

УДК 678.4.66:621.81

**Юречко В.З.**, инженер**Бова А.А.**, инженер

(ЗНТУ),

**Калганков Е.В.**, аспирант,**Цаниди И.Н.**, аспирант,**Новикова А.В.**, магистр

(ИГТМ НАН Украины)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОЙ ФУТЕРОВКИ

**Юречко В.З.**, инженер**Бова А.А.**, инженер

(ЗНТУ),

**Калганков Є.В.**, аспірант,**Цаніди І.М.**, аспірант,**Новікова А.В.**, магістр

(ІГТМ НАН України)

## МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛАСТОМЕРНОЇ ФУТЕРОВКИ

**Yurechko V.Z.**, M.S (Tech.)**Bova A.A.**, M.S (Tech.)

(ZNTU)

**Kalgankov Ye.V.**, Doctoral Student,**Tsanidy I.N.**, Doctoral Student,**Novikova A.V.**, M.S. (Tech)

(IGTM NAS of Ukraine)

## MODELING OF ELASTOMERIC LINING STRESS-STRAIN STATE

**Аннотация.** В данной работе предложена математическая модель процесса деформации эластомерных конструкций с учётом абразивно-усталостного разрушения в условиях вязкоупругого деформирования. Для построения модели применялся трёхмерный метод конечных элементов. Ввиду специфических свойств материала была использована матрица жёсткости конечного элемента на основе моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов, которая заключается в тройной аппроксимации компонент вектора перемещений, компонент тензора деформаций и функции изменения объёма. Для учёта абразивно-усталостного износа строится макроскопическая характеристика в виде эффективного модуля упругости резины с повреждённостью, моделируемой включениями, с отличными от исходного материала свойствами. Для моделирования вязкоупругого поведения использовались интегральные соотношения на основе наследственной теории Больцмана-Вольтерра. В качестве ядра релаксации используется экспоненциальное ядро, содержащее мгновенные и длительные упругие характеристики материала. Исследована численная сходимость полученных результатов. Представленная математическая модель была реализована в вычислительном комплексе «МІРЕЛІА+». Проведён расчёт эластомерной футеровки барабанно-шаровых рудоразмельных мельниц, с учётом специфических свойств материала и реологических условий деформирования. Получены основные параметры напряжённо-деформи-

ванного состояния футеровки в зависимости от прилагаемой нагрузки и условий деформирования.

**Ключевые слова:** эластомерная футеровка, абразивно-усталостный износ, моментная схема конечного элемента, вязкоупругость

## 1 Введение

На сегодняшний день обширное применение эластомеров в качестве элементов конструкций в различных отраслях науки и техники позволяет повысить производительность, долговечность, надёжность конструкций, а также снизить вибрацию и материалоёмкость.

Особенно большое распространение получили эластомеры в качестве таких ответственных элементов конструкций, как защитные футеровки в барабанно-шаровых рудоразмольных мельницах. Футеровка предназначена для предохранения внутренних поверхностей барабана мельницы от износа дробящей средой и размалываемым материалом. Кроме того, футеровка играет существенную роль в механизме движения дробящей среды, что, в свою очередь, определяет характер измельчения материала. От морфометрических параметров футеровки зависит эффективность и производительность работы мельниц в целом. Кроме того, резиновая футеровка имеет преимущества по весу, простоте операции сборки-разборки и значительно уменьшает шум и вибрацию, позволяет экономить до 7 % электроэнергии.

Одним из важнейших вопросов является изучение разрушения резиновой футеровки по абразивно-усталостному механизму в условиях вязкоупругого деформирования, что и подтверждает актуальность данного исследования.

Учёт абразивно-усталостного износа, а также таких специфических свойств эластомеров, как высокая механическая прочность, эластичность, слабая сжимаемость, а также реологические свойства, требует составления адекватных математических моделей исследуемых объектов, разработки специальных алгоритмов и методов решения поставленных задач.

Аналитические методы решения задач механики эластомеров освещены в работе [1]. Однако они являются весьма громоздкой, а иногда и невозможной процедурой, поэтому их целесообразно применять лишь для конструкций относительно простой формы.

