

Спектр андреевских состояний в несимметричном S_1NS_2 -переходе

Ю. Г. Пейсахович, А. А. Штыгашев

Новосибирский государственный педагогический университет,
Россия, 630068, г. Новосибирск, ул. Вилуйская, 28
E-mail: ygp@ngpi.nsk.su

Статья поступила в редакцию 20 октября 1998 г., после переработки 4 января 1999 г.

Рассмотрен полностью асимметричный S_1NS_2 -переход с разными поверхностями Ферми в слоях. Построена трансфер-матрица и найден спектр локализованных состояний. Ослабление фазовой зависимости с ростом различия импульсов Ферми в слоях имеет медленный степенной характер.

Розглянуто повністю асиметричний S_1NS_2 -перехід з різними поверхнями Фермі у шарах. Побудовано трансфер-матрицю та знайдено спектр локалізованих станів. Ослаблення фазової залежності із зростанням відмінності імпульсів Фермі у шарах має повільний степеневий характер.

PACS: 74.50.+r

В настоящее время хорошо известно, что образование дискретных андреевских уровней является основным механизмом, который определяет фазовую зависимость сверхпроводящего тока, протекающего через SNS -переход в условиях стационарного эффекта Джозефсона [1–5].

Спектр перехода обычно определяют из рассмотрения одномерной задачи рассеяния, сшивая решения для трех областей с кусочно-постоянными значениями физических характеристик. При этом, начиная с основополагающей работы Андреева [2], считают, что значения поперечных границам сред проекций импульсов Ферми k_{Fx} одинаковы для всех участвующих в процессе сшивки волн. В работе [2] это диктовалось физическими условиями задачи о промежуточном состоянии однородного по составу образца. В появившихся затем работах [6–9] о SNS -переходах и SN -сверхрешетках это условие принимается автоматически, что следует рассматривать как существенно модельное предположение (андреевское приближение [7]).

В реальных широких асимметричных S_1NS_2 -переходах, составленных из разных металлов, очевидно, что ферми-поверхности, относящиеся к различным областям, имеют разные форму и размер, что необходимо учитывать при сшивании соответствующих решений и нахождении тока. Старые теории, основанные на модели туннельного гамильтониана [4], это обстоятельство описы-

вали просто произведением энергетических плотностей состояний контактов с обратными корневыми особенностями на порогах их сверхпроводящих щелей. В недавних работах о баллистических джозефсоновских переходах [6,9] рассматривались такие асимметричные контакты S_1NS_2 , в которых при одинаковом импульсе Ферми k_{Fx} абсолютные величины потенциалов спаривания слева Δ_1 и справа Δ_2 считались различными, исследовались спектр таких переходов и ток через них. При наличии дополнительных диэлектрических барьеров на границах N -области наряду с андреевским требуется учитывать обычное рассеяние квазичастиц и выход за рамки андреевского приближения [10].

В настоящей работе изучено и численно проанализировано уравнение для спектра андреевских состояний при полной асимметрии S_1NS_2 -перехода с учетом различия поперечных импульсов Ферми в слоях. При этом, помимо андреевского отражения, по определению связанного с малым изменением импульса квазичастиц $\delta k \sim k_F \Delta/\mu$, где μ — энергия Ферми, происходит обычное отражение квазичастиц от границ металлов с относительно большим изменением импульса $\delta k \sim k_F$. Этот канал рассеяния всегда присутствует в реальных системах, и его учет необходим для полного описания фазовой зависимости тока. Будет показано, как с ростом величины различия импульсов Ферми в слоях плавно исчезает зави-

симось энергии андреевских состояний от когерентной разности фаз. Отсюда следует, что фазовозависящий вклад в сверхпроводящий ток через такие переходы пропорционален произведению площадей квазицилиндрических поясков, имеющих одинаковые k_{Fx} на ферми-поверхностях разных сред.

