

Экзотические солитоны в магнетиках с сильно анизотропным обменным взаимодействием

А. С. Ковалев

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

М. В. Гвоздикова

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 18 сентября 1998 г.

Исследованы экзотические магнитные солитоны (компактоны и пиконы) в магнетиках с предельно анизотропным обменным взаимодействием в рамках классических изинговской и XY-моделей.

Досліджено екзотичні магнітні солітони (компактони та пікони) в магнетиках з якнайбільш анизотропною обмінною взаємодією в межах класичних ізінгівської та XY-моделей.

PACS: 03.40.Kf

Введение

Интенсивное исследование нелинейных динамических физических систем в последние 40 лет привело к созданию нового направления теоретической и математической физики — теории солитонов [1,2]. В приложении к физике твердого тела особый интерес представляет изучение солитонной динамики в магнитоупорядоченных средах [3,4]. Благодаря разнообразию структур и физических свойств магнетиков в них могут наблюдаться нелинейные локализованные возбуждения самого разного типа: магнитные солитоны и вихри, доменные границы, волны поворота намагниченности и т.д. [3,4]. Указанные системы интересны и в связи с тем, что ряд моделей в теории магнетизма являются полностью интегрируемыми, и результаты классического рассмотрения допускают сравнение с результатами исследования некоторых одномерных квантовых моделей.

Вместе с тем теоретически в основном изучались простейшие одномерные модели в длинноволновом пределе (в рамках дифференциальных уравнений). Это дало возможность в явном виде построить решение для магнитных солитонов разного типа в ферро- и антиферромагнетиках, ферритах и спиновых системах и провести их классификацию. Однако полученные

теоретические результаты для одномерных моделей допускают сравнение с экспериментальными данными лишь в случае квазиодномерных магнитных систем. В последнее время синтезировано большое число таких соединений. Отметим традиционный квазиодномерный ферромагнетик CsNiCl_3 [5], новые одномерные ферромагнетики $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}]\text{NiCl}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, $(\text{C}_9\text{H}_7\text{NH})\text{NiCl}_3 \cdot 1,5\text{H}_2\text{O}$, [6], слоистые антиферромагнетики $(\text{CH}_2)_n(\text{NH}_3)_2\text{MnCl}_4$, $(\text{C}_n\text{H}_{2n+1})(\text{NH}_3)_2\text{MnCl}_4$ [7–11] и большинство ВТСП соединений в стехиометрической фазе и их изоструктурные аналоги. В последнем случае слоистых соединений из-за аномально слабого межслойного взаимодействия каждая магнитоупорядоченная плоскость может рассматриваться как эффективный спин, а стопка слоев — как модельная одномерная спиновая система со слабым обменным взаимодействием.

Однако реальные низкоразмерные магнетики обладают, как правило, необычными физическими свойствами, отличными от магнитных свойств 3D соединений. Прежде всего, значительное число таких магнетиков являются существенно дискретными в магнитном отношении и их описание в рамках дифференциальных уравнений, т.е. как систем с распределенными параметрами, неоправданно. Дискретность магнитной подсистемы определяется соотношением энергии обменного

взаимодействия ($E_{\text{ex}} \sim JS^2/a^2$, где J — константа обменного взаимодействия; S — спин ячейки; a — межатомное расстояние) и энергии одноионной анизотропии ($E_a \sim \beta S^2$, где β — константа одноионной анизотропии). С этим отношением связана величина так называемой «магнитной длины» $l_0 = \sqrt{J/\beta}$, определяющей характерный размер области неоднородности распределения намагниченности. При малом обменном взаимодействии (или большой анизотропии) величина l_0 достигает порядка межатомного расстояния a : $l_0 \sim a$ ($J \sim \beta a$), и система становится существенно дискретной в магнитном отношении. Для приведенных выше соединений отношение $J/\beta a$ может достигать значения порядка и существенно меньше единицы (например, для ВТСП соединений $J/\beta a \sim 1$, где J — величина межслойного обмена [12]), а для соединений, исследованных в [7–11], это соотношение при больших значениях номера n доходит до величины 10^{-2} . Как показано в [13–15], в таких дискретных системах существенно меняется структура и динамика нелинейных локализованных возбуждений (солитонов и доменных границ): они компактизируются и переходят в коллинеарную форму.

