УДК 62-501.47

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЗІ ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О.А. КАПУСТЯН

Розглядаються питання синтезу оптимальних граничних (залежних лише від часу) керувань для задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. Отримано вигляд усередненого керування зі зворотним зв'язком через коефіцієнти Фур'є усередненої задачі на власні числа. Наведено обгрунтування збіжності наближених керувань до точних, і встановлена властивість асимптотичної стійкості для вихідної системи, замкненої вказаним керуванням.

Нехай керований процес в області $Q = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ t_0 \le t < \infty\}$ описується функцією $y^\varepsilon(x,t)$, яка задовольняє крайову задачу

$$\frac{\partial y^\varepsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial y^\varepsilon(x,t)}{\partial x}\right) + b(\varepsilon^{-1}x)y^\varepsilon(x,t) + g(x)v(t), \tag{1}$$

$$y^\varepsilon(0,t) = y^\varepsilon(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$y^\varepsilon(x,t_0) = \varphi(x), \tag{3}$$

де $0<\varepsilon<1$; $g(x), \varphi(x) \in L_2(0,l)$; $\alpha(x)$, $b(x)$ — гладкі 1-періодичні функції [3]; $\upsilon_1 \le \alpha(x) \le \upsilon_2$; $\upsilon_i = \text{const} > 0$; $0 \le -b(x) \le b_2 < \infty$; $b_2 = \text{const}$.

Допустимими керуваннями вважаємо функції $v(t) \in L_2(t_0,\infty)$. У якості критерію оптимальності вибираємо функціонал

$$I(v) = \int_{t_0}^{\infty}\left[\int_0^l (y^\varepsilon(x,t))^2\,dx + \gamma v^2(t)\right]dt, \quad \gamma = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Згідно з роботою [4], оптимальне керування $u = u[y^\varepsilon]$ для задачі (1)–(4) повинно бути асимптотично стійким. В [1,5] знайдено асимптотично стійке оптимальне керування

$$u^\varepsilon = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i^\varepsilon g_i^\varepsilon}{(\lambda_i^\varepsilon)^2(1+\gamma_i^\varepsilon)}, \tag{5}$$

де додатні числа γ_i^ε, $i = 1,2,\ldots$ являють собою єдиний розв'язок нелінійної системи [6]

$$\gamma_i^\varepsilon = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(g_j^\varepsilon)^2}{((\lambda_i^\varepsilon)^2 + (\lambda_j^\varepsilon)^2)(\lambda_j^\varepsilon)^2(1+\gamma_j^\varepsilon)}, \quad i = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

Для цих чисел вірна оцінка [6]

$$0<\gamma_{i+1}^{\varepsilon}<\gamma_i^{\varepsilon}<\frac{1}{2\gamma(\lambda_i^{\varepsilon})^2(\lambda_1^{\varepsilon})^2}\|g\|_{L_2(0,l)}. \tag{7}$$

У формулах, представлених за допомогою рядів, обмежимось скінченною кількістю N доданків, а всі коефіцієнти Фур'є за розв'язками спектральної задачі для диференціального оператора задачі (2)–(4), окрім коефіцієнтів Фур'є розв'язків цієї задачі, замінимо відповідними коефіцієнтами за розв'язками усередненої спектральної задачі. Тоді замість керування (5) будемо розглядати керування

$$\tilde{u}_N^{\varepsilon}[\tilde{y}_N^{\varepsilon}]=-\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{\tilde{y}_{iN}^{\varepsilon}g_i^0}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)}, \tag{8}$$

де $\{\gamma_{iN}^0\}_{i=1}^N$ — єдиний додатний розв'язок нелінійної системи

$$\gamma_i^0=\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\frac{(g_j^0)^2}{((\lambda_i^0)^2+(\lambda_j^0)^2)(\lambda_j^0)^2(1+\gamma_{jN}^0)},\quad 1\le i\le N; \tag{9}$$

$\tilde{y}_{iN}^{\varepsilon}=(y_N^{\varepsilon},X_i^0)$, а y_N^{ε} — розв'язок задачі (1)–(3) з керуванням (8).