В реальных металлах электроны проводимости имеют сложный закон дисперсии энергии $E = E(\mathbf{k})$, где \mathbf{k} — квазиимпульс, а поверхность Ферми может быть весьма причудливой формы [11,12]. Для описания квазичастиц сверхпроводника со сложной топологией зон проводимости запишем уравнения Боголюбова—де Жена в виде [11]

$$\begin{pmatrix} \hat{H}(-i\hbar\nabla + \mathbf{p}_s) - \mu - \varepsilon & -\Delta \\ \Delta & \hat{H}(-i\hbar\nabla - \mathbf{p}_s) - \mu + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

Здесь мы заменили оператор кинетической энергии электрона $(-\hbar^2\nabla^2/2m)$ оператором Гамильтона $\hat{H}(-i\hbar\nabla)$, собственными функциями которого являются плоские волны, огибающие блоховские функции:

$$\hat{H}(-i\hbar\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = E(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2)$$

В кристаллах такая замена обосновывается с помощью представления Ванье [12] либо по аналогии с описанием оптической пространственной дисперсии в электромагнитном волновом уравнении, когда фазовая скорость света зависит от длины волны. Слабое магнитное поле в кристаллах можно описать векторным потенциалом $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ посредством подстановки Пайерлса [12] в закон дисперсии квазиимпульса, в связи с чем в (1) мы ввели калибровочно-инвариантный сверхтекучий импульс $\mathbf{p}_s = \hbar\nabla\Phi/2 - e\mathbf{A}/c$, а калибровку \mathbf{A} выбрали так, что потенциал спаривания $\Delta = \Delta(\mathbf{r})$ действителен, т.е. его фаза Φ равна нулю.

В рамках одночастичной спектральной задачи часто (при $a \gg \xi$, где a — ширина N -области, ξ — длина корреляции) можно считать $E(\mathbf{k})$, Δ и \mathbf{p}_s заданными кусочно-постоянными в соответствующих областях, а уравнения (1) линейными дифференциальными. Направим ось X перпендикулярно слоям вдоль тока \mathbf{p}_s , левая граница N -области лежит при $x = 0$, правая — при $x = a$. Частные решения одномерной задачи имеют вид e^{ikx} . Мы ограничимся типичным случаем, когда поверхности Ферми однополостные и обладают центром инверсии $E(\mathbf{k}_F) = E(-\mathbf{k}_F)$, а характеристическое уравнение для (1) в каждой среде имеет

четыре корня (при сферической поверхности Ферми это очевидно):

$$k_{1,3} = k_F \pm (\hbar v_F)^{-1} \sqrt{(\varepsilon - v_F p_s)^2 - \Delta^2}, \quad (3)$$

$$k_{2,4} = -k_F \mp (\hbar v_F)^{-1} \sqrt{(\varepsilon + v_F p_s)^2 - \Delta^2},$$

здесь k_1 и k_2 соответствуют электроноподобным, а k_3 и k_4 — дырочноподобным возбуждениям; поперечный импульс Ферми k_F определяется из уравнения $E(k_F, \mathbf{k}_\parallel) = \mu$, где \mathbf{k}_\parallel — продольный граничный импульс Ферми; поперечная групповая скорость $v_F = \partial E(k_F, \mathbf{k}_\parallel)/\partial k_F$; почти на всей поверхности Ферми $v_F k_F \gg \varepsilon, \Delta, v_F p_s$.

Решение в произвольной точке можно записать с помощью трансфер-матрицы $\Psi(x) = M_x \Psi(0)$, где $\Psi(x) = \text{col}(u, du/dx, v, dv/dx)$, а $\Psi(0)$ — столбец граничных условий в точке $x = 0$ [13]. Матрица передачи M_x в однородном слое имеет вид