С другой стороны, в ряде случаев низкоразмерные магнетики обладают существенной анизотропией обменного взаимодействия (анизотропией g -фактора), в то время как большинство теоретических моделей (классических) учитывают, как правило, лишь одноионную или слабую обменную анизотропию. Реально анизотропия обмена может быть порядка величины самого обменного взаимодействия. Например, в соединениях $\text{KDy}(\text{MoO}_4)_2$ и $\text{KEr}(\text{MoO}_4)_2$ анизотропия g -фактора достигает величины порядка 10^1 [16,17]. При этом можно ввести несколько магнитных длин $l_i = \sqrt{J_i/\beta}$, связанных с величинами обменного взаимодействия различных спиновых компонент. В предельно анизотропных случаях, когда некоторые компоненты этого взаимодействия обращаются в нуль, мы приходим к классической модели Изинга или XY-модели. Как было показано нами ранее [4,18,19], в этих пределах структура магнитных солитонов и доменных стенок также претерпевает существенное изменение и, в частности, возможна их компактизация и образование экзотических нелинейных локальных возбуждений (компактонов и пиконов).

Несмотря на кажущееся различие указанных выше двух обстоятельств, их объединяет одно общее свойство: в системах с обменным взаимодействием, сравнимым с одноионной анизотропией, и в системах с анизотропией обменного

взаимодействия, сравнимой с самим обменом, аномально малой может становиться дисперсия элементарных возбуждений (спиновых волн). Дисперсия (в узком смысле слова) определяется выражением $D = d^2\omega(k)/dk^2$, где $\omega = \omega(k)$ — закон дисперсии элементарных возбуждений. Для систем с изотропным обменным взаимодействием $D \sim J$, в изинговском магнетике с выделенной осью z дисперсия $D \sim J_x = J_y \ll J_z$ и в XY-модели с той же симметрией $D \sim \sqrt{J_x} J_z k$ ($J_z \ll J_x, J_y$). Таким образом, при $J, J_i \ll \beta$ дисперсия линейных волн становится слабой.

Как известно, причиной существования нелинейных локализованных возбуждений является конкуренция нелинейности системы и ее пространственной дисперсии [2], поэтому вид закона дисперсии линейных волн $\omega = \omega(k)$ существенно влияет на свойства солитонных состояний. Первым, кто обратил внимание на связь возможности существования компактных солитонов с отсутствием дисперсии линейных волн, был Розенау [20,21], который предложил новый вариант уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) с нелинейным дисперсионным слагаемым и нашел компактные солитонные решения стационарного профиля. Тогда же [22,23] были рассмотрены и компактные солитоны огибающей в бездисперсионных средах. Позже Холм и Камасса (1994 г.) предложили свою модификацию уравнения КдФ, которое при определенном значении скорости (соответствующей обращению в нуль дисперсии) допускало солитонное решение с необычным экзотическим профилем, получившее название пикона. Квазиклассическая трактовка экзотических солитонов (компактонов и пиконов) была предложена нами в работах [18,19].

В данной статье рассмотрен одноосный ферромагнетик с одноионной и обменной анизотропиями в пределе сильной обменной анизотропии (изинговский и XY-магнетики) и одноионной анизотропии типа ось легкого намагничивания и плоскость легкого намагничивания в рамках одномерной классической гейзенберговской модели. Найдены все возможные типы компактных и пиконных решений для доменных границ, динамических магнитных солитонов и волн поворота намагниченности.

1. Формулировка модели и уравнения динамики намагниченности

Рассмотрим одноосный ферромагнетик с обменной и одноионной анизотропиями одинаковой симметрии, плотность энергии которого в одномерном случае имеет следующий вид [3]:

$$E = \frac{J}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \frac{J_1}{2} \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\beta}{2} M_z^2, \quad (1)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности; $J_x = J_y = J$, $J_z = J + J_1$ — константы обменного взаимодействия вдоль соответствующих осей; β — константа одноионной анизотропии, связанной с осью z ($\beta > 0$ для легкоосного ферромагнетика и $\beta < 0$ для легкоплоскостного ферромагнетика).

Уравнения динамики намагниченности (уравнения Ландау — Лифшица) в угловых переменных θ и φ , задающих ориентацию вектора $\mathbf{M} = M_0 (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, имеют вид [3]

$$\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta E}{\delta \varphi}, \quad \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta E}{\delta \theta}, \quad (2)$$

где M_0 — номинальная намагниченность и μ_0 — магнетон Бора. Фактически уравнения (2) представляют собой уравнения Гамильтона для канонически сопряженных величин φ и M_z .

Для частного случая одноосного ферромагнетика с плотностью энергии (1) уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} & [l^2 + (L^2 - l^2) \sin^2 \theta] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \\ & - \left[\sigma + l^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - (L^2 - l^2) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \sin \theta \cos \theta + \\ & + \frac{1}{\omega_0} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{1}{\omega_0} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

где введены обозначения для частоты однородного ферромагнитного резонанса $\omega_0 = 2\mu_0 M_0 |\beta|/\hbar$; $l^2 = J/\beta$; $L^2 = (J + J_1)/\beta$ и знаковый коэффициент σ , равный +1 или -1 соответственно для легкоосного и легкоплоскостного случая.

