

УДК 539.3

## КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ ГАЗУ ТА НЕЗМОЧУВАЛЬНОЇ РІДИНИ У ПЕРІОДИЧНИХ МІЖПОВЕРХНЕВИХ ПРОСВІТАХ

*О. П. КОЗАЧОК, Б. С. СЛОБОДЯН, Р. М. МАРТИНЯК*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Досліджено контакт двох півбезмежних пружних тіл за наявності в міжповерхневих просвітах, зумовлених періодичною системою виїмок на межі одного з тіл, газу та нестисливої рідини, яка не змочує поверхні тіл. Перепад тисків у рідині та газі описує рівняння Лапласа. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта, яке трансформовано у СІР з ядром Коші відносно висоти міжповерхневих просвітів. З умови обмеженості на кінцях відрізка інтегрування розв'язку цього СІР і з умови збереження кількості рідини отримано та числово розв'язано систему трансцендентних рівнянь для визначення довжин просвітів та ділянок з рідиною. Проаналізовано залежності довжини та форми просвітів, контактної податливості тіл від прикладеного навантаження, об'єму і поверхневого натягу рідини.

**Ключові слова:** *контактна взаємодія, виїмки, міжповерхневі просвіти, нестислива рідина, поверхневий натяг, сингулярне інтегральне рівняння.*

На поверхнях контакту елементів машин і конструкцій у реальних умовах експлуатації може конденсуватися рідина, яка під впливом поверхневого натягу збирається в найвужчих місцях міжконтактних просвітів, якщо змочує поверхні тіл, або у місцях, де висота просвітів найбільша, якщо їх не змочує. Результати експериментальних досліджень свідчать про те, що рідина в області контакту і її поверхневий натяг можуть суттєво впливати на функціонування рухомих з'єднань сучасних технічних систем [1, 2].

Вперше взаємодію випуклих тіл з урахуванням впливу рідинних міжповерхневих містків вивчено в працях [3, 4]. Розв'язано контактні задачі для тіл з номінально плоскими поверхнями, які мають локальні виїмки, частково заповнені рідиною, яка змочує [5, 6] або ні [7] поверхні тіл. Розглянуто контакт тіл, межа одного з яких має періодичний рельєф, за наявності на краях міжповерхневих просвітів містків рідини, що змочує їх поверхні [8]. Взаємодію двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих просвітів, заповнених реальним газом, розглядали у праці [9].

Нижче досліджено взаємодію двох півбезмежних тіл з періодичним профілем за наявності в центральних частинах міжповерхневих просвітах нестисливої рідини, яка не змочує поверхні тіл.

**Формулювання задачі.** Розглянемо взаємодію двох пружних ізотропних півнескінченних тіл  $D_1$  і  $D_2$  із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл прямолінійна, а іншого – має нерівності у вигляді періодичної системи виїмок однакової форми завдовжки  $2c$  кожна, розташованих з періодом  $d$  уздовж всієї межі. В основній смузі періодів  $-d/2 \leq x \leq d/2$  форму виїмки задає парна неперервно-диференційовна функція  $r(x)$ . Виїмки плиткі ( $r(x) \ll c$ ), по-

логі ( $r'(x) \ll 1$ ) і в крайніх точках плавно переходять у пряму ( $r(\pm c) = 0$ ,  $r'(\pm c) = 0$ ). Тіла контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень  $P^\infty$ . Через нерівність однієї межі їх контакт неповний і між ними виникають міжповерхневі просвіти завдовжки  $2b$  (рис. 1). Вважаємо, що просвіти заповнені нестисливою рідиною, яка не змочує поверхні тіл, та газом, що перебуває під сталим тиском  $P_1$ . Кількість рідини за стиску тіл залишається незмінною, тобто її об'єм  $V_0$ , що припадає на одиницю довжини кожного просвіту у поздовжньому напрямі, сталий. Рідина під дією поверхневого натягу зосереджується там, де висота просвітів найбільша, тобто в середній частині зазорів на ділянках  $(-a + kd, a + kd)$ ,

