УДК 519.6

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ В ВИДЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

Рассмотрены новые задачи оптимального управления распределенными системами, которые описываются краевыми задачами для эллиптического уравнения с условиями сопряжения вида уравнения теплопроводности и квадратичной функцией стоимости. Для всех описанных случаев доказаны теоремы существования единственных оптимальных управлений.

1. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЕМ ПО ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f(x), \qquad (1)$$

где $k_{ij}\big|_{\overline{\Omega}_l} = k_{ji}(x)\big|_{\overline{\Omega}_l} \in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l)$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha_0 \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2, \quad \forall \xi_i, \xi_j \in R^1, \ \forall x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \qquad (1')$$

$$f\big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l), \ \ l = 1,2; \ \ |f| < \infty, \ \ \alpha_0 = \mathrm{const} > 0.$$

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ $(\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \ne \varnothing$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \gamma$, $x_3 = 0)$ задано однородное краевое условие Дирихле

$$y = 0. \qquad (2)$$

На разрезе γ области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 (\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing)$ условия сопряжения, следуя [1, 2], запишем в виде

$$[y] = 0, \qquad (3)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=\left[\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right], \tag{4}$$

где $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}(x)\in C(\bar{\gamma})\cap C^1(\gamma)$;

$$\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_{ij}\xi_i\xi_j\ge\lambda_0\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad \forall\xi_i\in R^1,\ i=1,2,\quad \lambda_0>0,\ \forall x\in\gamma; \tag{4′}$$

$[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^+=\{\varphi\}^+=\varphi(x)$ при $x\in\gamma^+$, $\varphi^-=\{\varphi\}^-=\varphi(x)$ при $x\in\gamma^-$, $\gamma^+=\partial\Omega_2\cap\gamma$, $\gamma^-=\partial\Omega_1\cap\gamma$; γ^+ — множество точек $\partial\Omega_2$, являющихся точками касания области $\overline{\Omega}_2$ с Ω_1; γ^- — множество точек $\partial\Omega_1$, являющихся точками касания области $\overline{\Omega}_1$ с Ω_2; k_{ij}, f, λ_{ls} — известные функции, $i,j=\overline{1,3}$, $l,s=1,2$; n — единичный вектор нормали к γ (нормаль к γ), направленный в область Ω_2.

Пусть заданы пространство управлений — гильбертово пространство U и отображение $B\in\mathrm{L}(\mathrm{U};V')$, где V' — пространство, двойственное к гильбертовому пространству V состояний. Примем $\mathrm{U}=L_2(\Omega)$.

Для каждого управления $u=\mathrm{U}$ состояние $y=y(u)=y(x,u)$ системы определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнением

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=f(x)+Bu,\quad y\in V,\quad x\in\Omega, \tag{5}$$

и условиями (2)–(4).

Зададим наблюдение

$$Z(u)=Cy(u),$$

где $C\in\mathrm{L}(V;\mathrm{H})$; H — некоторое гильбертово пространство. Примем

$$Cy(u)\equiv y(u),\ \mathrm{H}=V\subset L_2(\Omega).$$

Каждому управлению $u\in\mathrm{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u)=\left\|Cy(u)-z_g\right\|_{\mathrm{H}}^2+(\mathrm{N}u,u)_{\mathrm{U}}, \tag{6}$$

где z_g — известный элемент пространства H.

$$\mathrm{N}\in\mathrm{L}(\mathrm{U};\mathrm{U}),\ (\mathrm{N}u,u)_{\mathrm{U}}\ge\nu_0\|u\|_{\mathrm{U}}^2,\ \nu_0=\mathrm{const}>0,\ \forall u\in\mathrm{U}. \tag{6′}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $Bu \equiv u \in L_2(\Omega)$, $\mathrm{N}u = \bar{a}(x)u$, где $0 < a_0 \le \bar{a}(x) \le a_1 < < \infty$, $\bar{a}\big|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l)$, $l = 1, 2$; $a_0, a_1 = \text{const}$, $(\varphi,\psi)_{\mathrm{U}} = (\varphi,\psi) = \iiint\limits_{\Omega} \varphi\psi\, dx$.

Обозначим $M = \{v(x) : v\big|_{\overline{\Omega}_l} \in C^1(\overline{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l),\quad l = 1,2;\ [v] = [v]\big|_{\gamma} = 0$, $v\big|_{\gamma} \in C^2(\gamma)$, $v\big|_{\Gamma} = 0\}$. Множество M плотно в $L_2(\Omega)$, поскольку содержит функции v такие, что $v\big|_{\Omega_l} \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega_l)$, $l = 1, 2$. Введем на M скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норму $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{2} \iiint\limits_{\Omega_i} \left(vw + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial w}{\partial x_l} \right) d\Omega_i + \iint\limits_{\gamma} \left(vw + \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial w}{\partial x_l} \right) d\gamma ,$$

$$\langle\langle v\rangle\rangle = \langle v, v\rangle^{1/2} .$$

Пополним M по норме $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ и образованное пространство обозначим V с нормой $\|\cdot\|_V = \langle\langle\cdot\rangle\rangle$, $\|v\|_V = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|v\|^2_{W_2^1(\Omega_i)} + \|v\|^2_{W_2^1(\gamma)} \right\}^{1/2}$, где $W_2^1(\Omega_i)$ и $W_2^1(\gamma)$ — пространства функций Соболева, определенных на областях Ω_i и γ.

Определение 1. Для каждого управления $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением краевой задачи (2)–(5) называется функция $y = y(u) \in V$, минимизирующая на V функционал энергии

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(u; v) \tag{7}$$

или являющаяся в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y \in V$, который $\forall\, w \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \tag{8}$$

где

$$a(y, w) = \iiint\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega + \iint\limits_{\gamma} \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i} d\gamma , \tag{8$'$}$$

$$l(u; w) = (f, w) + (u, w) .$$

Лемма 1. Для каждого фиксированного $u \in \mathrm{U}$ задачи (7), (8) эквивалентны. Их решение $y = y(u)$ существует и единственно в V.