Наиболее удобно и просто описать всё разнообразие сложных геометрических форм эластомерных конструкций можно при помощи численных методов, которые позволяют задать любые граничные и начальные условия при расчёте. Универсальным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет получать полную картину напряжённо-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой конструкции.

Исследованию методики применения МКЭ к расчёту эластомерных конструкций посвящено большое количество работ. Так, в работах Р. Пэнна, С.И. Дымникова предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера.

Л.Р. Германном, С. Кеем, Т. Пианом были предложены вариационные формулировки, которые являются наиболее приемлемыми для задач исследова-

ния слабосжимаемых эластомеров. Однако применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений, с нарушением положительной определённости матрицы уравнений, что является существенным недостатком.

О.С. Зенкевич, Дж. Оден для учёта слабой сжимаемости эластомеров предложили способ сокращённого интегрирования, который состоит в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются различными функциями.

В работе С.А. Кабриц, В.М. Малькова, С.Е. Мансуровой предложен метод, разрешающие уравнения которого не содержат особенностей, связанных с малой сжимаемостью материала и малой толщиной слоя.

В работе В.В. Киричевского [2] рассмотрено развитие МКЭ и его модификации, изучены вопросы упругого, вязкоупругого линейного и нелинейного деформирования. Продолжению этих исследований посвящены работы [3, 4].

Изучению вязкоупругого деформирования материалов посвящено большое количество работ: М.А. Колтунова, В.Г. Карнаухова, Б.П. Гуменюка, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницина, В.Л. Нарусберга и других.

Вопросу изучения абразивно-усталостного износа конструкций посвящены работы [5, 6]. Изложены проблемы динамики взаимодействия внутримельничной загрузки и резиновой футеровки в контексте надёжности и эффективности работы мельниц; исследуется механизм разрушения резиновой футеровки на примере разрушения резиновой футеровки барабанной мельницы; также проводится расчёт оптимальной толщины резиновой футеровки; построена обобщённая теория абразивно-усталостного износа упруго-наследственных сред с помощью двухкритериального уравнения долговечности; изложена динамическая модель волнового абразивно-усталостного разрушения резиновой футеровки в барабанных мельницах.

## 2 Постановка задачи

Решается статическая задача вязкоупругости в трёхмерной постановке для эластомерной футеровки типа «плита-плита» (рисунок 1), расчётная схема которой приведена на рис. 2:  $L$  – длина полосы,  $a$  – ширина,  $h$  – толщина. Вектор нагрузки  $Q$  необходимо представить в виде трёх взаимно перпендикулярных векторов:  $Q_x$  – вектор нормальной нагрузки,  $Q_y$  и  $Q_z$  – векторы касательной нагрузки. Исходя из условий эксплуатации, пропорциональные соотношения между этими величинами могут варьироваться. Снизу футеровка жёстко закреплена, а боковые грани свободны от нагрузок и защемления. Износ резиновой футеровки исследуется при эксплуатации мельницы  $\varnothing 3,6$  м.

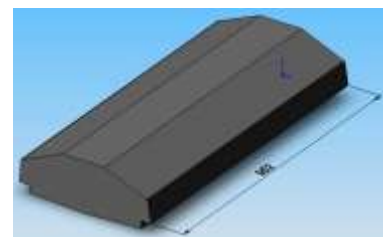


Рисунок 1 – Резиновая плита

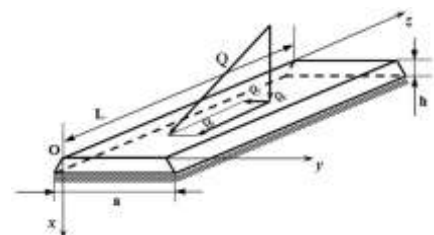


Рисунок 2 – Расчётная схема эластомерной футеровки

### 3 Построение конечно-элементной модели абразивно-усталостного износа эластомеров в условиях вязкоупругого деформирования

Традиционный МКЭ в форме метода перемещений не позволяет учитывать жёсткие смещения конечного элемента и другие негативные свойства МЖ, связанные с появлением фиктивных сдвиговых деформаций – эффект «ложного» сдвига, а также реологические свойства материала. Кроме того, для эластомерных материалов, большинство из которых являются слабосжимаемыми, традиционный МКЭ не позволяет получать адекватные результаты. Чтобы устранить перечисленные недостатки воспользуемся моментной схемой конечного элемента [2], которая заключается во введении тройной аппроксимации: полей перемещений, компонентов деформаций и функции изменения объёма.