$$M_x = L M_{Dx} L^{-1}, \quad (4)$$

где L — матрица диагонализации, т.е. $\Psi(x) = L\Psi_D(x)$, а в диагональном представлении $\Psi_D(x) = \text{col}(A_1 e^{ik_1x}, A_2 e^{ik_2x}, A_3 e^{ik_3x}, A_4 e^{ik_4x})$, $M_{Dx} = \text{diag}(e^{ik_1x}, e^{ik_2x}, e^{ik_3x}, e^{ik_4x})$. Из непрерывности плотности тока следует, что сверхтекучий импульс частиц \mathbf{p}_s велик в N -области, где плотность конденсата мала и, напротив, может быть приближенно положен равным нулю в S -областях. Тогда модуль набег фазы волновых функций квазичастиц в нормальной области, определяющий в основном дисбаланс спектров прямого и обратного токов, равен $\Phi/2 = p_s a$ [3]. Этот параметр автоматически входит в экспоненциальные факторы матрицы передачи через N -область, что позволяет при выбранной простой калибровке (1) использовать только обычные условия непрерывности волновых функций и их производных на границах вместо условия Кулика [1], вводимого для уравнений с комплексным $\Delta(x)$. В этом приближении ($\Delta_1 \neq 0, \mathbf{p}_s = 0$) в S_j -областях ($j = 1, 2$) матрицы L_j даются прямым произведением

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ l_j & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik_{Fj} & -ik_{Fj} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $l_j = (\gamma_j - \varepsilon)/\Delta_j = -\Delta_j/(\gamma_j + \varepsilon)$ — факторы когерентности парциальных u - и v -волн, $\gamma_j = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_j^2}$. В N -области L получается из (5) при $\Delta_j = l_j = 0$, $k_{Fj} = k_{F0}$, тогда матрица передачи (4) имеет вид

$$M_{Nx} = \begin{pmatrix} N_1 e^{-ip_s x} & 0 \\ 0 & N_3 e^{ip_s x} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$N_{1,3} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_{1,3} x & \frac{1}{k_{F0}} \sin \kappa_{1,3} x \\ -k_{F0} \sin \kappa_{1,3} x & \cos \kappa_{1,3} x \end{pmatrix},$$

где $\kappa_{1,3} = k_{F0} \pm \varepsilon/\hbar v_{F0}$.

Задавая граничные условия $\Psi(a)$ и во второй точке $x = a$, получаем уравнение $\Psi(a) = M_a \Psi(0)$. Для подбарьерных состояний асимметричного S_1NS_2 -перехода $\Delta_1 > \Delta_2 > \varepsilon$, оставляя на границах только затухающие влево и вправо волны $\Psi(0) = L_1 \text{col}(0, A_2, A_3, 0)$, $\Psi(a) = L_2 \text{col}(A_1, 0, 0, A_4)$, имеем четыре уравнения для амплитуд:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \\ A_4 \end{pmatrix} = L_2^{-1} M_{Na} L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Приравнивая нулю определитель, получаем искомого уравнение для спектра связанных в переходе андреевских состояний:

$$\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi = \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tau_1 \tau_2 \cos 2k_{F0} a + \left(\varepsilon^2 - \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \eta_1 \eta_2 \right) \cos \frac{2\varepsilon a}{\hbar v_{F0}} + \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{\gamma}_1 \eta_1 + \tilde{\gamma}_2 \eta_2) \sin \frac{2\varepsilon a}{\hbar v_{F0}}, \quad (8)$$

где

$$\tau_i = \frac{k_{F0}}{k_{Fi}} - \frac{k_{Fi}}{k_{F0}}, \quad \eta_i = \frac{k_{F0}}{k_{Fi}} + \frac{k_{Fi}}{k_{F0}}, \quad (9)$$

$$\tilde{\gamma}_i = \sqrt{\Delta_i^2 - \varepsilon^2}, \quad i = 1, 2.$$

При $k_{F1} = k_{F2} = k_{F0}$ оно переходит в уравнение, полученное в [6,9] (рис. 1,а). Кроме дополнительной асимметрии $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 0$, $\eta_1 \neq \eta_2 \neq 2$, качественно новым является первое слагаемое в правой части (8), которое осциллирует с изменением параметра $k_{F0} a$ и особенно существенно вблизи дна ямы $\varepsilon \ll \Delta_2 < \Delta_1$. Его появление фактически связано с учетом канала обычного рассеяния на потенциальных барьерах SN -границ. Видно, что поведение спектра сильно зависит от структуры поверхностей Ферми во всех трех областях. Если $\tau_i \sim \eta_i \gg 1$, то зависимость