Доказательство. С учетом неравенства Фридрихса $\forall\, v \in V$ получаем

$$a(v, v) \ge \bar{\alpha}_0 \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \bar{\lambda}_0 \|v\|^2_{W_2^1(\gamma)} \ge \alpha_0^1 \|v\|^2_V ,$$

т.е. билинейная форма $a(\cdot,\cdot): V\times V \to R^1$ V-эллиптична на V, где $\alpha_0^1 = \min\{\overline{\alpha}_0, \overline{\lambda}_0\} > 0$.

С учетом неравенства Коши-Буняковского $\forall\ y, w \in V$ имеем

$$\left|a(y,w)\right| \le \overline{\alpha}_0^1 \|y\|_{W_2^1(\Omega)} \|w\|_{W_2^1(\Omega)} + \overline{\lambda}_0^1 \|y\|_{W_2^1(\gamma)} \|w\|_{W_2^1(\gamma)} \le 2\max\{\overline{\alpha}_0^1, \overline{\lambda}_0^1\} \|y\|_V \|w\|_V,$$

$$\left|l(u;w)\right| \le \left|(f,w)\right| + \left|(u,w)\right| \le c_1 \|w\|_V.$$

Следовательно, в силу леммы Лакса-Мильграма [3] задача (8) для каждого фиксированного элемента $u \in \mathrm{U}$ имеет единственное решение $y = y(u) \in V$. Следуя [2], легко показать, что решение $y = y(u)$ задачи (8) является единственным решением задачи (7). Лемма доказана.

С учетом высказанных предположений функционал стоимости (6) имеет вид

$$J(u) = \left\| y(u) - z_g \right\|^2 + (\overline{a}u, u) \tag{9}$$

и может быть представлен следующим образом:

$$J(u) = \pi(u,u) - 2L(u) + \left\| z_g - y(0) \right\|^2, \tag{10}$$

где

$$\pi(u,v) = (y(u) - y(0),\ y(v) - y(0)) + (\overline{a}u, u); \tag{11}$$

$$L(v) = (z_g - y(0),\ y(v) - y(0)).$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из V задачи (8) при $f = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u', u''. Тогда

$$\left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|^2 \le \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_V^2 \le \frac{1}{\overline{\alpha}_0^1} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \le \frac{1}{\overline{\alpha}_0^1} \|u' - u''\| \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_V. \tag{11'}$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ на U. На основании [4, теорема 1.1, гл.1] с учетом ($6'$) доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия ($1'$), ($4'$), ($6'$). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого

$$J(u) = \inf_{v \in \mathrm{U}_\partial} J(v), \tag{12}$$

т.е. существует единственное оптимальное управление $u \in \mathrm{U}_\partial$ рассматриваемой распределенной системы.

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$

$$\pi(u, v-u) - L(v-u) \ge 0, \ \ \forall v \in U_\partial \tag{13}$$

с учетом выражений (11) принимает вид

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + (\bar{a}u, v-u) \ge 0, \ \ \forall v \in U_\partial . \tag{14}$$

Для каждого управления $v \in U_\partial$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V$ определим как обобщенное решение краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = y(v) - z_g, \ x \in \Omega, \tag{15}$$

$$p = 0, \ x \in \Gamma, \tag{16}$$

$$[p] = 0, \ x \in \gamma, \tag{17}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right], \ \ x \in \gamma . \tag{18}$$

Лемма 2. Для каждого фиксированного управления $v \in U$ краевая задача (15)–(18) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in V^*$ как единственная функция, доставляющая на V минимум функционалу

$$\Phi_1(w) = a(w, w) - 2l_1(y; w), \tag{19}$$

и единственная функция из V, для каждого $w \in V$ удовлетворяющая тождеству

$$a(p, w) = l_1(y; w), \tag{20}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена первым выражением (8′), а

$$l_1(y; w) = (y - z_g, w).$$

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма аналогично доказательству леммы 1.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$ с учетом (8), из (20) имеем

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = a(p, y(v) - y(u)) = a(y(v), p) - a(y(u), p) = (v - u, p),$$

т.е.

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) = (v - u, p). \tag{21}$$

Используя (21), необходимое условие (14) оптимальности управления $u \in U_\partial$ преобразовывается к виду

$$(p + \bar{a}u, \ v - u) \ge 0, \ \ \forall v \in U_\partial . \tag{22}$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in U_\partial$ определяется тождествами (8), (20) и неравенством (22).

Если $U_\partial = U$ (случай отсутствия ограничений), то из (22) получаем

$$p + \bar{a} u = 0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{23}$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (23) можно исключить управление u из (8). Для определения вектора $(y, p) \in V \times V$ получаем задачу: найти вектор $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющий тождествам

$$a(y, w) = l(-p/\bar{a}; w), \ \forall w \in V, \tag{24}$$

$$a(p, w) = l_1(y; w), \ \forall w \in V, \tag{25}$$

где оптимальное управление $u \in U_\partial = U$ найдем с помощью формулы

$$u = -p/\bar{a}, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{26}$$

Если векторное решение (y, p) задачи (24), (25) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_l$, а именно: $y\big|_{\overline{\Omega}_l}, \, p\big|_{\overline{\Omega}_l} \in C^1(\overline{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l) \cap C^2(\gamma), \ \ l = 1, 2$, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V \times V$, удовлетворяющей системе уравнений (2)–(4), (15)–(18) и равенству

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + p/\bar{a} = f, \quad x \in \Omega. \tag{27}$$

Определение 2. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2)–(4), (15)–(18), (27) называется вектор-функция $U = (y, p) \in H = V \times V$, удовлетворяющая $\forall z = (z_1, z_2) \in H$ интегральному тождеству

$$\bar{a}(U, z) = \bar{l}(z), \tag{28}$$

где $U = (y, p)$,

$$\bar{a}(U, z) = \iiint\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + p z_1/\bar{a} + \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} - y z_2 \right\} dx +$$

$$+ \iint\limits_{\gamma} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right) d\gamma,$$

$$\bar{l}(z) = (f, z_1) - (z_g, z_2).$$

Лемма 3. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot,\cdot): H \times H \to R^1$ удовлетворяет условию H-эллиптичности

$$\overline{a}(z,z) \geq \alpha_1 \|z\|_H^2,\ \alpha_1 = \text{const} > 0\,. \tag{29}$$