Используя вариационный подход, представим соотношения МЖ конечного элемента на основе МСКЭ для слабосжимаемого материала при абразивно-усталостном износе в условиях вязкоупругого деформирования.

Аппроксимацию перемещений для параллелепипедного конечного элемента представим в виде:

$$u_{s'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{s'}^{(pqr)} \psi_{s'}^{(pqr)} = \omega_{s'}^{(000)} + \omega_{s'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ + \omega_{s'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{s'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{s'}^{(111)} \psi^{(111)},$$

где  $\omega_{s'}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;  $\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!}$  – набор степенных координатных функций.

Аппроксимация компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  запишется [2]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)}, \\ \varepsilon_{22} = e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)}, \\ \varepsilon_{12} = e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}, \quad \varepsilon_{13} = e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}, \quad \varepsilon_{23} = e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)},$$

где  $e_{ij}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения деформаций.

Функция изменения объёма:

$$\theta = \varphi^{(000)} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

где  $\varphi^{(\alpha\beta\gamma)}$  – коэффициенты разложения функции изменения объёма  $\theta$ .

Рассмотрим вариацию полной потенциальной энергии системы [2]:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (1)$$

Здесь  $\delta W$  – вариация внутренней энергии упругого деформирования:

$$\delta W = \iiint_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv, \quad (2)$$

$\delta A$  – вариация работы распределённых объёмных  $P^i$  и поверхностных  $F^i$  сил:

$$\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds.$$

Разрушение эластомерной конструкции при абразивно-усталостном износе исследуется при помощи феноменологической модели сплошной среды [1]. Процесс повреждённости эластомера под действием внешних сил можно представить как образование и накопление в исходном материале некоторых областей, имеющих характер включений.

Предполагается, что материал в начальном состоянии однороден и изотропен, а материал включений обладает новыми существенно анизотропными свойствами. Модуль образующихся включений в  $n$  раз больше модуля основного материала (в работе [1] для резины на основе СКИ-3 получено  $n = 1, 2$ ), развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени.

С учётом вышеуказанных предположений можно построить макроскопическую характеристику эластомера в виде эффективного модуля упругости материала с изменяющимися от повреждённости свойствами.

Компоненты тензора напряжений определяются на основе обобщённого закона Гука для изотропного тела с учётом абразивно-усталостного износа:

$$\sigma^{ij} = K g^{ij} \theta + 2G_{\ominus} \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right), \quad (3)$$

где  $K$  – модуль объёмного сжатия;  $G_{\ominus}$  – эффективный модуль упругости, который учитывает развитие микроповреждений в материале:

$$G_{\ominus} = G_0 \left[ n + \frac{(1-n)(1-p)(n+3/2)}{(n+3/2)+p(1-n)} \right]; \quad p = 1 - e^{-kt};$$

$G_0$  – модуль упругости исходного материала;  $p$  – функция, отображающая рост концентрации включений во времени;  $k$  – коэффициент снижения модуля упругости ( $k = 1, 2-1, 4$  [1]).

Матрица модулей упругости с учётом вышеуказанных предположений будет иметь вид:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 2E_0/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2E_0/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2E_0/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E_0/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2E_0/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2E_0/3 \end{pmatrix},$$

$$G_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \frac{56E_0(1-p)}{3(17p+28)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2E_0/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2E_0/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2E_0/3 \end{pmatrix}.$$

Подставим компоненты тензора напряжений (3) в вариацию энергии деформирования (2):

$$\delta W = \iiint_v \left( K g^{ij} \delta \theta + 2G_{\vartheta} \left( g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv. \quad (4)$$

Тогда вариация полной потенциальной энергии системы (1) примет вид:

$$\delta \Pi = \iiint_v \left( K g^{ij} \delta \theta + 2G_{\vartheta} \left( g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv - \delta A.$$

Учёт вязкоупругого деформирования эластомерной футеровки представляется на основе наследственного принципа Больцмана – Вольтерра в виде:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t (C_0^{ijkl} - C_{\infty}^{ijkl}) e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $C_0^{ijkl}$  и  $C_{\infty}^{ijkl}$  – компоненты тензора мгновенных и длительных упругих постоянных, которые определяются соотношением:

$$C^{ijkl} = K g^{ij} g^{kl} + G \left( g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} - \frac{2}{3} g^{ij} g^{kl} \right), \quad (6)$$

$g^{ij}$  – компоненты метрического тензора;  $K$  и  $G$  – мгновенные или длительные модули объёмного сжатия и сдвига соответственно.