Система (3), (4) может быть переписана в виде одного уравнения для комплексной величины $\Psi = (M_x + iM_y)/M_0$:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - l^2 m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + L^2 \Psi \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \sigma m \Psi = 0, \quad (5)$$

где $m = \sqrt{1 - |\Psi|^2}$ — безразмерная z -компонента намагниченности и время измеряется в единицах $1/\omega_0$.

Заметим, что мы воспользовались феноменологическим выражением для энергии (1), из которого следует, что длинноволновое рассмотрение ($\partial/\partial x \ll 1/a$) для статических решений справедливо при выполнении неравенств $J_x, J_z \gg \beta a^2$ ($l, L \gg a$). Если же исходить из дискретного гамильтониана с обменным взаимодействием $E_{ex} = -\sum_{i,n} J_i M_i^n M_i^{n+1}/a^2$, где n — номер узельного спина, то в длинноволновом пределе в выражении (1) необходимо заменить β на $\beta - (J_x - J_z)/a^2$. При этом длинноволновое рассмотрение оказывается справедливым при выполнении неравенств $J_x, J_z \gg \beta a^2 - (J_x - J_z)$. То есть в предельно анизотропных случаях с $J_x = J_y = 0$ (изинговский предел) и $J_z = 0$ (XY-предел) это рассмотрение выполняется при близких значениях одноионной анизотропии и ненулевой компоненты обменного взаимодействия. (Напротив, при изотропном обменном взаимодействии, как указано выше, в этом случае система становится существенно дискретной и длинноволновый подход неприменим.)

Уравнения (3)–(5) и их солитонные решения полно изучены лишь в случае ферромагнетика с изотропным обменным взаимодействием, когда $L = l$. При этом система становится полностью интегрируемой [3,4] как в легкоосном, так и в легкоплоскостном случае, и все солитонные решения уравнения (5) представлены в явном аналитическом виде: в легкоосном ферромагнетике возможно существование доменных границ и динамических магнитных солитонов, а в легкоплоскостном ферромагнетике — динамических солитонов и волн поворота намагниченности [3,4]. В общем случае при $L \neq l$ для легкоосного ферромагнетика солитонные решения могут быть представлены в неявном виде через эллиптические интегралы [3] или исследованы численно [24]. В легкоплоскостном случае, насколько нам известно, солитонные состояния при $L \neq l$ не исследовались.

2. Основные типы солитонных возбуждений ферромагнетика

Классификация солитонных возбуждений одноосного ферромагнетика существенно зависит от вида одноионной анизотропии, так как при изменении ее знака меняется характер основного состояния системы. В легкоосном ферромагнетике основное состояние дважды вырождено и соответствует конфигурации с $m = \pm 1$, в легкоплоскостном случае основное состояние, отвечающее значению $m = 0$, непрерывно вырождено по фазе комплексной функции Ψ . Вследствие этого в этих

двух случаях существенно различный характер имеет спектр спиновых волн.

В легкоосном магнетике ($\sigma = 1$) спектр нелинейных спиновых волн $\Psi \simeq \exp [i(\omega t - kx)]$ имеет вид

$$\omega = m(1 + k^2 l^2). \quad (6)$$

При этом дисперсия этих волн равна $D = 2ml^2$. Видно, что в изинговском пределе ($J_x = J_y = 0$, $l = 0$) дисперсия спиновых волн обращается в нуль. С другой стороны, в пределе ХУ-модели ($J_z = 0$) дисперсия (вместе с частотой) обращается в нуль при выделенной амплитуде спиновой волны $\Psi_0 = 1$ ($m = 0$). В движущейся с групповой скоростью $V = 2mkl^2$ системе отсчета закон дисперсии линейных волн (с $m = 1$)

$$\tilde{\omega} = 1 - \frac{V^2}{4l^2} \quad (7)$$

определяет на плоскости $(\tilde{\omega}, V)$ область существования солитонных решений: $\omega < \tilde{\omega}(V)$. В изинговском пределе ($l = 0$) эта область схлопывается в линию $\omega < 1$, $V = 0$ и, следовательно, существуют лишь неподвижные доменные стенки (как и при изотропном обменном взаимодействии) и неподвижные магнитные солитоны. С другой стороны, в ХУ-модели ($L = 0$) область существования солитонов такая же, как и при изотропном обмене, но линия $\tilde{\omega} < 0$, $V = 0$ становится особой (на ней дисперсия обращается в нуль).