Тогда задача (28) имеет единственное решение $U \in H$, где $\|z\|_H = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|z_i\|_V^2 \right\}^{1/2}$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Задачу (28) можно решить приближенно с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для этого разобъем каждую из областей $\overline{\Omega}_i$ на N_i конечных элементов $\overline{e}_i^j$ $(j = \overline{1, N_i},\ i = 1, 2)$ регулярного семейства [3]. Введем в рассмотрение подпространство $H_k^N \subset H$ $(N = N_1 + N_2)$ вектор-функций $V_k^N(x) = (v_{1k}^N(x), v_{2k}^N(x))$, компоненты которых непрерывны на $\overline{\Omega}_i$, $i = 1, 2$, являются полными полиномами степени k переменных x_1, x_2, x_3 на каждом $\overline{e}_i^j$ и удовлетворяют условиям $V_k^N\big|_\Gamma = 0,\ [V_k^N] = [V_k^N]\big|_\gamma = 0$. Тогда из (28) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$A\overline{U} = B, \tag{30}$$

решение $\overline{U}$ которой существует и единственно. Вектор $\overline{U}$ определяет единственное приближенное решение $U_k^N \in H_k^N$ задачи (28) как единственное решение тождества

$$\overline{a}(U_k^N, V_k^N) = \bar{l}(V_k^N),\ \ \forall V_k^N \in H_k^N\,. \tag{31}$$

Пусть $U = U(x) \in H$ — решение задачи (28). Тогда

$$\overline{a}(U - U_k^N, V_k^N) = 0,\ \ \forall V_k^N \in H_k^N\,. \tag{32}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 \left\| U - U_k^N \right\|_H^2 \leq \overline{a}(U - U_k^N, U - U_k^N) = \overline{a}(U - U_k^N, U - \tilde{U}),\ \ \forall \tilde{U} \in H_k^N,$$

откуда в силу непрерывности на H билинейной формы $\overline{a}(\cdot,\cdot)$ получаем

$$\left\| U - U_k^N \right\|_H \leq c_0 \left\| U - \tilde{U} \right\|_H,\ c_0 = \text{const} > 0\,. \tag{33}$$

Предположим, что $\tilde{U} \in H_k^N$ — полный интерполяционный полином решения $U = U(x) \in H$ на каждом $\overline{e}_i^j$. Тогда с учетом оценок интерполяции [3] из (33) в предположении, что каждая компонента U_1, U_2 решения U на Ω_l и на γ принадлежит соответственно пространствам Соболева $W_2^{k+1}(\Omega_l)$ и $W_2^{k+1}(\gamma)$, $l = 1, 2$, следует оценка

$$\left\| U - U_k^N \right\|_H \le ch^k, \tag{34}$$

где $c = \mathrm{const}$; h — максимальный диаметр всех конечных элементов $\bar{e}_i^j$. Учитывая (34), для приближения $u_k^N(x) = -p_k^N(x)/\bar{a}(x)$ оптимального управления $u = u(x)$ имеем оценку

$$\left\| u - u_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_2 \left\| p - p_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_3 h^k, \tag{35}$$

где $\|\cdot\|_{W_2^1} = \|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|\cdot\|^2_{W_2^1(\Omega_i)} \right\}^{1/2}$, $p_k^N = U_{2k}^N$, $U_k^N = (U_{1k}^N, U_{2k}^N)$.

2. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЕМ НА ТОНКОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Предположим, что состояние системы $y = y(u)$ для каждого управления $u \in \mathrm{U} = L_2(\Omega)$ определяется как обобщенное решение краевой задачи (2)–(5), где $Bu \equiv u$, т.е. как единственное решение в V эквивалентных задач (7), (8).

Зададим наблюдение

$$Cy(u) = y(x,u), \quad x \in \gamma. \tag{36}$$

Каждому управлению $u \in \mathrm{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \left\| y(u) - z_g \right\|^2_{L_2(\gamma)} + (\bar{a}u, u), \tag{37}$$

который представим в виде (10), где

$$\pi(u,v) = (y(u) - y(0),\ y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)} + (\bar{a}u, v),$$

$$L(v) = (z_g - y(0),\ y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)},$$

$$(\varphi,\psi)_{L_2(\gamma)} = \iint_\gamma \varphi\psi \, d\gamma, \quad \|\varphi\|_{L_2(\gamma)} = (\varphi,\psi)^{1/2}_{L_2(\gamma)}.$$

С учетом неравенств теоремы вложения [5] на основании (11′) имеем

$$c_0' \left\| \tilde{y}' - \tilde{y}'' \right\|^2_{L_2(\gamma)} \le \left\| \tilde{y}' - \tilde{y}'' \right\|^2_V \le \frac{1}{\bar{\alpha}_0^1} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \le \frac{1}{\bar{\alpha}_0^1} \left\| u' - u'' \right\| \left\| \tilde{y}' - \tilde{y}'' \right\|_V.$$

Следовательно,

$$\left\| \tilde{y}' - \tilde{y}'' \right\|_{L_2(\gamma)} \le \frac{1}{\bar{\alpha}_0^1 \sqrt{c_0'}} \left\| u' - u'' \right\|.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ на U . На основании [4, теорема 1.1, гл.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1′), (4′), (6′). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (37).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$ в этом случае приобретает вид

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} + (\overline{a}u, v - u) \geq 0, \ \forall v \in \mathrm{U}_\partial. \qquad (38)$$

Для каждого управления $v \in \mathrm{U}_\partial$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной ограничениями (16), (17) и уравнениями

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (39)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] + y(v) - z_g, \quad x \in \gamma. \qquad (40)$$

Лемма 4. Для каждого фиксированного управления $v \in \mathrm{U}$ краевая задача (16), (17), (39), (40) имеет единственное обобщенное решение $p(v) \in V^* = V$ как единственное решение эквивалентных задач вида (19), (20), где билинейная форма $a(\cdot,\cdot): V \times V \to R^1$ определена первым выражением (8′), а

$$l_1(y; w) = (y - z_g, w)_{L_2(\gamma)}. \qquad (40')$$

Справедливость леммы устанавливается на основании леммы Лакса-Мильграма аналогично доказательству леммы 1.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$, с учетом (8), из (20), где функционал $l_1(\cdot;\cdot)$ определен выражением (40′), имеем

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} = a(p, y(v) - y(u)) = (v - u, p),$$

т.е.