Выражение (5) с учётом симметричности тензора напряжений и с учётом выражения (6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij}(t) = & K_0 g^{ij} \theta(t) + 2G_0 \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t) \right) - \\ & - \int_0^t \left( (K_0 - K_{\infty}) g^{ij} \theta(\tau) + 2(G_0 - G_{\infty}) \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(\tau) \right) \right) e^{-(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения конечно-элементной модели вязкоупругого деформирования эластомерной футеровки представим интегральные соотношения (7) в

конечно-разностной форме. Допуская релаксацию только модуля сдвига  $G$  эластомера, получим  $K = K_0 = K_\infty$ . Полагая, что перемещения  $u(t)$  изменяются линейно внутри каждого интервала времени и учитывая абразивно-усталостный износ эластомера, выражение для компонентов тензора напряжений (7) запишем в виде [3]:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t_n) = Kg^{ij}\theta(t_n) + 2G_\varepsilon \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t_n) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t_n) \right) - \sum_{m=0}^{n-1} R_m \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t_m) \right) \quad (7)$$

где  $R_m = 2(G_{\varepsilon 0} - G_{\varepsilon \infty})(e^{t_{m+1}-t_m} - 1)$ ;  $G_{\varepsilon 0}$ ,  $G_{\varepsilon \infty}$  – мгновенный и длительный модуль сдвига эластомера при абразивно-усталостном разрушении.

Подставим компоненты тензора напряжений (7) в вариацию энергии деформирования (2). В этом случае вариация полной потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iiint_v \left( Kg^{ij} \delta\theta(t_n) + 2G_\varepsilon \left( g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_n) - \frac{1}{3} g^{ij} \delta\theta(t_n) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{n-1} R_m \left( g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \delta\theta(t_m) \right) \right) dv - \delta A. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое в скобках выражения (8) является вариацией энергии упругого деформирования, которая зависит от истории нагружения, но не зависит от закона изменения деформации во времени. Оно служит основой формирования МЖ конечного элемента  $[M^{pq}]$  для фиксированного момента времени  $t$ . Запишем следующим образом:

$$\iiint_v \left( 2G_\varepsilon g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_n) + \left( K - \frac{2}{3} G_\varepsilon \right) g^{ij} \delta\theta(t_n) \right) dv = M^{pq}(t_n) u_p(t_n) \delta u_q. \quad (9)$$

Второе слагаемое в выражении (8) является наследственной составляющей МЖ, которую представим в виде:

$$\sum_{m=0}^{n-1} R_m \left( g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t_m) \right) dv = \sum_{m=0}^{n-1} R_m S^{pq}(t_m) u_p(t_m) \delta u_q. \quad (10)$$

Предполагая, что на тело действует только распределённая поверхностная нагрузка, которую можно свести к сосредоточенным силам в каждом узле, и используя соотношение (9) и (10), вариация потенциальной энергии приобретает вид:

$$\left( M^{pq}(t_n) u_p(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} R_m S^{pq}(t_m) u_p(t_m) - F^q(t_n) \right) \delta u_q = 0.$$

Поскольку вариации перемещений независимы, то нулю должно равняться выражение в скобках, которое представляет собой линеаризованную систему разрешающих уравнений наследственной вязкоупругости:

$$M_{(n)}\bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{P}_m + \bar{Q}_{(n)}, \quad (11)$$

где  $\bar{u}^{(n)} = u_p(t_n)$  – вектор перемещений;  $\bar{Q}_{(n)} = F^q(t_n)$  – вектор распределённых поверхностных нагрузок, действующих на момент времени  $t_n$ ;  $\bar{P}_m = R_m S^{pq}(t_m) u_p(t_m)$  – вектор дополнительной нагрузки, моделирующий вязкоупругое поведение ПМ.

