального модуля  $G_{нач} = 0,75 \text{ МН/м}^2$ . Относительно величины  $n$  в известной литературе нет каких-либо данных. Используя экспериментальные результаты по изменению модуля этой резины в процессе длительного нагружения, можно положить  $n = 1,2$ .

На рис. 2 представлена зависимость эффективного модуля  $G_{эф}$  от поврежденности, приведенной в безразмерном виде  $p(t)/p_{кр}$ , где  $p(t)$  – текущее значение,  $p_{кр}$  – критическое значение поврежденности.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть необходимо прогнозировать изменение амплитуды колебаний двухмассного горизонтального уравновешенного конвейера типа КВ2Т-015/20, упругие звенья которого выполнены в виде элементов сдвига типа БРМ101 из резины 51-1562 и шарниров ШРМ101 из резины 2959. Изменением жесткости шарниров во времени будем пренебрегать. Параметры конвейера следующие: масса колеблющихся частей  $m = 720 \text{ кг}$ ; жесткость упругих элементов  $C = 3,6 \text{ МПа}$ ; жесткость приводных упругих элементов  $C_0 = 0,72 \text{ МПа}$ ; частота колебаний  $\omega = 74,5 \text{ с}^{-1}$ ; эксцентриситет привода  $\rho = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; начальное значение мгновенного модуля сдвига резины 51-1562  $G_{нач}^0 = 0,82 \text{ МПа}$ , коэффициент диссипации  $\psi = 0,16$ .

Временную зависимость амплитуды колебаний конвейера представим соотношением

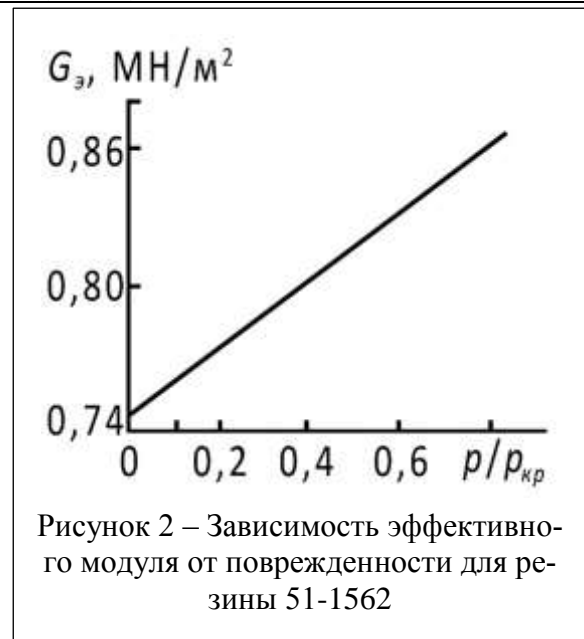
$$a(t) = \frac{2C_0(p)\rho}{\sqrt{\frac{1}{4}m^2\omega^4 - mC(p)\omega^2(1-A) + C^2(p)(1-A)^2 + C^2(p)B^2}},$$

в котором зависимости жесткостей  $C$  и  $C_0$  от поврежденности  $p$  рассчитывались как

$$C(p) = G_s(p)Fz/h,$$

где  $F$ ,  $h$  – площадь сдвига и высота резинового элемента соответственно;  $z$  – количество резиновых элементов.

Рассчитанная таким образом временная зависимость амплитуды колебаний виброконвейера показана на рис. 3 и, как видно, удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными. Это совпадение свидетельствует о пригодности предложенного метода для расчёта механических характеристик ма-



шин, упругие подвески которых изменяют свои параметры от поврежденности материала.

Следует отметить, что в инженерной практике изменение амплитуды колебаний вибромашин при длительной их эксплуатации явление

довольно частое. Так, например, в двухмассном уравновешенном виброконвейере типа КВ2Т для транспортировки сыпучих материалов за 11000 часов эксплуатации амплитуда колебаний уменьшилась с 11 мм до 7,5 мм, что привело к уменьшению производительности конвейера. На практике это нежелательное явление обычно устраняют изменением частоты колебаний привода или, в случае чрезмерного увеличения жёсткости, заменой элементов упругой подвески.