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} = (v - u, p), \ \forall v \in \mathrm{U}_\partial.$$

Используя полученное равенство, необходимое условие (38) оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$ приобретает вид

$$(p + \overline{a}u, v - u) \geq 0, \ \forall\, v \in \mathrm{U}_\partial. \qquad (41)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathrm{U}_\partial$ определяется тождествами (8), (20) и неравенством (41), где функционалы $l(\cdot;\cdot)$, $l_1(\cdot;\cdot)$ заданы соответственно вторым выражением (8′), (40′).

Если $\mathrm{U}_\partial = \mathrm{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (41) получаем (23). Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (26) можно исключить управление u из (8). Для определения вектора $(y,p)\in V\times V$ получаем задачу вида (24), (25), где функционалы $l(\cdot;\cdot)$, $l_1(\cdot;\cdot)$, как было отмечено, определяются с помощью второго выражения (8′) и (40′), соответственно. Оптимальное управление $u\in U_\partial = U$ найдем посредством (26). Если векторное решение (y,p) задачи вида (24), (25) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_l$, а именно: $y|_{\overline{\Omega}_l}, p|_{\overline{\Omega}_l} \in C^1(\overline{\Omega}_l)\cap C^2(\Omega_l)\cap C^2(\gamma)$, $l=1,2$, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y,p)\in$ $\in V\times V$, удовлетворяющей системе равенств (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40).

Определение 3. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40) называется вектор-функция $U=(y,p)\in$ $\in H=V\times V$, удовлетворяющая $\forall z=(z_1,z_2)\in H$ интегральному тождеству вида (28), где

$$\overline{a}(U,z)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\overline{a}\right\}dx+$$

$$+\iint\limits_{\gamma}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)-yz_2\right\}d\gamma\,,$$

$$\overline{l}(z)=(f,z_1)-(z_g,z_2)_{L_2(\gamma)}\,.$$

Лемма 5. Пусть билинейная форма $\overline{a}(\cdot,\cdot): H\times H\to R^1$ — H-эллиптична, т.е. удовлетворяет условию вида (29). Тогда краевая задача (2)−(4), (16), (17), (27), (39), (40) имеет единственное обобщенное решение $U\in H$, удовлетворяющее тождеству вида (28).

Справедливость леммы устанавливается аналогично доказательству леммы 3.

Как и в предыдущем случае, задачу (28) можно решить приближенно с помощью метода конечных элементов.

Для приближенного обобщенного решения $U_k^N\in H_k^N$ краевой задачи (2)–(4), (16), (17), (27), (39), (40) и приближенного оптимального управления $u_k^N=-p_k^N/\overline{a}$ имеют место оценки вида (34), (35).

3. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СО СМЕШАННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ И НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях Ω_1, $\Omega_2\in R^3$ для каждого управления $u\in U=L_2(\Omega)$ определено эллиптическое уравнение (5), где $Bu\equiv u$, а коэффициенты k_{ij} и функция f удовлетворяют условиям (1′). На участке $\gamma=(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)\neq\varnothing$,

($\gamma=\{x=(x_1,x_2,x_3): x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2,\ x_3=0\}$) раздела областей Ω_1, Ω_2 условия сопряжения имеют вид (3), (4), где коэффициенты λ_{ij} удовлетворяют условиям (4′).

На границе $\Gamma=(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)\setminus\gamma$ задано неоднородное условие Дирихле

$$y=\varphi\,, \tag{42}$$

где φ — известная функция такая, что множество $V=\Big\{v(x): v\big|_{\Omega_l}\in W_2^1(\Omega_l)$, $l=1,2;\ [v]\big|_\gamma=[v]=0,\ v\big|_\gamma\in W_2^1(\gamma), [v]\big|_\Gamma=\varphi\Big\}$ не пусто.

Обозначим $V_0=\Big\{v(x): v\big|_{\Omega_l}\in W_2^1(\Omega_l),\ l=1,\ 2;\ [v]\big|_\gamma=[v]=0,\ \ v\big|_\gamma\in$ $\in W_2^1(\gamma)\,,\ v\big|_\Gamma=0\Big\}$.

Определение 4. Для каждого $u\in U$ обобщенным решением краевой задачи (3)–(5), (42) называется функция $y=y(u)\in V$, минимизирующая на V функционал

$$\Phi(v)=a(v,v)-2l(u;v) \tag{43}$$

или являющаяся в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y=y(u)\in V$, который $\forall\ w\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,w)=l(u;w)\,, \tag{44}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot): V\times V\to R^1$ и функционал $l(\cdot;\cdot): L_2(\Omega)\times V\to R^1$ определены соответственно первым и вторым выражениями (8′).

Теорема 3. Для каждого управления $u\in U$ задачи (43), (44) эквивалентны и имеют единственное решение $y=y(u)$ в непустом множестве V.

Доказательство. Пусть $y\in V$ — решение задачи (44), а $\psi(x)$ — произвольная фиксированная функция из V, тогда $z=y-\psi$ — единственное решение задачи: найти $z\in V_0$, которое $\forall\, w\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(z,w)=l_0(u;w)\,, \tag{45}$$

где $l_0(u;w)=l(u;w)+a(\psi,w)$.

Существование единственного решения $z\in V_0$ задачи (45) устанавливаем на основе леммы Лакса-Мильграма. Легко видеть, что $y=z+\psi$ решение задачи (44). От противного, на основе условия V-эллиптичности билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ на V_0 устанавливаем единственность решения $y\in V$ задачи (44). Покажем, что функция $y=y(u)$ минимизирует функционал (43) на V.