Решение системы (11) строится на основе модифицированного метода Ньютона-Канторовича для решения задачи вязкоупругости [2].

В общем виде теоретическое доказательство сходимости МСКЭ для степенного закона аппроксимации перемещений, в том числе и для предложенного выше, изложены в [2].

#### 4 Исследование численной сходимости конечно-элементных схем

Исследуем сходимость решений, полученных численно, при использовании МКЭ и МСКЭ, сравнением их с аналитическим решением задачи Ляме в условиях вязкоупругого деформирования.

Рассматривается НДС полого цилиндра из эластомера при абразивно-усталостном разрушении в условиях вязкоупругого деформирования, под внутренним давлением  $Q$  и жёстком защемлении внешней поверхности. Внутренний радиус равен  $a$ , внешний –  $b$ ,  $r$  – полярный радиус,  $t$  – время. Аналитическая зависимость радиальных перемещений в условиях вязкоупругого поведения при абразивно-усталостном деформировании от эффективного релаксирующего модуля упругости эластомера имеет следующий вид [4]:

$$\tilde{u}(t, r) = f \cdot (1 + \lambda K^*(t)) \cdot (r - b^2/r),$$

где

$$f = -\frac{Q}{2K + 2G_{\infty 0} \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)}; \quad \lambda = \frac{G_{\infty 0} \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)}{K + G_{\infty 0} \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)};$$

$$K^*(t) = \int_0^t K(t - \tau) d\tau = \frac{G_{\infty 0} - G_{\infty \infty}}{2G_{\infty 0} - G_{\infty \infty}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{2G_{\infty 0} - G_{\infty \infty}}{G_{\infty 0}} t \right) \right);$$

$K(t - \tau)$  – разностное ядро ползучести эластомера.

Сравним перемещения внутренней точки цилиндра, получаемые численно с использованием традиционного МКЭ и МСКЭ, с аналитическим решением. Исходные данные: внутренний радиус  $a = 0,025$  м, внешний радиус  $b = 0,1$  м, модуль упругости  $K = 64,567 \cdot 10^6$  Па, мгновенный модуль сдвига эластомера  $G_0 = 1,3 \cdot 10^6$  Па, длительный модуль сдвига эластомера  $G_{\infty} = 0,93 \cdot 10^6$  Па [4], коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$ , внутреннее давление  $Q_0 = 1,3 \cdot 10^6$  Па (таблица 1).



Как видно из табл. 1, МСКЭ имеет устойчивую сходимость при сгущение сетки дискретизации и даёт предпочтительные результаты по сравнению со стандартным МКЭ, приближая их к аналитическим. Таким образом, предложенная конечно-элементная модель на основе МСКЭ позволяет получать приемлемые результаты при расчёте конструкций из эластомеров при абразивно-усталостном деформировании в условиях вязкоупругого деформирования.

Таблица 1 – Численная сходимость решений

Сетка дискретизации	МКЭ		МСКЭ	
	$u$ , м	$\varepsilon$ , %	$u$ , м	$\varepsilon$ , %
Упругий случай				
3×3×3	0,016314	16,7	0,018819	3,9
5×5×3	0,018205	7,1	0,019216	1,9
7×7×3	0,018871	3,6	0,019390	0,98
9×9×3	0,019156	2,2	0,019467	0,6
11×11×3	0,019301	1,5	0,019506	0,4
Аналитическое решение	0,019581			
Вязкоупругий случай ( $t = 1$ с)				
3×3×3	0,017119	22,6	0,019984	9,6
5×5×3	0,019424	12,1	0,020725	6,2
7×7×3	0,020236	8,5	0,020923	5,3
9×9×3	0,020594	6,9	0,021018	4,9
11×11×3	0,020780	6,0	0,021068	4,7
Аналитическое решение	0,022105			

## 5 Численные результаты

Рассмотренный подход к расчёту эластомерных конструкций при абразивно-усталостном разрушении в условиях деформирования реализован в рамках программного комплекса «МИРЕЛА+» [2].