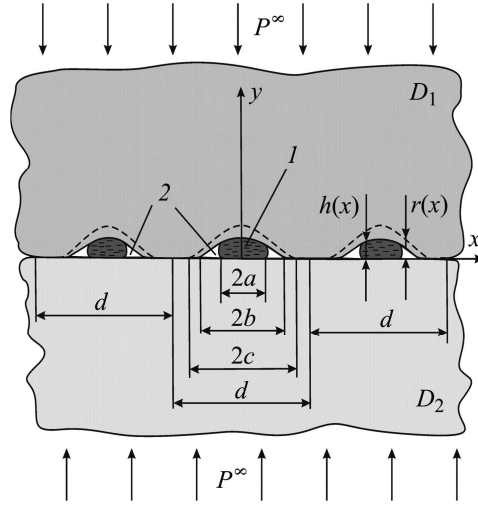


Рис. 1. Схема контакту:  
1 – рідина; 2 – газ.

Fig. 1. The scheme of the contact:  
1 – liquid; 2 – gas.

а газ – на крайніх ділянках просвітів  $(-b + kd, -a + kd) \cup (a + kd, b + kd)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Вважаємо, що тіла контактують без тертя.

Меніск – бічна поверхня рідини, що межує з газом, у перетині має форму півкола [5], радіус якого  $R$  дорівнює половині висоти просвітів у точках  $x = \pm a$  виходу менісків на поверхню пружного тіла:  $R = h(a)/2$ . На менісках діє поверхневий натяг рідини  $\sigma$ . Внаслідок цього тиск  $P_2$  у ній більший, ніж тиск газу  $P_1$ , і перепад тисків тут визначає формула Лапласа [10]:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 2\sigma/h(a). \quad (1)$$

Задача є нелінійною, оскільки під навантаженням змінюються тиск рідини  $P_2$ , довжина  $2b$  і висота  $h(x)$  просвітів та довжина  $2a$  ділянки з рідиною.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд уздовж просвітів  $x \in (-b + kd, b + kd)$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad x \in (-b + kd, b + kd),$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_2, \quad x \in (-a + kd, a + kd),$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_1, \quad x \in (-b + kd, -a + kd) \cup (a + kd, b + kd);$$

на ділянках контакту  $x \in [b + kd, (k + 1)d - b]$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- ,$$

$$v^- - v^+ = \begin{cases} 0, & x \in [-d/2 + kd, -c + kd] \cup [c + kd, d/2 + kd], \\ r'(x), & x \in [-c + kd, -b + kd] \cup [b + kd, c + kd]; \end{cases}$$

на нескінченності:

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут і далі  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $v$  – складова вектора переміщення уздовж осі  $Oy$ ; індексами “+” і “-” позначено граничні значення функції за прямування точки до осі  $Ox$  у верхній і нижній півплощинах ( $y \rightarrow \pm 0$ ).

Оскільки рідина нестислива і не може витікати із просвіту, то має виконуватися умова збереження її кількості

$$l \int_{-a}^a h(x) dx = V_0, \quad (2)$$

де  $l = 1$  м.

**Розв’язання задачі.** Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [11], розв’язок сформульованої задачі подамо через висоту просвітів  $h(x)$ , для визначення якої отримаємо [8] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-b}^b h'(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(P^\infty - P(x)) + \frac{2}{d} \int_{-c}^c r'(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \quad |x| \leq b, \quad (3)$$

$$\text{де } P(x) = \begin{cases} P_2 = P_1 + 2\sigma/h(a), & |x| \leq a, \\ P_1, & a < |x| \leq b; \end{cases} \quad K = \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{2G_2}; \quad G_n = \frac{E_n}{2(1 + \nu_n)};$$

$\kappa_n = 3 - 4\nu_n$ ;  $G_n$ ,  $E_n$ ,  $\nu_n$  – відповідно модуль зсуву, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини  $D_n$ ,  $n = 1, 2$ .