Лема 1. Для довільних $\varepsilon>0$, $N\ge 1$ задача (1)–(3) з керуванням (8) має єдиний роз'язок з класу $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, причому цей роз'язок належить $C([0,T;L_2(\Omega))$ і $\forall t\in[0,\,T]$, справедлива оцінка

$$\left\|y_N^{\varepsilon}(t)\right\|\le\|\varphi\|\exp\left(\frac{1}{\gamma}\|g\|^2\left\|q^{\varepsilon}\right\|^2 T\right). \tag{10}$$

Теорема. Нехай функція з початкової умови $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $|g(x)|\le$ $\le(\lambda_0^1)^2\sqrt{\frac{\gamma}{l}}$ для майже всіх $x\in(0,l)$.

Тоді керування (8) розв'язує задачу наближеного синтезу оптимального керування задачі (1)–(4) таким чином: $\forall\eta>0$, $\exists N_1\ge 1$, $\varepsilon_1>0$ такі, що $\forall N\ge N_1$, $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, $\forall t\ge t_0$,

$$\left|u_N[y_N^{\varepsilon}(t)]-u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}(t)]\right|<\eta, \tag{11}$$

$$\left|J^{\varepsilon}(u_N[y_N^{\varepsilon}])-J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}])\right|<\eta. \tag{12}$$

Доведення. Позначимо

$$A^{\varepsilon}:=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial}{\partial x}\right)+b,\quad A^0:=\frac{\partial}{\partial x}\left(a^0\frac{\partial}{\partial x}\right)+\langle b\rangle,$$

$$\beta_i^{\varepsilon}:=-\frac{1}{2\gamma}\frac{g_i^{\varepsilon}}{(\lambda_i^{\varepsilon})^2(1+\gamma_i^{\varepsilon})},\quad \beta_{iN}^0:=-\frac{1}{2\gamma}\frac{g_i^0}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)},$$

де $\langle b \rangle = \frac{1}{l}\int_0^l b(x)dx$; $a^0 = \left\langle a^{-1} \right\rangle^{-1}$; λ_i^ε, λ_i^0, $i = 1,2,...$ — відповідно власні числа спектральної задачі оператора вихідної задачі (1)–(3) і усередненої спектральної задачі, розташовані у порядку зростання. Тоді керування (5) матиме вигляд

$$u^\varepsilon[y^\varepsilon] = \left(y^\varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right), \tag{13}$$

а рівняння (1)

$$y_t^\varepsilon = A^\varepsilon y^\varepsilon + g\left(y^\varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right). \tag{14}$$

Домножимо останнє рівняння на y^ε і одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\| y^\varepsilon \|^2 + (\lambda_1^\varepsilon)^2 \| y^\varepsilon \|^2 \le \| g \| \, \| y^\varepsilon \|^2 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right\|. \tag{15}$$

Оскільки

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i^\varepsilon)^2}\,,$$

$$(\beta_i^\varepsilon)^2 = \frac{1}{4\gamma^2} \frac{(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^4 (1+\gamma_i^\varepsilon)^2} \le \frac{1}{4\gamma^2}\frac{(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_1^\varepsilon)^4}\,,$$

то

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right\| \le \frac{1}{4\gamma^2 (\lambda_1^\varepsilon)^4} \sum_{i=1}^{\infty} (g_i^\varepsilon)^2 = \frac{1}{4\gamma^2 (\lambda_1^\varepsilon)^4} \| g \|^2 .$$

Тоді (15) перепишеться у вигляді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\| y^\varepsilon \|^2 + (\lambda_1^\varepsilon)^2 \| y^\varepsilon \|^2 \le \| y^\varepsilon \|^2 \frac{\| g \|^2}{2\gamma (\lambda_1^\varepsilon)^2}. \tag{16}$$

Оскільки $\left| \lambda_1^\varepsilon - \lambda_1^0 \right| \le C_1 \varepsilon$ [3], то $\exists \varepsilon_1 > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$,

$$(\lambda_1^0)^2 \le (\lambda_1^\varepsilon + C_1\varepsilon)^2 = (\lambda_1^\varepsilon)^2 + 2\lambda_1^\varepsilon C_1 \varepsilon + (C_1\varepsilon)^2 \le$$

$$\le (\lambda_1^\varepsilon)^2 + (C_1\varepsilon)^2 + 2C_1\varepsilon(\lambda_1^0 + C_1\varepsilon) \le (\lambda_1^\varepsilon)^2 + (\sqrt[4]{2} - 1)(\lambda_1^0 + C_1\varepsilon)^2 \le$$

$$\le (\lambda_1^\varepsilon)^2 + (\sqrt[4]{2} - 1)(\lambda_1^\varepsilon)^2 = \sqrt[4]{2}(\lambda_1^\varepsilon)^2 .$$