Исходные данные для футеровки: длина  $L = 0,952$  м, ширина  $a = 0,465$  м, толщина  $h = 0,24$  м, нагрузка  $Q = 0,6$  МПа. В случае действия только нормальной нагрузки  $Q_x = 0,6$  МПа,  $Q_y = Q_z = 0$ . В случае действия нормальной и касательной –  $Q_x = 48987$  Па,  $Q_y = 244949$  Па,  $Q_z = 244949$  Па. Модули упругости  $G_0 = 1,9$  МПа,  $G_\infty = 1,4$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$ .

Расчёты были проведены для ряда марок резины при различных сетках дискретизации. Результаты представлены при сетке дискретизации  $9 \times 11 \times 13$  для марки резины 541933-1.

На рис. 2 представлено распределение перемещений  $u_1$  по толщине поверхностного слоя футеровки в момент времени  $t = 1$  с при действии только нормальной (рис. 2,а) и нормальной и

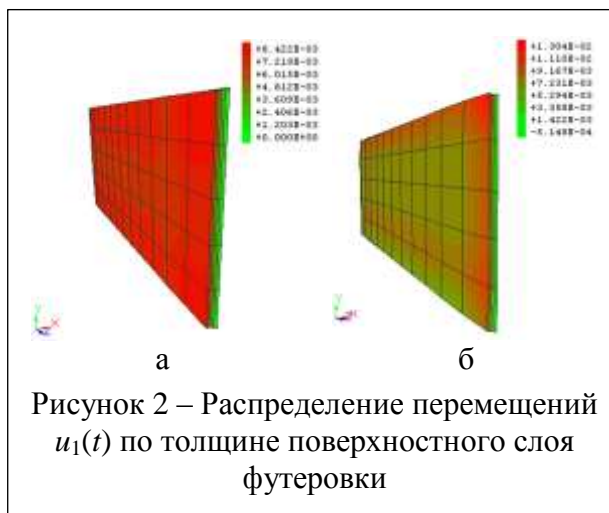


Рисунок 2 – Распределение перемещений  $u_1(t)$  по толщине поверхностного слоя футеровки

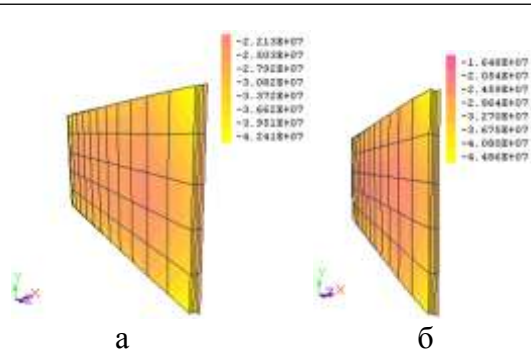


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений  $\sigma^{11}(t)$  по толщине поверхностного слоя футеровки

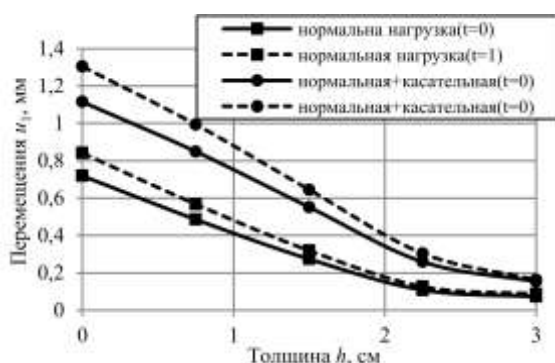


Рисунок 4 – Распределение перемещений в поверхностном слое футеровки

касательной нагрузке (рис. 2,б) соответственно.

На рис. 3 представлено распределение нормальных напряжений по толщине поверхностного слоя футеровки в момент времени  $t = 1$  с при действии только нормальной (рис. 3,а) и нормальной и касательной нагрузке (рис. 3,б) соответственно.

На рис. 4 представлено распределение перемещений  $u_1$  по толщине поверхностного слоя футеровки при различных действиях нагрузки.

Зависимость перемещений и нормальных напряжений от времени представлено на рис. 5 и рис. 6 соответственно.

## 6 Заключение

В работе представлена конечно-элементная модель для решения трёхмерной статической задачи вязкоупругости в условиях абразивно-

усталостного деформирования для эластомерных конструкций. С помощью предложенной модели на основе моментной схемы конечного элемента, которая заключается в тройной аппроксимации: перемещений, компонент деформаций и функции изменения объёма, были получены основные параметры напряжённо-деформированного состояния резиновой футеровки, используемой в барабанно-шаровых рудоразмольных мельницах.