Замінивши змінні  $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$ ,  $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$ ,  $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$ ,  $\gamma = \operatorname{tg}(\pi c/d)$ ,  $\beta = \operatorname{tg}(\pi b/d)$ , СІР (3) трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{1}{1 + \xi^2} \frac{d}{\pi} K(P^\infty - P(\xi)) + \frac{2}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad x \in [-\beta, \beta], \quad (4)$$

$$\text{де } P(\xi) = \begin{cases} P_1 + 2\sigma/h(\alpha), & |\xi| \leq \alpha, \\ P_1, & \alpha < |\xi| \leq \beta. \end{cases}$$

Функція  $h(\xi)$  задовольняє умови плавного змикання берегів просвітів:

$$h(\pm\beta) = 0, \quad h'(\pm\beta) = 0. \quad (5)$$

Форму виїмок задає функція  $r(x) = A \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi x}{d} \right) / \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi c}{d} \right) \right)^{3/2}$ , яка у нових змінних має вигляд  $r(\xi) = A \left( 1 - \xi^2 / \gamma^2 \right)^{3/2}$ , де  $A$  – максимальна висота виїмки ( $A \ll c$ ). Тоді СІР (4) буде:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{1}{1 + \xi^2} \frac{d}{\pi} K(P^\infty - P(\xi)) + \frac{6A}{\gamma} \left( \frac{\xi^2}{\gamma^2} - \frac{1}{2} \right), \quad x \in [-\beta, \beta]. \quad (6)$$

Визначаючи обмежений розв’язок СІР (6), який задовольняє другу умову з (5), знаходимо функцію

$$h'(\xi) = -\frac{3A}{\gamma^3} \xi \sqrt{\beta^2 - \xi^2} - \frac{2K\sigma d}{\pi^2 h(\alpha) \sqrt{\beta^2 + 1}} \arcsin \left( \frac{\alpha \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta \sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \frac{\xi \sqrt{\beta^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} +$$

$$+ \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi\sqrt{\beta^2 + 1}} \frac{\xi\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta, \xi, \alpha) - \Gamma(\beta, \xi, -\alpha)}{1 + \xi^2}, \quad (7)$$

$$\text{де } \Gamma(\beta, \xi, t) = \ln \frac{\beta^2 - t\xi + \sqrt{(\beta^2 - \xi^2)(\beta^2 - t^2)}}{\beta^2 - t\xi - \sqrt{(\beta^2 - \xi^2)(\beta^2 - t^2)}}.$$

Обмежений розв'язок рівняння (6) існує за додаткової умови на його праву частину [12], з якої отримаємо рівняння

$$\frac{3A\pi}{\gamma} \left( \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - 1 \right) + \frac{Kd}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \left( P^\infty - P_1 - \frac{4\sigma}{\pi h(\alpha)} \arcsin \left( \frac{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \right) = 0. \quad (8)$$

Виразивши зі співвідношення (8) різницю  $P^\infty - P_1$  та підставивши її у вираз (7), одержимо:

$$h'(\xi) = -\frac{3A}{\gamma^3} \xi\sqrt{\beta^2 - \xi^2} - \frac{3A}{2\gamma} \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\xi\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta, \xi, \alpha) - \Gamma(\beta, \xi, -\alpha)}{1 + \xi^2}. \quad (9)$$

Оскільки з виразу (9) не вдається аналітично виразити функцію  $h(\xi)$ , то подамо функцію  $h'(\xi)$  у вигляді ряду за поліномами Чебишова першого роду:

$$h'(\xi) = -\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1}(\xi/\beta), \quad (10)$$