Пусть ψ — произвольный элемент из V. Тогда

$$a(y,y-\psi)=l(u;y-\psi)\,. \tag{46}$$

Используя (46), имеем

$$\Phi(\psi) = a(\psi,\psi) - 2l(u;\psi) + 2\{a(y, y-\psi) - l(u; y-\psi)\} =$$

$$= a(\psi,\psi) - 2a(y,\psi) + a(y,y) + a(y,y) - 2l(u;y) = a(y-\psi, y-\psi) + \Phi(y) \geq \Phi(y) .$$

В силу V-эллиптичности билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ на V_0 знак равенства в полученном выражении достигается на единственном элементе $\psi = y$. Лемма доказана.

Каждому управлению $u \in \mathrm{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \left\| y(u) - z_{g_1} \right\|^2 + \left\| y(u) - z_{g_2} \right\|^2_{L_2(\gamma)} + (\bar{a}u, u), \tag{47}$$

где функция $\bar{a} = \bar{a}(x)$ определена в п.1.

Следуя [6], обозначим $\bar{y}(u) = (y(u),\ y(u)) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$, $\bar{z}_g = (z_{g_1}, z_{g_2}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$. Тогда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2L(u) + \left\| \bar{z}_g - \bar{y}(0) \right\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)}, \tag{48}$$

где

$$\pi(u,v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(0),\ \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\bar{a}u, v),$$

$$L(v) = (\bar{z}_g - \bar{y}(0),\ \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{L_2(\Omega\times\gamma)},$$

$$(\bar{\varphi},\bar{\psi})_{L_2(\Omega\times\gamma)} = (\varphi_1,\psi_1) + (\varphi_2,\psi_2)_{L_2(\gamma)}, \quad \|\bar{\varphi}\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)} = (\varphi_1,\varphi_1) + (\varphi_2,\varphi_2)_{L_2(\gamma)},$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in L_2(\Omega)\times L_2(\gamma), \quad \bar{\psi} = (\psi_1,\psi_2) \in L_2(\Omega)\times L_2(\gamma),$$

$$\pi(u,u) \geq a_0 \|u\|^2 .$$

Следовательно,

$$J(u) = \left\| \bar{y}(u) - \bar{z}_g \right\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\bar{a}u, u). \tag{49}$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u'), \tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из V-эквивалентных задач (43), (44) при $f = 0$, $\varphi = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u', u''.

С учетом теорем вложения [5] имеем

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2 + \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2_{L_2(\gamma)} \leq c_0 \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|^2_V \leq \frac{1}{\alpha_1} a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_1} \|u' - u''\| \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V, \ \alpha_1 = \mathrm{const} > 0,$$

т.е.

$$\left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)} \le c_1 \left\|u' - u''\right\|.$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на U билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$ представления (48) функционала стоимости (47). На основании [4, гл.1, теорема 1.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1′), (4′), (6′). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (47).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$ в этом случае приобретает вид

$$(\bar{y}(u) - \bar{z}_g,\ \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\bar{a}u, v-u) \ge 0,\ \forall\, v \in \mathrm{U}_\partial. \tag{50}$$

Для каждого управления $v \in \mathrm{U}$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = y(v) - z_{g_1}, \quad x \in \Omega,$$

$$p = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{51}$$

$$[p] = 0, \quad x \in \gamma,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n, x_i)\right] + y(v) - z_{g_2}, \quad x \in \gamma.$$

Лемма 6. Краевая задача (51) имеет единственное обобщенное решение $p = p(v) \in V_0$ как решение эквивалентных задач вида (19), (20), где билинейная форма $a(\cdot,\cdot): V_0 \times V_0 \to R^1$ определена первым выражением (8′), а

$$l_1(y; w) = (y(v) - z_{g_1}, w) + (y(v) - z_{g_2}, w)_{L_2(\gamma)}. \tag{52}$$

Справедливость леммы устанавливается на основании леммы Лакса-Мильграма.

Выбираем вместо w разность $y(v) - y(u)$. С учетом (44) из (20), где функционал $l_1(\cdot;\cdot)$ определен выражением (52), имеем

$$(y(u) - z_{g_1}, y(v) - y(u)) + (y(u) - z_{g_2}, y(v) - y(u))_{L_2(\gamma)} = a(p, y(v) - y(u)) =$$

$$= a(y(v) - y(u), p) = a(y(v), p) - a(y(u), p) = (v - u, p),$$

т.е.

$$(\bar{y}(u) - \bar{z}_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} = (v - u, p).$$

Следовательно, необходимое условие оптимальности управления $u \in U_\partial$

$$(\bar{y}(u)-\bar{z}_g,\bar{y}(v)-\bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)}+(\bar{a}u,v-u)\ge 0,\ \forall v\in U_\partial$$

принимает вид

$$(p+\bar{a}u,v-u)\ge 0,\ \forall v\in U_\partial. \qquad (53)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in U_\partial$ определяется тождествами (44), (20), где функционал $l_1(\cdot;\cdot)$ определен выражением (52) и неравенством (53).

Если $U_\partial = U$ (случай отсутствия ограничений), то из (53) получаем равенство вида (23). Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (23) можно исключить управление u из (44). Для определения вектора $(y,p)\in V\times V$ получаем задачу: найти вектор $(y,p)\in V\times V$, удовлетворяющий тождествам вида (24), (25), где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ и линейный функционал $l(\cdot;\cdot)$ определены соответствующими выражениями (8′), а $l_1(\cdot;\cdot)$ имеет вид (52). Оптимальное управление u находим с помощью формулы (26). Если векторное решение (y,p) — достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_l$, $l=1,2$, а именно: удовлетворяет условиям гладкости п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y,p)\in V\times V,$ удовлетворяющей равенствам (3), (4), (27), (42), (51).