Анализ полученных результатов показывает, что учёт абразивно-усталостного разрушения эластомеров даёт возможность получать более точные результаты, согласуемые с экспериментальными данными. Решения, полученные в вязкоупругой постановке, отличаются от упругих решений на 10-15%. Расчёты с учётом касательных нагрузок увеличивают параметры напряжённо-деформированного состояния футеровки на (27-31)%.

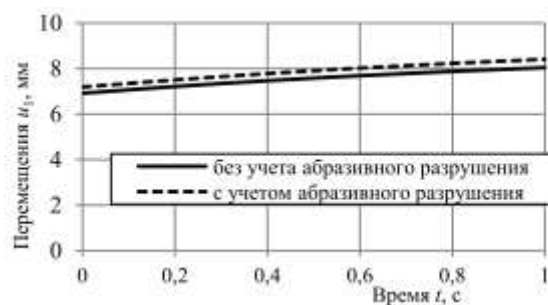


Рисунок 5 – Зависимость перемещений от времени



Рисунок 6 – Зависимость нормальных напряжений от времени

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прикладная механика упруго-наследственных сред: В 3-х томах. Т. 1. Механика деформирования и разрушения эластомеров / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, А.С. Кобец. – К.: Наук. думка, 2011. – 568 с.
2. Киричевский, В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наукова думка, 2002. – 655 с.
3. Гребенюк, С.М. Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування / С.М. Гребенюк, В.З. Юречко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 53-60.
4. Дырда, В.И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск-Запорожье: Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.
5. Прикладная механика упруго-наследственных сред. Т. 2. Методы расчета эластомерных деталей / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, А.С. Кобец. – К.: Наукова думка, 2012. – 616 с.
6. Дырда, В.И. Резиновые футеровки технологических машин / В.И. Дырда, Р.П. Зозуля, А.П. Левицкий, И.В. Хмель. – Днепропетровск, 2014. – 255 с.
7. The selection and design of mill liners / M. Powell, I. Smit, P. Radziszewski [et al.] // Advances in comminution. – Colorado: Mining, metallurgy and exploration, 2006. – Pp. 331-376.

## REFERENCES

1. Bulat, A.F., Dyrda, V.I., Zvyagilskiy, Ye.L. and Kobets, A.S. (2011), *Prikladnaya mekhanika uprugonasledstvennykh sred. Tom 1. Mehanika deformirovaniia i razrusheniia elastomerov* [Applied mechanics of elastic-hereditary media. Vol. 1. Mechanics of deforming and breaking down of elastomers], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
2. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [The finite element method in mechanics of elastomers], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
3. Grebenyuk, S.N. and Jurechko, V.Z. (2011), “Determination of stress-strain state of the cylinder of porous material in viscoelastic deformation”, *Materials of IPMM NAS of Ukraine*, Vol. 23, pp. 53-60.
4. Dyrda, V.I., Grebenyuk, S.N. and Gomenyuk, S.I. (2012), *Analiticheskiye i chislennyye metody rascheta rezinovykh detaley* [Analytical and numerical methods for calculating rubber parts], Zaporizhzhya National University, Dnepropetrovsk- Zaporozhye, Ukraine.
5. Bulat, A.F., Dyrda, V.I., Zviagilskii, E.L. and Kobets, A.S. (2012), *Prikladnaya mekhanika uprugonasledstvennykh sred. Tom 2. Metody rascheta elastomernykh detalei* [Applied mechanics of elastic-hereditary media. Vol. 2. Design techniques of elastomeric parts], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
6. Dyrda, V.I., Zozulya, R.P., Levitskiy, A.P. and Khmel', I.V. (2014), *Rezinovyye futerovki tekhnologicheskikh mashin* [Rubber linings of technological machines], Dnepropetrovsk, Ukraine.
7. Powell, M., Smit, I., Radziszewski, P. (et al.) (2006), *The selection and design of mill liners*, Mining, metallurgy and exploration, Colorado, USA.