де коефіцієнти  $\Theta_l$  визначимо зі системи  $L+1$  рівнянь, яку отримали, прирівнявши вирази (9) та (10) у точках  $\xi_j = \beta \cos(\pi j / (2L+3))$ ,  $j = 1, \dots, L+1$ :

$$-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \xi_j^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1}(\xi_j/\beta) = -\frac{3A}{2\gamma} \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\xi_j\sqrt{\beta^2 - \xi_j^2}}{1 + \xi_j^2} - \frac{3A}{\gamma^3} \xi_j\sqrt{\beta^2 - \xi_j^2} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta, \xi_j, \alpha) - \Gamma(\beta, \xi_j, -\alpha)}{1 + \xi_j^2}.$$

Проінтегрувавши вираз (10), знайдемо висоту просвітів:

$$h(\xi) = \sqrt{\beta^2 - \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l}(\xi/\beta), \quad (11)$$

де  $U_{2l}(\xi/\beta)$  – поліноми Чебишова другого роду.

Умова (2) з урахуванням виразу (11) матиме вигляд

$$l \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l}(\xi/\beta) d\xi = \frac{3A\pi^2}{8d} V_0. \quad (12)$$

Рівняння (8) та (12) формують систему трансцендентних рівнянь для визначення геометричних параметрів – довжин просвітів  $2\beta$  і ділянки з рідиною  $2\alpha$  для вхідних силових параметрів задачі – зовнішнього тиску  $P^\infty$ , тиску газу в просвіті  $P_1$  і поверхневого натягу рідини  $\sigma$ . Для числового розв'язування системи рівнянь

(6), (8), (12) використовуємо метод послідовних наближень стосовно довжини ділянки з рідиною  $2\alpha$ . За початкове наближення вибрали аналітичний розв'язок задачі за відсутності поверхневого натягу рідини (тобто  $\sigma = 0$ ).

Для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом важливу роль відіграють контактне зближення тіл, яке виразимо через висоту міжповерхневих просвітів

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx,$$

і контактна податливість тіл [8]  $k^*$ , яку визначають як похідну їх контактного зближення за зовнішнім навантаженням:  $k^* = d(\Delta v^\infty) / dP^\infty$ .

**Числові результати.** Розраховували для безрозмірних величин: координати  $\tilde{x} = x/d$ ; висоти міжконтактного просвіту  $\tilde{h} = h/d$ ; півдовжини ділянки з рідиною  $\tilde{a} = a/d$ ; півдовжини міжконтактного просвіту  $\tilde{b} = b/d$ ; поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$ ; тиску на нескінченності  $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$ ; тиску газу  $\tilde{P}_1 = KP_1$ ; максимальної висоти виїмки  $\tilde{A} = A/d$ ; контактної податливості  $\tilde{k}^* = d(\Delta \tilde{v}^\infty) / d\tilde{P}^\infty$ ; об'єму рідини в зазорі  $\tilde{V}_0 = V_0/V$ , де  $V$  – об'єм виїмки. Числово аналізували для півдовжини виїмки  $\tilde{c} = 0,25$ , максимальної висоти  $\tilde{A} = 0,001$  та тиску газу  $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$ .