Определение 5. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (3), (4), (27), (42), (51) называется вектор-функция $U=(y,p)\in V\times V_0$, которая $\forall z\in V_0\times V_0$ удовлетворяет тождеству вида (28), где

$$\bar{a}(U,z)=\iiint_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\bar{a}-yz_2\right\}dx+$$

$$+\iint_{\gamma}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)-yz_2\right\}d\gamma,$$

$$\bar{l}(z)=(f,z_1)-(z_{g_1},z_2)-(z_{g_2},z_2)_{L_2(\gamma)}.$$

Лемма 7. Пусть билинейная форма $\bar{a}(\cdot,\cdot)$ — H-эллиптична на $H_0\in V_0\times V_0$, т.е.

$$\bar{a}(z,z)\ge\alpha_1\|z\|_H^2,\quad \forall z\in V_0\times V_0. \qquad (54)$$

Тогда краевая задача (3), (4), (27), (42), (51) имеет единственное обобщенное решение $U\in H=V\times V_0$, удовлетворяющее тождеству

$$\bar{a}(U,z)=\bar{l}(z),\quad \forall z\in H_0. \qquad (55)$$

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу (55), аналогичную (28), можно решить приближенно с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N = H_k^N \subset H$ краевой задачи (3), (4), (27), (42), (51) и приближенного оптимального управления $u_k^N = -p_k^N / \overline{a}$ соответственно имеют место оценки вида (34), (35).

4. ОДНОВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ для каждого управления $u \in \mathrm{U} = L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$ $(u = (u_1, u_2) \in$ $\in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma))$ определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = f(x) + u_1, \tag{56}$$

где коэффициенты k_{ij} и функция f удовлетворяют условиям п.1. На границе Г задано неоднородное условие Дирихле

$$y = \varphi, \tag{57}$$

где φ — известная функция такая, что множество V, определенное в п.3, непустое.

На участке γ условия сопряжения имеют вид

$$[y] = 0, \tag{58}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i)\right] + u_2. \tag{59}$$

Определение 6. Для каждого управления $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением краевой задачи (56)–(59) называется функция $y = y(u) \in V$, минимизирующая на V функционал энергии

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(u; v) \tag{60}$$

или являющаяся решением в V задачи в слабой постановке: найти элемент $y = y(u) \in V$, который $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \tag{61}$$

где пространство V_0 определено в п.3, билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ — первым выражением (8′), а функционал $l(u; w)$ имеет вид

$$l(u;w)=(f,w)+(u_1,w)+(u_2,w)_{L_2(\gamma)}\,. \qquad (62)$$

Теорема 5. Для каждого управления $u\in\mathrm{U}$ задачи (60), (61) эквивалентны и имеют единственное решение $y=y(u)$ в непустом множестве V.

Справедливость теоремы устанавливается аналогично доказательству теоремы 3.

Каждому управлению $u\in\mathrm{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u)=\left\|y(u)-z_g\right\|^2+(\bar{a}u,u)_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,, \qquad (63)$$

где функция $\bar{a}\in C(\overline{\Omega})$, $0<a_0\le\bar{a}\le a_1<\infty$, $a_0,a_1=\mathrm{const}$; z_g — известная функция из $L_2(\Omega)$; $(\bar{a}u,u)_{L_2(\Omega\times\gamma)}=(\bar{a}u_1,u_1)+(\bar{a}u_2,u_2)_{L_2(\gamma)}$.

Функционал стоимости можно представить в виде

$$J(u)=\pi(u,u)-2L(u)+\left\|z_g-y(0)\right\|^2, \qquad (64)$$

где

$$\pi(u,v)=(y(u)-y(0),\,y(v)-y(0))+(\bar{a}u,v)_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,,$$

$$L(v)=(z_g-y(0),\,y(v)-y(0))\,.$$

Пусть $\tilde{y}'=\tilde{y}(u'),\tilde{y}''=\tilde{y}(u'')$ — решения из V-эквивалентных задач (60), (61) при $f=0,\varphi=0$ и функции $u=u(x)$, равной соответственно $u',\ u''$. С учетом неравенств Коши-Буняковского, теорем вложения имеем

$$\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|^2\le\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|_V^2\le c_0a(\tilde{y}'-\tilde{y}'',\tilde{y}'-\tilde{y}'')=c_0((u_1'-u_1'',\tilde{y}'-\tilde{y}'')+$$

$$+(u_2'-u_2'',\tilde{y}'-\tilde{y}'')_{L_2(\gamma)})\le c_0(\left\|u_1'-u_1''\right\|\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|+\left\|u_2'-u_2''\right\|_{L_2(\gamma)}\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|_{L_2(\gamma)})\le$$

$$\le c_0'(\left\|u_1'-u_1''\right\|+\left\|u_2'-u_2''\right\|_{L_2(\gamma)})\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|_V\le 2c_0''\left\|u'-u''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)}\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|_V,$$

т.е.

$$\left\|\tilde{y}'-\tilde{y}''\right\|\le c_1\left\|u'-u''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)}, \qquad (65)$$

где $\left\|\varphi\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)}=(\varphi,\varphi)_{L_2(\Omega\times\gamma)}^{1/2}$.

Неравенство (65) обеспечивает непрерывность на U билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$.

С учетом предположений относительно функции $\bar{a}$, получаем

$$\pi(u,u)\ge a_0\left\|u\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)}^2. \qquad (66)$$

На основании [4, гл.1, теорема1.1] доказано утверждение.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1′), (4′), (66). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (63).

Необходимое условие оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$ в этом случае приобретает вид

$$(y(u)-z_g\,,\,y(v)-y(u))+(\bar{a}u,v-u)_{L_2(\Omega\times\gamma)}\geq 0\,,\ \ \forall\, v\in \mathrm{U}_\partial\,. \qquad (66')$$

Для каждого управления $u \in \mathrm{U}$ сопряженное состояние $p(v) \in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)=y(v)-z_g,\quad x\in\Omega\,,$$

$$p=0,\quad x\in\Gamma\,, \qquad (67)$$

$$[p]=0,\quad x\in\gamma\,,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)=\left[\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right],\quad x\in\gamma\,.$$

В силу леммы 2 краевая задача (67) имеет единственное обобщенное решение $p \in V_0$.

Выбирая вместо w разность $y(v)-y(u)$, с учетом (61) из (20) имеем

$$(y(u)-z_g,y(v)-y(u))=a(p,y(v)-y(u))=a(y(v),p)-a(y(u),p)=$$

$$=(v_1-u_1,p)+(v_2-u_2,p)_{L_2(\gamma)}=(v-u,\bar{p})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,,$$

т.е.

$$(y(u)-z_g,y(v)-y(u))=(v-u,\bar{p})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,, \qquad (68)$$

где $\bar{p}=(p_1,p_2)$, $p_1=p$ при $x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$, $p_2=p$ при $x\in\gamma$.