Тоді, враховуючи нерівність з умови теореми $| g(x) | \le (\lambda_1^0)^2 \sqrt{\frac{\gamma}{l}}$, а також те, що $\| g \|^2 \le (\lambda_1^0)^4 \gamma$, маємо

$$\frac{\| g \|^2}{2\gamma (\lambda_1^\varepsilon)^2} \le \frac{(\lambda_1^0)^4 \gamma}{2\gamma (\lambda_1^\varepsilon)^2} \le \frac{\sqrt{2}(\lambda_1^\varepsilon)^4}{2(\lambda_1^\varepsilon)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1^\varepsilon)^2 .$$

Отже, з останньої нерівності та з (16) одержимо

$$\frac{d}{dx}\| y^{\varepsilon} \|^2 + 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\lambda_1^{\varepsilon})^2 \| y^{\varepsilon} \|^2 \le 0\,, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\| y^{\varepsilon} \|^2 + \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\lambda_1^{0})^2 \| y^{\varepsilon} \|^2 \le 0\,. \tag{18}$$

Позначивши

$$\delta = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\lambda_1^{0})^2 > 0\,, \tag{19}$$

за лемою Гроноулла будемо мати

$$\| y^{\varepsilon}(t) \|^2 \le \| \varphi(x) \|^2 \, e^{-\delta(t-t_0)}\,, \tag{20}$$

де число δ з (19) не залежить від ε.

Тепер для кожного $N \ge 1$ розглянемо задачу (1)–(3) з наближеним керуванням

$$u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}] = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_{iN}^{\varepsilon}\, g_i^0}{(\lambda_i^0)^2(1+\gamma_{iN}^0)} = \left(y_N^{\varepsilon}, \sum_{i=1}^{N}\beta_{iN}^0 X_i^0\right), \tag{21}$$

де y_N^{ε} — розв'язок задачі (1)–(3) з керуванням (21).

Оскільки

$$\left\| \sum_{i=1}^{N}\beta_{iN}^0 X_i^0 \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\beta_{iN}^0)^2} \le \frac{1}{2\gamma(\lambda_1^0)^2}\| g^0 \|,$$

то однозначна розв'язність задачі (1)–(3) з керуванням (21) на довільному проміжку часу випливає з леми 1. Тоді, домноживши рівняння

$$y_{N_t}^{\varepsilon} = A^{\varepsilon} y_N^{\varepsilon} + g\left(y_N^{\varepsilon}, \sum_{i=1}^{N}\beta_{iN}^0 X_i^0\right)$$

на y_N^{ε}, одержимо аналогічно попередньому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\| y_N^{\varepsilon} \|^2 + (\lambda_1^{\varepsilon})^2 \| y_N^{\varepsilon} \|^2 \le \| y_N^{\varepsilon} \|^2 \frac{\| g \|^2}{2\gamma(\lambda_1^0)^2} \le \| y_N^{\varepsilon} \|^2 \frac{(\lambda_1^{\varepsilon})^2}{\sqrt{2}}\,.$$

Отже,

$$\| y_N^{\varepsilon}(t) \|^2 \le \| \varphi(x) \|^2 \, e^{-\delta(t-t_0)}\,, \tag{22}$$

де величина δ з (19).