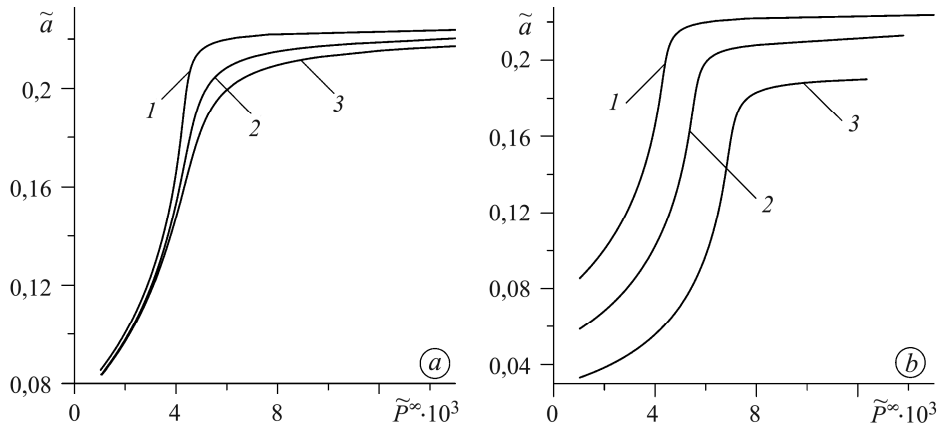


Рис. 2. Залежність півдовжини ділянки з рідиною  $\tilde{a}$  від зусиль  $\tilde{P}^\infty$  для об'єму  $\tilde{V}_0 = 0,5$  за різних поверхневих натягів: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$  (a); для натягу  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$  за різних об'ємів: 1 –  $\tilde{V}_0 = 0,5$ ; 2 – 0,35; 3 – 0,2 (b).

Fig. 2. Dependence of the region with a liquid half-length  $\tilde{a}$  on the stress  $\tilde{P}^\infty$  for volume  $\tilde{V}_0 = 0.5$  and various values of the surface tension: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$  (a); for  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$  at various values of the volumes: 1 –  $\tilde{V}_0 = 0.5$ ; 2 – 0.35; 3 – 0.2 (b).

Зі збільшенням поверхневого натягу рідини довжина ділянки з рідиною зменшується (рис. 2a), а з ростом навантаження – збільшується. Маємо різкий характер зміни величини  $\tilde{a}$  для двох діапазонів навантаження. На початковому етапі вона різко зростає, а далі дуже повільно змінюється з підвищенням наван-

таження, що фізично означає наближення менісків рідини до кінців просвітів. Тоді радіус меніска суттєво спадає, зумовлюючи, як це впливає з формули Лапласа (1), ріст тиску рідини, що починає чинити більший опір закриттю просвіту. Зі зменшенням об'єму рідини ділянка з нею скорочується (рис. 2b).

З ростом прикладеного навантаження півдовжина просвітів зменшується, а з підвищенням поверхневого натягу рідини – дещо збільшується (рис. 3). Вплив поверхневого натягу  $\tilde{\sigma}$  на півдовжину просвітів найвідчутніший для діапазону тиску на нескінченності  $3 \cdot 10^3 < \tilde{P}^\infty < 7 \cdot 10^3$ , а поза ним незначний.

За фіксованого зовнішнього навантаження зі збільшенням поверхневого натягу рідини зростає висота просвітів (рис. 4), найбільше – в їх центральній частині.

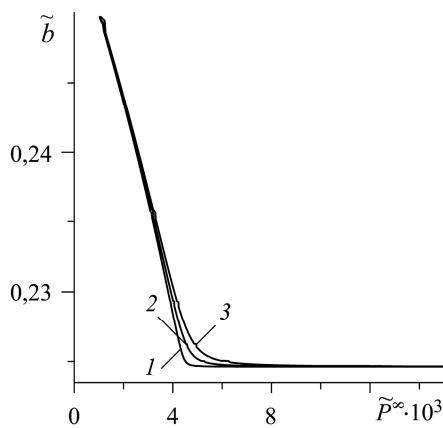


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність півдовжини просвіту  $\tilde{b}$  від зусиль  $\tilde{P}^\infty$  для об'єму рідини  $\tilde{V}_0 = 0,5$  за різних її поверхневих натягів: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

Fig. 3. Dependence of the half-length of the gap  $\tilde{b}$  on stress  $\tilde{P}^\infty$  for the liquid volume  $\tilde{V}_0 = 0.5$  at different values of its surface tension: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

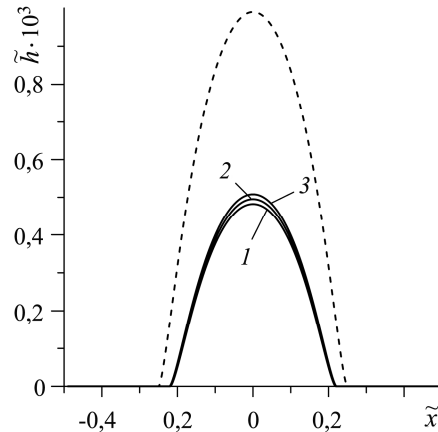


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Форма просвітів  $\tilde{h}(\tilde{x})$  за зовнішнього навантаження  $\tilde{P}^\infty = 0,005$  для об'єму рідини  $\tilde{V}_0 = 0,35$  за різних її поверхневих натягів: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

Штрихова крива описує форму виїмок  $\tilde{r}(\tilde{x})$ .