С учетом (68) необходимое условие (66′) оптимальности управления $u \in \mathrm{U}_\partial$ преобразовывается к виду

$$(\bar{p}+\bar{a}u,v-u)_{L_2(\Omega\times\gamma)}\geq 0,\ \ \forall v\in \mathrm{U}_\partial\,. \qquad (69)$$

Таким образом, оптимальное управление $u \in \mathrm{U}_\partial$ определяется тождествами (61), (20) и неравенством (69).

Если $\mathrm{U}_\partial = \mathrm{U}$ (случай отсутствия ограничений), то из (69) получаем

$$p+\bar{a}u_1=0\,,\ \ x\in\overline{\Omega}\,, \qquad (70)$$

$$p+\bar{a}u_2=0,\quad x\in\gamma\,.$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (70) можно исключить управление u из (61). Для определения вектора $(y,p)\in V\times V_0$ получаем задачу: найти вектор-функцию $(y,p)\in V\times V_0$, удовлетворяющую $\forall\, w\in V_0$ тождествам

$$a(y,w)=(f,w)-(p/\overline{a},w)-(p/\overline{a},w)_{L_2(\gamma)}\,, \qquad (71)$$

$$a(p,w)=(y-z_g,\,w)\,, \qquad (72)$$

где оптимальное управление $u=(u_1,u_2)$ находим с помощью выражений

$$u_1=-p/\overline{a}\,,\quad x\in\overline{\Omega}\,,$$

$$u_2=u_1,\quad x\in\gamma\,. \qquad (73)$$

Если векторное решение (y,p) задачи (71), (72) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_l$, $l=1,2,$ а именно: удовлетворяет условиям п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y,p)\in V\times V_0$, удовлетворяющей системе уравнений (15)–(18), (57), (58) и равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)+p/\overline{a}=f,\quad x\in\Omega\,, \qquad (74)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=\left[\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right]-p/\overline{a}\,,\quad x\in\gamma\,. \qquad (75)$$

Определение 7. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (15)–(18), (57), (58), (74), (75) называется вектор-функция $U=(y,p)\in$ $\in H=V\times V_0$, удовлетворяющая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in H_0=V_0\times V_0$ интегральному тождеству вида (55), где

$$\overline{a}(U,z)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\overline{a}-yz_2\right\}dx+$$

$$+\iint\limits_{\gamma}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\overline{a}\right\}d\gamma\,, \qquad (76)$$

$$\bar{l}(z)=(f,z_1)-(z_g,z_2)\,.$$

Лемма 8. Пусть билинейная форма $\overline{a}(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию H-эллиптичности на H_0, т.е. неравенству вида (54). Тогда задача вида (55), где билинейная форма $\overline{a}(\cdot,\cdot)$ и линейный функционал $\bar{l}(\cdot)$ определяются соответствующими выражениями (76), имеет единственное решение $U=(y,p)\in H=V\times V_0$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу вида (55) можно решить приближенно с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N = H_k^N \subset H$ краевой задачи (15)– (18), (57), (58), (74), (75) и приближенного оптимального управления $u_k^N = (u_{k_1}^N, u_{k_2}^N) = (-p_k^N / \overline{a}, -p_k^N / \overline{a})$ имеет место оценка соответственно вида (34) и

$$\left\| u - u_k^N \right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)} \le ch^k. \tag{77}$$

5. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ НА РАЗРЕЗЕ γ С НАБЛЮДЕНИЯМИ НА РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТЯХ ТЕЛА

Предположим, что для каждого управления $u \in \mathrm{U} = L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$ $(u = (u_1, u_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma))$ состояние системы $y = y(u)$ определяется как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнениями (56)–(59).

Каждому управлению $u \in \mathrm{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = \left\| y(u) - z_{g_1} \right\|^2 + \left\| y(u) - z_{g_2} \right\|^2_{L_2(\gamma)} + (\overline{a} u, u)_{L_2(\Omega\times\gamma)}, \tag{78}$$

где $z_g = (z_{g_1}, z_{g_2}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$; $\overline{a} = \overline{a}(x)$ — известная функция; $\overline{a}$ определена в п.4.

Функционал стоимости можно представить в виде

$$J(u) = \pi(u,u) - 2L(u) + \left\| z_g - \overline{y}(0) \right\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)},$$

где $\overline{y} = (y, y) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma)$,

$$\pi(u,v) = (\overline{y}(u) - \overline{y}(0), \overline{y}(v) - \overline{y}(0))_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\overline{a} u, v)_{L_2(\Omega\times\gamma)},$$

$$L(v) = (z_g - \overline{y}(0), \overline{y}(v) - \overline{y}(0))_{L_2(\Omega\times\gamma)},$$

$$(\overline{\varphi}, \overline{\psi})_{L_2(\Omega\times\gamma)} = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2)_{L_2(\gamma)}, \quad \overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma),$$

$$\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\gamma),$$

$$\pi(u,v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) + (y(u) - y(0), y(v) - y(0))_{L_2(\gamma)} +$$

$$+ (\overline{a} u_1, v_1) + (\overline{a} u_2, v_2)_{L_2(\gamma)}.$$

Справедливо неравенство

$$\pi(u,u) \ge a_0 \|u\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)}, \quad \forall u \in \mathrm{U}. \tag{79}$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u'), \tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ — решения из V-эквивалентных задач (60), (61) при $f=0, \varphi=0$ и функции $u=u(x)$, равной соответственно u', u''. С учетом неравенств Коши-Буняковского, теорем вложения имеем

$$\left\|\overline{\tilde{y}}' - \overline{\tilde{y}}''\right\|^2_{L_2(\Omega\times\gamma)} = \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|^2 + \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|^2_{L_2(\gamma)} \le c_0 \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|^2_V \le$$

$$\le c_0' a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \le c_1' \left\|u' - u''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)} \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_V,$$

т.е.

$$\left\|\overline{\tilde{y}}' - \overline{\tilde{y}}''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)} \le c_2 \left\|u' - u''\right\|_{L_2(\Omega\times\gamma)}, \tag{79'}$$

где $\overline{\tilde{y}}' = (\tilde{y}', \tilde{y}') \in L_2(\Omega)\times L_2(\gamma)$, $\overline{\tilde{y}}' = (y_1, y_2)$, $y_1 = \tilde{y}'$ при $x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $y_2 = \tilde{y}'$ при $x\in\gamma$. Аналогично определяем $\overline{\tilde{y}}''$.