## Об авторах

**Юречко Василий Зиновьевич**, инженер, ассистент кафедры информационных технологий в туризме Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина, [rector@zntu.edu.ua](mailto:rector@zntu.edu.ua)

**Бова Анна Анатольевна**, инженер, ассистент кафедры системного анализа и вычислительной математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина, [rector@zntu.edu.ua](mailto:rector@zntu.edu.ua)

**Калганков Евгений Васильевич**, аспирант, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Цаниди Иван Николаевич**, аспирант, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Новикова Алина Вячеславовна**, магистр, младший научный сотрудник отдела механики эластомерных конструкций, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, [a\\_v\\_novikova@mail.ru](mailto:a_v_novikova@mail.ru)

### About the authors

**Jurechko Vasily Zinov'evich**, Master of Science, assistant of the department of information technologies in tourism Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine, [rector@zntu.edu.ua](mailto:rector@zntu.edu.ua)

**Bova Anna Anatol'evna**, Master of Science, assistant of the department of system analysis and computational mathematics Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine, [rector@zntu.edu.ua](mailto:rector@zntu.edu.ua)

**Kalgankov Evgeniy Vasilyevich**, Doctoral Student in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Tsanidy Ivan Nikolaevich**, Doctoral Student in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [vita.igtm@gmail.com](mailto:vita.igtm@gmail.com)

**Novikova Alina Vyacheslavovna**, Master of Science, Junior Researcher in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, [a\\_v\\_novikova@mail.ru](mailto:a_v_novikova@mail.ru)

**Анотація.** У даній роботі запропонована математична модель процесу деформації еластомерних конструкцій з урахуванням абразивно-втомного руйнування в умовах в'язкопружного деформування. Для побудови моделі застосовувався тривимірний метод кінцевих елементів. Зважаючи на специфічні властивості матеріалу була використана матриця жорсткості кінцевого елемента на основі моментної схеми кінцевого елемента для слабостискуваних матеріалів, яка полягає в потрійній апроксимації компонент вектора переміщень, компонент тензора деформацій і функції зміни об'єму. Для врахування абразивно-втомного зносу будується макроскопічна характеристика у вигляді ефективного модуля пружності гуми з пошкодженнями, модельованими включеннями, з відмінними від вихідного матеріалу властивостями. Для моделювання в'язкопружної поведінки використовувалися інтегральні співвідношення на основі спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. В якості ядра релаксації використовується експоненціальне ядро, що містить миттєві і тривалі пружні характеристики матеріалу. Досліджено чисельну збіжність отриманих результатів. Представлена математична модель була реалізована в обчислювальному комплексі «MIRELA+». Проведено розрахунок еластомерної футеровки барабанно-кульових рудоразмольних млинів, з урахуванням специфічних властивостей матеріалу і реологічних умов деформування. Отримано основні параметри напружено-деформованого стану футеровки залежно від прикладеного навантаження та умов деформування.

**Ключові слова:** еластомерна футеровка, абразивно-втомний знос, моментная схема кінцевого елемента, в'язкопружність

**Abstract.** In this paper, a mathematical model of elastomeric structure deformation is proposed which takes into account abrasive-fatigue failure in conditions of viscoelastic deformation. To design the model, a three-dimensional finite element method was used. Due to the specific properties of the material, a stiffness matrix of finite element was used which was based on the finite element moment scheme for weakly compressible material. The scheme included a triple approximation of the displacement vector components, strain tensor components and a function of volume change. To take into account the abrasive-fatigue wear, a macroscopic characteristic is built in the form of effective elasticity modulus of the rubber with a damage which can be modeled with inclusions whose properties differ from properties of initial material. The integral relations based on the Boltzmann-Valterra hereditarily theory were used for designing a model of viscoelastic behavior. An exponential kernel containing the material instantaneous and continuous attributes was used as an relaxation kernel. Numerical convergence of the obtained results was analyzed. The proposed mathematical model was implemented in a computational complex "MIRELA+". Elastomer lining in the drum-ball ore shredding mills was calculated with taking into account specific properties of material and rheological conditions of deformation. Basic parameters of the lining stress-strain state were determined depending on the applied load and conditions of deformation.

**Keywords:** elastomer lining, abrasive-fatigue wear, finite element moment scheme

*Стаття постуила в редакцію 03.04.2015*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, проф. В.И. Дырдой*