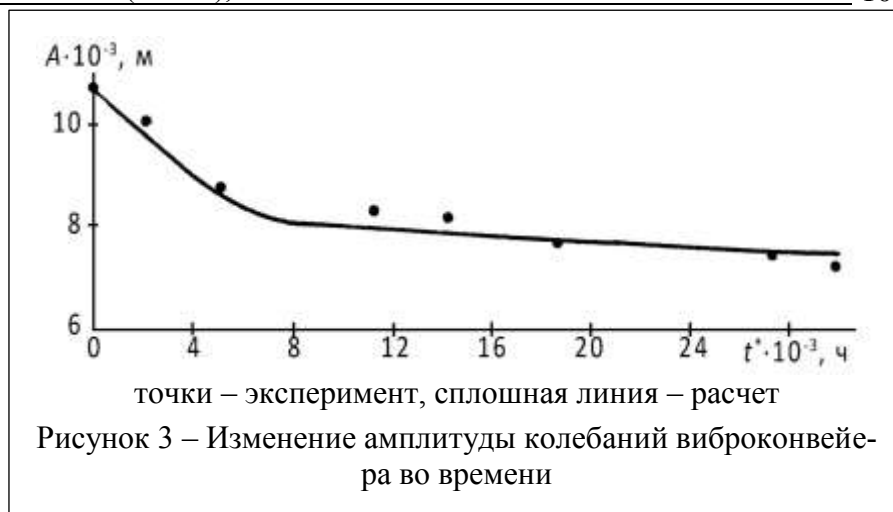


Рисунок 3 – Изменение амплитуды колебаний виброконвейера во времени

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прикладная механика упругонаследственных сред: В 4-х томах / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, А.С. Кобец. – Т. 2. Методы расчета эластомерных деталей. – К.: Наукова думка, 2012. – 616 с.
2. Самеха, М. Динамические приемочные испытания станков, основанные на нелинейной модели / М. Самеха, Т. Санкар // Конструирование. – 1980. – 102, №1. – С. 45-51.
3. Смирнов, В.И. Сейсмоизоляция для вновь проектируемых и усиления существующих зданий / В.И. Смирнов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2004. – № 4. – С. 49-54.

### REFERENCES

1. Bulat, A.F., Dyrda, V.I., Zviagilskii, E.L. and Kobets, A.S. (2012), *Prikladnaya mekhanika uprugonasledstvennykh sred. Tom 2. Metody rascheta elastomernykh detalei* [Applied mechanics of elastic-hereditary media. Vol. 2. Design techniques of elastomeric parts], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
2. Samekha, M. and Sankar, T. (1980), "Dynamic acceptance testing of machine tools based on nonlinear model", *Konstruirovaniye*, vol. 102, no. 1, pp. 45-51.
3. Smirnov, V.I. (2004), "Seismic isolation for newly designed and strengthening of existing buildings", *Seysmostoykoye stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy*, no. 4, pp. 49-54.

### Об авторах

**Кобец Анатолий Степанович**, доктор экономических наук, профессор, ректор, Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет (ДГАЭУ), Днепропетровск, Украина, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

**Дырда Виталий Илларионович**, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Кобец Александр Николаевич**, канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой сельскохозяйственных машин Днепропетровского государственного аграрно-экономического университета (ДГАЭУ), Днепропетровск, Украина, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

**Толстенко Александр Васильевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Надежность и ремонт машин», Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет, Украина, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

### About the authors

**Kobets Anatoly Stepanovich**, Doctor of Economical Sciences (D. Sc.), Professor, Prex, Dnepropetrovsk State Agrarian and Economic University (DSAEU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

**Dyrda Vitaly Illarionovich**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Professor, Head of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Kobets Aleksandr Nikolaevich**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Head of Department of agricultural machinery in Dnepropetrovsk State Agrarian and Economic University (DSAEU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

**Tolstenko Alexandr Vasil'yevich**, Candidate of Technical Science (Ph. D.), Associate Professor of Department «Reliability and repair of machinery», Dnepropetrovsk State Agrarian and Economic University (DSAEU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [info@dsau.dp.ua](mailto:info@dsau.dp.ua)

**Анотація.** Розглядаються дві математичні моделі, найбільш повно відповідні існуючим фізичним моделям і динамічним процесам, що протікають в реальних машинах. Перша модель на основі рівняння Фоккера-Планка враховує нелінійність системи віброізоляції та стохастичність стаціонарних коливань; вона є складною і не зовсім повно враховує реологічні характеристики матеріалу, в тому числі вплив старіння і вплив зовнішнього агресивного середовища. Друга модель на основі інтегральних співвідношень Больцмана-Вольтерра досить повно враховує і реологічні характеристики матеріалу, і нелінійність, і стохастичність коливань. Як приклад розглянута динаміка одномасної системи, пружні характеристики якої змінюються з часом роботи; пошкодженість матеріалу визначається методом Валпола. Відзначається задовільний збіг розрахункових та експериментальних результатів.

**Ключові слова:** рівняння Фоккера-Планка, модель Больцмана-Вольтерра, реологічні характеристики гум, динаміка пружної системи

**Abstract.** The article presents two mathematical models mostly compliant with existing physical models, and dynamic processes occurred in real machines. The first model is based on the Fokker-Planck equation and takes into account non-linearity of vibration insulation system and stationary stochastic fluctuations; it is complex and does not fully take into account rheological characteristics of material, impact of aging and external aggressive environment. The second model is based on the Boltzmann-Volterra integral relationships; it adequately takes into account both rheological characteristics of material, non-linearity and stochastic fluctuations. Dynamics of one-mass system with elastic characteristics varying with time of work is considered as an example; material damage is determined by the Walpole method. Calculated and experimental results have shown satisfactory matching.

**Keywords:** Fokker-Planck equation, Boltzmann-Volterra model, rheological characteristics of rubber, dynamics of elastic system

*Стаття поступила в редакцію 12.03.2015*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, проф. В.П. Надутым*