З (20) і (22) маємо, що $\forall t \ge t_0$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\forall N \ge 1$,

$$\| y^{\varepsilon}(t) - y_N^{\varepsilon}(t) \| \le \| y^{\varepsilon}(t) \| + \| y_N^{\varepsilon}(t) \| \le 2\| \varphi \| e^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)}\,. \tag{23}$$

Оскільки

$$|u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}]| = \frac{1}{2\gamma}\left|\left(y^{\varepsilon}, \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}\right)\right| \le \frac{1}{2\gamma}\| y^{\varepsilon}\| \frac{1}{2\gamma(\lambda_1^{\varepsilon})^2}\| g\| \le C_1 \| y^{\varepsilon}\| ,$$

де

$$C_1 = \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}{4\gamma^2} > 0$$

і не залежить від ε ,

$$\left|u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}]\right| \le \frac{1}{2\gamma}\| y_N^{\varepsilon}(t)\| \frac{1}{2\gamma(\lambda_1^{0})^2}\| g\| \le C_1 \| y_N^{\varepsilon}(t)\| ,$$

то

$$\left|u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}] - u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}]\right| \le 2C_1\|\varphi\| e^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)} . \tag{24}$$

Отже, $\forall\eta > 0$ існує такий момент часу $t_1 \ge t_0$, що $\forall\varepsilon > 0$, $\forall N \ge 1$, $\forall t \ge t_1$ виконується нерівність

$$\left|u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}] - u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}]\right| < \eta . \tag{25}$$

Розглянемо $\forall t \ge t_0$ величину

$$J_t(v) := \int_t^{\infty}\left(\| y^{\varepsilon}(s)\| + \gamma v^2(s)\right)ds .$$

При $t = t_0$ ця величина співпадає з критерієм якості (4).

Тоді

$$\left|J_t(u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}]) - J_t(u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}])\right| \le \int_t^{\infty}\left(2\|\varphi\|^2 e^{-\delta(s-t_0)} + 2\gamma C_1^2\|\varphi\|^2 e^{-\delta(s-t_0)}\right)ds =$$

$$= 2\|\varphi\|^2 \frac{1}{\delta}\left(1+\gamma C_1^2\right)e^{-\delta(t-t_0)} .$$

Звідси одержимо, що $\forall\eta > 0$, $\exists t_2 \ge t_0$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall N \ge 1$, $\forall t \ge t_2$ виконується нерівність

$$\left|J_t(u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}]) - J_t(u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}])\right| < \eta . \tag{26}$$

Таким чином, для довільного $\eta > 0$ з нерівностей (25) і (26) випливає існування моменту часу $t_3 = \max\{t_1, t_2\} \ge t_0$, який не залежить від N і ε, що $\forall N \ge N_1$, $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\forall t \ge t_3$

$$\left|u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}] - u_N^{\varepsilon}[y_N^{\varepsilon}]\right| < \eta ,$$

$$\left|J_{t_3}(u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}]) - J_{t_3}(u_n^{\varepsilon}[y_n^{\varepsilon}])\right| < \eta . \tag{27}$$

Залишилося встановити близькість керувань і критеріїв якості на $[t_0, t_3]$ при досить великих $N \geq 1$ і малих $\varepsilon > 0$.

Розглянемо на інтервалі $[t_0, t_3]$ задачу (1)–(3) з керуванням (21). Оскільки для розв'язку цієї задачі y_N^ε виконується оцінка (22), то, позначивши

$$F_N^\varepsilon(x,t) := g(x)\left(y_N^\varepsilon, \sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0 \right),$$

маємо, що $F_N^\varepsilon \in L_\infty(t_0, t_3; L_2(\Omega))$ і $\forall t \in [t_0, t_3]$,

$$\left\| F_N^\varepsilon(t) \right\| \leq (\lambda_1^0)^2 \|\varphi\|. \tag{28}$$

Тоді з леми 1 і з умови $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ одержуємо оцінку $\forall t \in [t_0, t_3]$

$$\int_{t_0}^{t} \left\| y_{N_t}^\varepsilon \right\|^2 dt + \left\| y_N^\varepsilon(t) \right\|_{H_0^1}^2 \leq \|\varphi\|_{H_0^1}^2 + (\lambda_0^1)^4 \|\varphi\|^2 (t_3 - t_0). \tag{29}$$

Звідси випливає існування такої функції $z^\varepsilon = z^\varepsilon(x,t)$, що $y_N^\varepsilon \to z^\varepsilon$. Для того щоб перейти до границі при $N \to \infty$ у задачі (1)–(3) з керуванням (21), необхідно довести збіжність $\sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0$.