Неравенство (79′) обеспечивает непрерывность на U билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$.

На основании [4, гл.1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (1′), (4′), (79). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в U множества U_∂, для которого имеет место выражение (12) с функционалом стоимости (78).

Необходимое условие оптимальности управления $u\in\mathrm{U}_\partial$ в этом случае представимо в виде

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\bar{a}u, v-u)_{L_2(\Omega\times\gamma)} \ge 0, \ \forall v \in \mathrm{U}. \tag{80}$$

Для каждого управления $v\in\mathrm{U}$ сопряженное состояние $p(v)\in V^* = V_0$ определим как обобщенное решение краевой задачи, заданной равенствами

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = y(v) - z_{g_1}, \quad x\in\Omega,$$

$$p=0, \quad x\in\Gamma, \tag{81}$$

$$[p]=0, \quad x\in\gamma,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right] + y(v) - z_{g_2}, \quad x\in\gamma.$$

Определение 8. Обобщенным решением краевой задачи (81) называется функция $p = p(v)\in V_0$, доставляющая на V_0 минимум функционалу

$$\Phi_1(w) = a(w,w) - 2l_1(y,w) \tag{82}$$

или являющаяся решением в V_0 задачи в слабой постановке: найти элемент $p = p(v)\in V_0$, который $\forall\ w\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(p,w) = l_1(y,w), \tag{83}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена первым выражением (8′), а функционал

$$l_1(y,w) = (y - z_{g_1}, w) + (y - z_{g_2}, w)_{L_2(\gamma)}\,. \tag{84}$$

Лемма 9. При каждом фиксированном $y \in V$ задачи (83), (84) эквивалентны. Их решение p существует и единственно в V_0.

Выбирая вместо w разность $y(v) - y(u)$, с учетом (61) из (83) имеем

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} = a(p, y(v) - y(u)) = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,,$$

т.е.

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} = (v - u, \bar{p})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,. \tag{85}$$

Необходимое условие оптимальности управления $u \in U_\partial$

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{L_2(\Omega\times\gamma)} + (\bar{a}\,p, v - u)_{L_2(\Omega\times\gamma)} \ge 0\,,\quad \forall v \in U_\partial$$

с учетом (85) приобретает вид

$$(\bar{p} + \bar{a}u, v - u)_{L_2(\Omega\times\gamma)} \ge 0\,,\ \forall v \in U_\partial\,, \tag{86}$$

где $\bar{p} = (p, p) \in L_2(\Omega)\times L_2(\gamma)$.

Таким образом, оптимальное управление $u \in U_\partial$ определяется тождествами (61), (83) и неравенством (86).

Если $U_\partial = U$ (случай отсутствия ограничений), то из (86) получаем

$$\bar{p} + \bar{a}u = 0 \tag{87}$$

или

$$p + \bar{a}u_1 = 0,\ \ x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\,,$$

$$p + \bar{a}u_2 = 0\ \ x \in \gamma\,.$$

Следовательно, при отсутствии ограничений посредством (87) можно исключить управление u из (61). Для определения вектора $(y, p) \in V\times V_0$ получаем задачу: найти вектор-функцию $(y, p) \in V\times V_0$, удовлетворяющую $\forall w \in V_0$ тождествам

$$a(y,w) = (f, w) - (\bar{p}/\bar{a}, \bar{w})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,, \tag{88}$$

$$a(p, w) = (\bar{y} - z_g, \bar{w})_{L_2(\Omega\times\gamma)}\,, \tag{89}$$

где оптимальное управление $u = (u_1, u_2)$ находим с помощью выражений (73).

Если векторное решение (y, p) задачи (88), (89) достаточно гладкое на $\overline{\Omega}_l$, $l = 1, 2$, а именно, удовлетворяет условиям п.1, то этой задаче соответствует дифференциальная задача нахождения вектор-функции $(y, p) \in V\times V_0$, удовлетворяющей системе уравнений (15)–(17), (57), (58), (74), (75) и ограничению

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)=\left[\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right]+y-z_{g_2},\quad x\in\gamma\,. \tag{90}$$

Определение 9. Обобщенным (слабым) решением краевой задачи (15)–(17), (57), (58), (74), (75), (90) называется вектор-функция $U=(y,p)\in$ $\in H=V\times V_0$, удовлетворяющая $\forall z=(z_1,z_2)\in H_0=V_0\times V_0$ интегральному тождеству вида (55), где

$$\bar a(U,z)=\iiint_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\bar a-yz_2\right\}dx+$$

$$+\iint_{\gamma}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)+pz_1/\bar a-yz_2\right\}d\gamma\,, \tag{91}$$

$$\bar l(z)=(f,z_1)-(z_{g_1},z_2)-(z_{g_2},z_2)_{L_2(\gamma)}\,.$$

Лемма 10. Пусть билинейная форма $\bar a(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию H-эллиптичности на H_0, т.е. неравенству вида (54). Тогда задача вида (55), где билинейная форма $\bar a(\cdot,\cdot)$ и линейный функционал $\bar l(\cdot)$ определяются соответствующими выражениями (91), имеет единственное решение $U=(y,p)\in H=V\times V_0$.

Справедливость леммы устанавливается на основе леммы Лакса-Мильграма.

Как и в предыдущем случае, задачу вида (55), соответствующую рассматриваемой задаче данного пункта, можно решить с помощью МКЭ. Для приближенного обобщенного решения $U_k^N=H_k^N\subset H$ и, соответственно, приближенного оптимального управления $u=-\bar p/\bar a$ имеют место оценки вида (34), (77).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
2. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук.думка, 2001. — 606 с.
3. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
6. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.

Поступила 07.06.2004