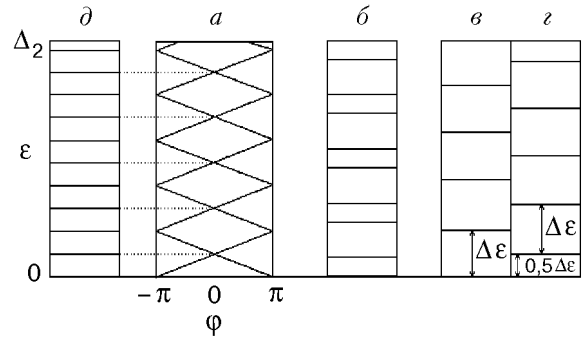


Рис. 1. Характерные асимптотики спектра андреевских состояний в N -области.

энергии андреевских уровней от φ исчезает, зоны сжимаются в дискретные уровни, но характер асимптотики может быть разным. Например, для процессов с $k_{F1} = k_{F2} \neq k_{F0}$ (рис. 2, где $t = \eta_1/2 - 1$, расчет по (8) при $\Delta_1 = \Delta_2 = 10^{-3}$ эВ, $a = 3 \cdot 10^{-7}$ м, $k_{F0} = 5,8 \cdot 10^8$ м $^{-1}$, $v_{F0} = \hbar k_{F0}/m$) при $\tau_1 = \tau_2 \gg 1$ и $\eta_1 = \eta_2 \gg 1$ получаем спектр $\kappa_{1,3} a = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), состоящий из эквидистантных дублетов (рис. 1,б) стоячих волн с $k = \kappa_{1,3}$, запертых в прямоугольной яме; если $k_{F0} a = n\pi/2$, то линии в дублетах сливаются: при четном n имеем $\varepsilon = l\Delta\varepsilon$ (рис. 1,в), при нечетном — $\varepsilon = (l + 1/2)\Delta\varepsilon$ (рис. 1,з), где $\Delta\varepsilon = \pi\hbar v_{F0}/a$, l — целое. Для процессов с $k_{F1} \neq k_{F2} = k_{F0}$ ($\tau_2 = 0$, $\eta_2 = 2$) при $\eta_1 \gg 1$ имеем андреевский спектр без тока $\varphi = 0$ [1-3] в яме удвоенной ширины $2a$, т.е.

$$\text{tg} \frac{2\varepsilon a}{\hbar v_{F0}} = \frac{\tilde{\gamma}_2}{\varepsilon}. \quad (10)$$

По правилу квантования Бора-Зоммерфельда это соответствует зеркальному отражению от левой стенки падающей справа волны, расстояния между линиями почти одинаковы (рис. 1,д). Обратим внимание на независимость этих асимпто-

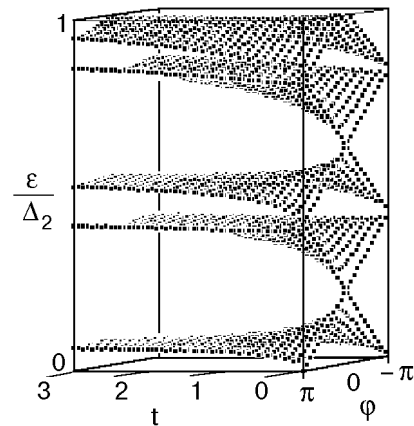


Рис. 2. Эволюция фазовой зависимости энергии состояний с увеличением разности поперечных импульсов ферми в S - и N -областях (расчет по (8)).