Лема 2. $\sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0 \to \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0$ слабко в $L_2(\Omega)$ при $N \to \infty$, де

$$\beta_i^0 = -\frac{1}{2\gamma} \frac{g_i^0}{(\lambda_i^0)^2 (1 + \gamma_i^0)};$$

$\{\gamma_i^0\}_{i=1}^\infty$ — єдиний додатний розв'язок системи

$$\gamma_i^0 = \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(g_j^0)^2}{((\lambda_i^0)^2 + (\lambda_j^0)^2)(\lambda_j^0)^2 (1 + \gamma_j^0)}, \quad i \geq 1.$$

Доведення. Оскільки $\left\| \sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0 \right\| \leq \frac{\|g\|}{2\gamma (\lambda_1^0)^2}$, то послідовність $\left\{ \sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0 \right\}_{i=1}^\infty$ обмежена в $L_2(\Omega)$.

Тоді

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0 \to \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0 \text{ слабко в}$$

$$L_2(\Omega) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \beta_{iN}^0 X_i^0, \psi\right) \to \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0, \psi\right)$$

для довільного елемента ψ базису в $L_2(\Omega)$. Виберемо в якості такого базису $\{X_i^0\}_{i=1}^{\infty}$.

Тоді $\forall i \geq 1$

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \beta_{jN}^0 X_j^0, X_i^0\right) \to \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^0 X_j^0, X_i^0\right) \Leftrightarrow \beta_{iN}^0 \to \beta_i^0 \Leftrightarrow \gamma_{iN}^0 \to \gamma_i^0 .$$

Доведемо останню збіжність. Маємо $\forall i \geq 1$

$$\gamma_i^0 = \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=1}^{N} \frac{(g_j^0)^2}{((\lambda_i^0)^2 + (\lambda_j^0)^2)(\lambda_j^0)^2 (1+\gamma_j^0)} + $$
$$+ \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(g_j^0)^2}{((\lambda_i^0)^2 + (\lambda_j^0)^2)(\lambda_j^0)^2 (1+\gamma_j^0)} .$$

Другий доданок є додатним і обмеженим числом

$$\alpha_N := \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=N+1}^{\infty} (g_j^0)^2 ,$$

причому α_N не залежить від i, $\alpha_N \to 0$ при $N \to \infty$. Далі, для довільного $N \geq 1$ існує номер $i_N \leq N$ такий, що

$$\left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| = \max_{1 \leq i \leq N} \left|\gamma_i^0 - \gamma_{iN}^0\right| .$$

Тоді

$$\left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| \leq \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=1}^{N} \frac{(g_j^0)^2}{((\lambda_{i_N}^0)^2 + (\lambda_j^0)^2)(\lambda_j^0)^2} \left|\gamma_j^0 - \gamma_{jN}^0\right| + \alpha_N \leq$$

$$\leq \left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=1}^{N} \frac{(g_j^0)^2}{(\lambda_j^0)^4} + \alpha_N \leq \left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| \frac{1}{2\gamma} \frac{\|g\|^2}{(\lambda_1^0)^4} + \alpha_N \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| + \alpha_N ,$$

звідки

$$\left|\gamma_i^0 - \gamma_{iN}^0\right| \leq \left|\gamma_{i_N}^0 - \gamma_{i_N N}^0\right| \leq 2\alpha_N ,$$

$\forall i \leq N$ і шукана збіжність доведена.

Звідси z^{ε} — розв'язок задачі (1)–(3) з керуванням $\left(z^{\varepsilon}, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0\right)$. Причому за лемою 1 цей розв'язок єдиний у класі $C\big([t_0, t_3];\ L_2(\Omega)\big)$. Оскільки $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0 \right\| \le \frac{\| g \|}{2\gamma(\lambda_1^0)^2}$, то, повторюючи попередні міркування, для розв'язку z^ε отримаємо оцінку

$$\left\| z^\varepsilon(t) \right\|^2 \le \|\varphi\|^2 e^{-\delta(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_3]. \tag{30}$$

Оцінка (30) дозволяє стверджувати, що для z^ε справедлива оцінка (29). Отже, існує функція $z^0 = z^0(x,t)$ така, що $z^\varepsilon \to z^0$, $\varepsilon \to 0$.