Fig. 4. The shape of gaps  $\tilde{h}(\tilde{x})$  for external load  $\tilde{P}^\infty = 0.005$ , for the liquid volume  $\tilde{V}_0 = 0.35$  at different values of its surface tension: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

Dashed curve describes the groove form  $\tilde{r}(\tilde{x})$ .

З підвищенням навантаження контактна податливість тіл зменшується (рис. 5a), а за великих зовнішніх тисків прямує до деякого малого значення, проте ніколи не дорівнює нулю. На початковому етапі навантаження збільшення поверхневого натягу рідини призводить до зменшення контактної податливості тіл, а на наступному ( $\tilde{P}^\infty > 4 \cdot 10^3$ ) – навпаки, до її зростання (рис. 5a). За однакових навантажень контактна податливість менша за більшого об'єму рідини (рис. 5b). Під час навантаження вона швидше спадає за великих об'ємів рідини, ніж за малих (рис. 5b).

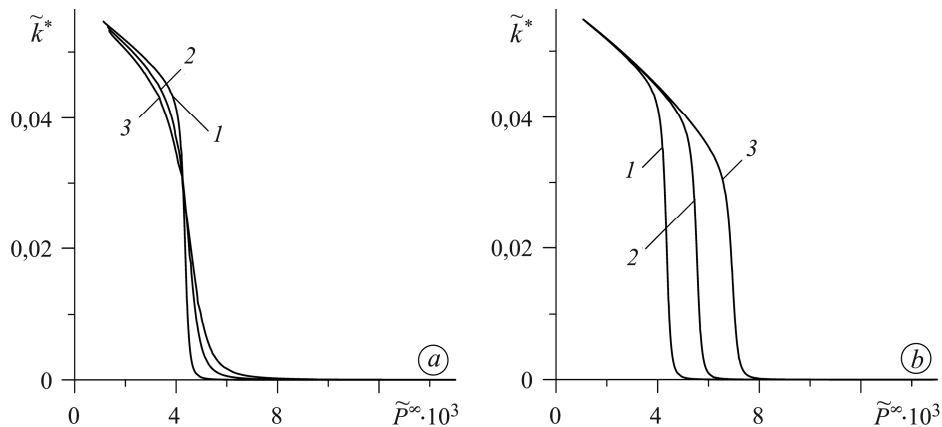


Рис. 5. Залежність контактної податливості тіл  $\tilde{k}^*$  від зусиль  $\tilde{P}^\infty$  для об'єму  $\tilde{V}_0 = 0,5$  за різних поверхневих натягів: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$  (a); для натягу  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$  за різних об'ємів: 1 –  $\tilde{V}_0 = 0,5$ ; 2 – 0,35; 3 – 0,2 (b).

Fig. 5. Dependence of the contact compliance  $\tilde{k}^*$  of bodies on the force  $\tilde{P}^\infty$  for volume  $\tilde{V}_0 = 0.5$  at various values of the surface tension: 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$  (a); for  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$  at various values of the volume: 1 –  $\tilde{V}_0 = 0.5$ ; 2 – 0.35; 3 – 0.2 (b).