тик от соотношения между k_{Fi} и от знаков τ_i . Зависимость спектра от ϕ исчезает достаточно плавно в фазовом пространстве на величинах параметров

$$\eta \sim \tau \sim t \sim \frac{\Delta}{\gamma} = \begin{cases} 1, & \varepsilon \ll \Delta_2 \\ \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta_2 - \varepsilon}} \gg 1, & \varepsilon \leq \Delta_2 \end{cases} \quad (11)$$

вблизи верха ямы значительно медленнее, чем вблизи дна.

Выведенное нами спектральное уравнение (8) учитывает наряду с различием потенциалов спаривания на S -берегах перехода также различие поперечных импульсов Ферми частиц во всех областях. Кроме андреевского канала рассеяния учтено обычное рассеяние на SN -границах. Метод трансфер-матрицы [13] позволяет автоматизировать процедуру сшивания решений и легко выйти за пределы андреевского приближения.

При нахождении тока через переход суммирование по состояниям требует интегрирования по фазовым объемам вблизи ферми-поверхностей всех трех сред. Из оценки (11) и рис. 1, 2 видно, что вычисление фазовозависящей части тока (как подбарьерного, так и надбарьерного) следует производить аккуратным численным суммированием, однако из нашего анализа следует, что эта часть тока грубо определяется наличием на всех трех поверхностях Ферми участков с одинаковыми значениями k_{Fx} , т.е. поясков квазицилиндрической формы с высотой, определяемой наименьшей из поверхностей, и несет информацию о площади этих поясков и их ориентации относительно кристаллографических осей.

Не представляет труда обобщить полученные результаты для учета дополнительных каналов рассеяния, в частности на случай более сложной топологии поверхности Ферми (отсутствие центра инверсии, невыпуклость, неодносвязность, самопересечение, магнитное расщепление и т.п.),

когда корни характеристического уравнения для (1) в слое имеют разные k_F и v_F или число этих корней больше четырех. В последнем случае в векторе состояния $\Psi(x)$ надо добавить строки с производными более высокого порядка по числу корней, а матрицы M_x и L имеют размерность, равную числу корней.

1. И. О. Кулик, *ЖЭТФ* **57**, 1745 (1969).
2. А. И. Андреев, *ЖЭТФ* **46**, 1823 (1964).
3. J. Bardeen and J. L. Johnson, *Phys. Rev.* **B5**, 72 (1972); А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1982).
4. V. Ambegaokar and A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 486 (1963); Е. Л. Вольф, *Принципы электронной туннельной спектроскопии*, Наукова думка, Киев (1990).
5. С. J. Lambert and R. Raimondi, *J. Phys.: Condens. Matter* **10**, 901 (1998).
6. P. F. Bagwell, *Phys. Rev.* **B46**, 12573 (1992); R. A. Riedel and P. F. Bagwell, *Phys. Rev.* **B48**, 15198 (1993).
7. R. Kummel, *Phys. Rev.* **B16**, 1979 (1977); M. Hurd and G. Wendin, *Phys. Rev.* **B49**, 15258 (1994).
8. Y. Tanaka and M. Tsukada, *Phys. Rev.* **B44**, 7578 (1991); С. В. Куплевацкий, И. И. Фалько, *ФНТ* **18**, 203 (1992); Н. Plehn, О. J. Wacker, and R. Kummel, *Phys. Rev.* **B49**, 12140 (1994).
9. С. В. Куплевацкий, И. И. Фалько, *ФНТ* **17**, 961 (1991).
10. Г. А. Гогодзе, А. М. Косевич, *ФНТ* **24**, 716 (1998).
11. Yu. G. Peisakhovich, *J. Supercond.* **9**, 579 (1996).
12. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
13. Yu. G. Peisakhovich, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 5103 (1996).

Andreev state spectrum in nonsymmetric S_1NS_2 -junctions

Yu. G. Peisakhovich and A. A. Shtygashv

The completely asymmetric S_1NS_2 -junction with different Fermi surfaces in the layers is under consideration. A transfer-matrix is constructed and a localized state spectrum is obtained. The reduction of the phase dependence with increasing the difference in Fermi momenta in the layers has a slow power character.