Оскільки з оцінки (30) випливає

$$v^\varepsilon(t) := \left\| \left(z^\varepsilon(t), \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0 \right) \right\| \le \frac{\|g\| \, \|\varphi\|}{2\gamma(\lambda_1^0)^2},$$

і задача (1)–(3) з керуванням $v^\varepsilon(\cdot)$ має єдиний розв'язок, то можемо скористатися оцінкою

$$\left\| y_t^\varepsilon(t) \right\|^2 \le 2\left(\|\varphi\|_{H_1^0}^2 + 4\|g\|^2 ess \sup_{t \in (t_0, +\infty)} | v(t) |^2 \right) \tag{31}$$

для довільного фіксованого $v(.) \in L_\infty(t_0, +\infty)$ і отримати $\left\| z_t^\varepsilon(t) \right\|^2 \le \tilde{C}$ $\forall t \ge t_0$, де константа $\tilde{C} > 0$ не залежить від ε. Тоді одержимо, що z^0 — розв'язок задачі

$$\frac{\partial z^0}{\partial t} = A^0 z^0 + g\left(z^0, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0 \right), \tag{32}$$

$$z^0 \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{33}$$

$$z^0 \Big|_{t=t_0} = \varphi. \tag{34}$$

Тепер розглянемо задачу (1)–(3) з керуванням

$$w^\varepsilon = \left(y^\varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \right).$$

Оскільки для y^ε справджується оцінка (20), то для нього буде справедлива оцінка (29). Таким чином, існує функція $y^0 = y^0(x, y)$ така, що $y^\varepsilon \to y^0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для того щоб перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ в задачі (1)–(3) з керуванням w^ε, доведемо лему.

Лема 3. $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon X_i^\varepsilon \to \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 X_i^0$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_2(\Omega)$.

Доведення. Маємо

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^0X_i^0)=\sum_{i=1}^{N}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^0X_i^0)+\sum_{i=N+1}^{\infty}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^0X_i^0),$$

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{\infty}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^0X_i^0)\right\|^2\le\sum_{i=N+1}^{\infty}|\beta_i^{\varepsilon}|^2+|\beta_i^0|^2)\le\frac{1}{4\gamma^2}\left(\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{\varepsilon})^4}+\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{0})^4}\right).$$

Для переходу до границі при $\varepsilon\to 0$ в доданку $\sum_{i=1}^{N}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^0X_i^0)$ досить довести, що $\beta_i^{\varepsilon}\to\beta_i^0\ \ \forall i\ge 1\Leftrightarrow\gamma_i^{\varepsilon}\to\gamma_i^0\ \ \forall i\ge 1$. Покажемо останню збіжність. Введемо позначення

$$\alpha_{ij}^{\varepsilon}:=\frac{(g_j^{\varepsilon})^2}{\left((\lambda_i^{\varepsilon})^2+(\lambda_j^{\varepsilon})^2\right)(\lambda_j^{\varepsilon})^2},\quad \alpha_{ij}^{0}:=\frac{(g_j^{0})^2}{\left((\lambda_i^{0})^2+(\lambda_j^{0})^2\right)(\lambda_j^{0})^2}.$$

Тоді

$$\gamma_i^{\varepsilon}-\gamma_i^0=\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_{ij}^{\varepsilon}}{1+\gamma_j^{\varepsilon}}-\frac{\alpha_{ij}^{0}}{1+\gamma_j^{0}}\right)+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{ij}^{\varepsilon}}{1+\gamma_j^{\varepsilon}}-\frac{\alpha_{ij}^{0}}{1+\gamma_j^{0}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_{ij}^{\varepsilon}-\alpha_{ij}^{0}}{(1+\gamma_j^{\varepsilon})(1+\gamma_j^{0})}\right)+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_{ij}^{\varepsilon}(\gamma_{ij}^{0}-\gamma_j^{\varepsilon})}{(1+\gamma_j^{\varepsilon})(1+\gamma_j^{0})}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\gamma_j^{\varepsilon}(\alpha_{ij}^{\varepsilon}-\alpha_{ij}^{0})}{(1+\gamma_j^{\varepsilon})(1+\gamma_j^{0})}\right)+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{ij}^{\varepsilon}}{1+\gamma_j^{\varepsilon}}-\frac{\alpha_{ij}^{0}}{1+\gamma_j^{0}}\right).$$