## ВИСНОВКИ

Досліджено контакт двох пружних ізотропних півнескінченних тіл, одне з яких має періодичну систему поверхневих виїмок, за наявності в міжконтактних просвітах газу та нестисливої рідини, яка не змочує поверхні тіл. Перепад тисків у рідині та газі описує рівняння Лапласа. Довжини просвітів та ділянки дії рідини заздалегідь невідомі та залежать від навантаження. Контактну задачу зведено до СІР з ядром Гільберта відносно висоти міжконтактних просвітів та системи двох трансцендентних рівнянь стосовно довжин просвітів та ділянки з рідиною. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цієї системи рівнянь і досліджено залежності довжини просвіту, довжини ділянки з рідиною та висоти просвіту від прикладеного навантаження, об'єму рідини і її поверхневого натягу. Встановлено, що зі збільшенням поверхневого натягу рідини зростає міжконтактний просвіт. Зменшення об'єму рідини призводить до зменшення довжини ділянки з рідиною. З підвищенням навантаження довжина ділянки з рідиною зростає, але з її наближенням до краю виїмки цей процес суттєво сповільнюється.

**РЕЗЮМЕ.** Исследован контакт двух полубесконечных упругих тел при наличии в межповерхностных зазорах, обусловленных периодической системой выемок на границе одного из тел, газа и несжимаемой жидкости, которая не смачивает поверхности тел. Перепад давлений в жидкости и газе описывает уравнение Лапласа. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта, которое трансформировано в СИУ с ядром Коши относительно высоты межповерхностных зазоров. Из условия ограниченности на концах отрезка интегрирования решения этого СИУ и из условия сохранения количества жидкости получена и численно решена система трансцендентных уравнений для определения длины зазоров и участков с жидкостью. Проанализированы зависимости длины и формы зазоров, контактной податливости тел от приложенной нагрузки, объема и поверхностного натяжения жидкости.

**SUMMARY.** The contact of two elastic semi-infinite bodies in the presence of an incompressible liquid, which does not wet the surfaces of the bodies, and a gas in the interfacial gaps due to a periodic array of grooves on the surface of one of the bodies, is investigated. The pressure difference in the liquid and the gas is described by the Young–Laplace equation. The prob-

lem is reduced to a singular integral equation (SIE) with Hilbert kernel, and then it is transformed to a SIE with Cauchy kernel relatively to a height of the interfacial gaps. A system of transcendental equations to evaluate the length of gaps and regions with the liquid is obtained from the consistency condition for this SIE and the condition of liquid amount conservation. This system is solved numerically. The dependences of the length and the shape of the gaps, the contact compliance of the bodies on the applied load, the volume and the surface tension of the liquid are analyzed.

1. *Kato Takahisa, Watanabe Souta, and Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 1 – Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // *J. Tribology.* – 2000. – **122**. – P. 633–638.
2. *Kato Takahisa, Watanabe Souta, and Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2 – Application to the disk with random undulation and design conditions // *J. Tribology.* – 2001. – **123**. – P. 168–174.
3. *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // *Прикл. математика и механика* – 2001. – **65**, № 2. – С. 279–289.
4. *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // *Прикл. математика и механика.* – 1999. – **63**, № 1. – С. 128–137.
5. *Мартьяк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 1. – С. 164–173.
6. *Мартьяк Р. М., Слободян Б. С., Чирик С. А.* Контактна взаємодія тіл за наявності в міжповерхневому зазорі ідеального газу та рідинних містків // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 18. – С. 189–197.
7. *Слободян Б. С.* Тиск пружного тіла на жорстку основу з виїмкою, частково заповненою рідиною, що не змочує їх поверхні // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 122–128.  
(*Slobodyan B. S.* Pressure of an elastic body on a rigid base with a recess partially filled with a liquid that does not wet their surfaces // *Materials Science.* – 2011. – **47**, № 4. – P. 561–568.)
8. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартьяк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // *Теорет. и прикл. механика.* – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
9. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартьяк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 1. – С. 103–111.
10. *Арцыбашев С. А.* Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во Мин. просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
11. *Kryshchak A. and Martynak R.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *J. Friction and Wear.* – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
12. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

*Одержано 22.06.2015*