Для довільного $N\ge 1$ існує номер $i_N\le N$ такий, що

$$\left|\gamma_{i_N}^{\varepsilon}-\gamma_{i_N}^{0}\right|\ge\left|\gamma_i^{\varepsilon}-\gamma_i^0\right|\quad \forall 1\le i\le N.$$

Тоді

$$\left|\gamma_{i_N}^{\varepsilon}-\gamma_{i_N}^{0}\right|\le\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left|\alpha_{ij}^{\varepsilon}-\alpha_{ij}^{0}\right|+\frac{1}{2\gamma}\left|\gamma_{i_N}^{\varepsilon}-\gamma_{i_N}^{0}\right|\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}^{\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left|\alpha_{ij}^{\varepsilon}-\alpha_{ij}^{0}\right|+\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(\alpha_{ij}^{\varepsilon}+\alpha_{ij}^{0}\right).$$

Справедливі такі оцінки:

$$\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}^{\varepsilon}\le\frac{\|g\|^2}{2\gamma(\lambda_1^{\varepsilon})^4}\le\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=N+1}^{\infty}(\alpha_{ij}^{\varepsilon}+\alpha_{ij}^{0})\le\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{\varepsilon})^4}+\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{0})^4}\right).$$

Тоді

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left|\gamma_{iN}^{\varepsilon}-\gamma_{i_N}^{0}\right| \le \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{N}\left|\alpha_{ij}^{\varepsilon}-\alpha_{ij}^{0}\right| + \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{\varepsilon})^4}+\frac{\|g\|^2}{(\lambda_{N+1}^{0})^4}\right).$$

Оскільки $\forall i \ge 1$ $\alpha_{ij}^{\varepsilon} \to \alpha_{ij}^{0}$ при $\varepsilon \to 0$, $\|g\|^2 \le (\lambda_1^0)^4\gamma$, то

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\gamma_i^{\varepsilon}-\gamma_i^{0}\right| \le 0 \Leftrightarrow \gamma_i^{\varepsilon} \to \gamma_i^{0} \quad \forall i \ge 1.$$

Звідси

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^{0}X_i^{0})\right\| \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i^{\varepsilon}X_i^{\varepsilon}-\beta_i^{0}X_i^{0})\right\| + \frac{(\lambda_1^0)^4}{2\gamma(\lambda_{N+1}^{0})^4},$$

і переходячи до границі при $N \to \infty$, маємо шукане.

Враховуючи оцінку (31), можемо перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ в задачі (1)–(3) з керуванням w^{ε}, і в силу єдиності розв'язку (32)–(34) отримати $z^0 \equiv y^0$. Отже, всі розглянуті збіжності мають місце по всій підпослідовності. Тоді маємо $\forall \eta > 0$ $\exists \varepsilon_1 > 0,$ $N \ge 1$ такі, що $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ $\forall n \ge N$ $\forall t \in [t_0, t_3]$,

$$\left|u_n[y_n^{\varepsilon}(t)] - u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}(t)]\right| \le \frac{\eta}{2},$$

$$\left|\int_{t_0}^{t_3}\left(\left\|y_n^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \gamma(u_n[y_n^{\varepsilon}(t)])^2\right)dt - \int_{t_0}^{t_3}\left(\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \gamma(u^{\varepsilon}[y^{\varepsilon}(t)])^2\right)dt\right| \le \frac{\eta}{2}.$$

Ці нерівності разом із нерівностями (25), (26) і доводять теорему.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Капустян О.А.* Усереднений синтез параметричного оптимального керування швидкоосцилюючим тепловим процесом з обмеженим відокремленим керуванням // Вісник Київського ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки. — 2000. — Вип.1. — С. 247–253.
2. *Белозеров В.Е., Капустян В.Е.* Геометрические методы модального управления. — Киев: Наук. думка, 1999. — 259 с.
3. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993. — 463 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с.
5. *Капустян В.Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58–67.
6. *Бублик Б.Н., Невидомский А.И.* Синтез оптимального сосредоточенного управления для уравнения теплопроводности // В кн.: Модели и системы обработки информации. — Киев: Выща шк., 1982. — Вып.1. — С. 78–87.