В изотропном случае ($L = l$) доменным стенкам отвечает точка $\omega = 0$, $V = 0$ и соответствующее решение хорошо известно:

$$m = \text{th} \frac{x}{l}, \quad (8)$$

а простейшее решение для неподвижного магнитного солитона ($V = 0$) имеет вид [3,4]

$$m = 1 - \frac{2(1 - \omega)}{\omega \text{sh}^2 (\kappa l \sqrt{1 - \omega}) + 1}, \quad \omega > 0, \quad (9)$$

$$m = 1 + \frac{2(1 - \omega)}{\omega \text{ch}^2 (\kappa l \sqrt{1 - \omega}) - 1}, \quad \omega < 0.$$

В случае легкоплоскостной одноионной анизотропии ($\sigma = -1$) линейные спиновые волны имеют следующий закон дисперсии:

$$\omega = lk \sqrt{1 + L^2 k^2}. \quad (10)$$

При таком законе дисперсии групповая скорость и дисперсия имеют вид

$$V = l(1 + 2L^2 k^2)(1 + L^2 k^2)^{-1/2},$$

$$D = L^2 lk(3 + 2L^2 k^2)(1 + L^2 k^2)^{-3/2}.$$

Видно, что и в изинговском ($l = 0$), и ХУ- ($L = 0$) пределах дисперсия обращается в нуль. Кроме того, в изинговском пределе обращается в нуль и групповая скорость. В движущейся с групповой скоростью системе отсчета законы дисперсии линейных волн $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(V)$ в неявном виде записываются так:

$$\tilde{\omega} = -lL^2 \frac{k^3}{\sqrt{1 + L^2 k^2}}, \quad V = l \frac{1 + 2L^2 k^2}{\sqrt{1 + L^2 k^2}}. \quad (11)$$

Соответствующие (11) параболы

$$\tilde{\omega} \simeq - (2/3)^{3/2} (V - l)^{3/2} / L \sqrt{l}$$

и отрезок ($\tilde{\omega} = 0$, $|V| < l$) ограничивают на плоскости $(\tilde{\omega}, V)$ область существования динамических магнитных солитонов. Из (11) следует, что в изинговском пределе эта область «схлопывается» в линию ($V = 0$, $\omega < 0$) и, следовательно, существуют лишь неподвижные солитоны. В ХУ-модели область динамических солитонов ограничена прямыми ($\tilde{\omega} = 0$, $|V| < l$) и ($V = \pm l$, $\tilde{\omega} < 0$).

В случае изотропного обменного взаимодействия ($L = l$) отрезок ($\tilde{\omega} = 0$, $|V| < l$) соответствует волнам поворота намагниченности, решение для которых имеет следующий вид [3,4]:

$$\Psi = \text{th} \xi + i(V/l) \frac{1}{\text{ch} \xi}, \quad m = \frac{\sqrt{1 - V^2/l^2}}{\text{ch} \xi}, \quad (12)$$

где $\xi = \sqrt{1 - V^2/l^2} (x - Vt)/l$.

Решения для динамических солитонов существуют во всей области параметров под параболами (11) и линейей волн поворота намагниченности и имеют довольно громоздкий вид даже в случае неподвижного центра тяжести такой волны [3,4]:

$$m = \frac{2 \text{sh} (\kappa x/l) \sin \omega t (\kappa^2 - 1)}{(\kappa^2 - 1) \text{sh}^2 (\kappa x/l) + \kappa^2 - \sin^2 \omega t},$$

$$\Psi = \frac{(\kappa^2 - 1) \text{sh}^2 (\kappa x/l) - \kappa^2 + \sin^2 \omega t}{(\kappa^2 - 1) \text{sh}^2 (\kappa x/l) + \kappa^2 - \sin^2 \omega t} +$$

$$+ i \frac{2\kappa \sqrt{\kappa^2 - 1} \text{sh} (\kappa x/l) \cos \omega t}{(\kappa^2 - 1) \text{sh}^2 (\kappa x/l) + \kappa^2 - \sin^2 \omega t}, \quad (13)$$

где $|\omega| = \kappa \sqrt{\kappa^2 - 1}$.

Рассмотрим, как трансформируются магнитные солитоны, доменные границы и волны поворота намагниченности в ферромагнетиках с предельно анизотропным обменным взаимодействием.

3. Экзотические солитоны в легкоосном ферромагнетике

3.1. Компактизация локализованных возбуждений в легкоосном изинговском магнетике

В легкоосном ферромагнетике с анизотропным обменным взаимодействием динамика намагниченности описывается системой (3),(4) с $\sigma = +1$. Для солитонных решений общего вида

$$\theta = \theta(x - Vt), \quad \varphi = \Psi(x - Vt) + \tilde{\omega}t \quad (14)$$

уравнение (4) интегрируется и, воспользовавшись связью Ψ и θ , после интегрирования уравнения (3) получаем [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} \sqrt{l^2 + (L^2 - l^2) \sin^2\theta} = \\ = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{\cos^4(\theta/2) - (V/2l)^2 - \tilde{\omega} \cos^2(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Это уравнение первого порядка, допускающее интегрирование в квадратурах и анализ на фазовой плоскости, удобно переписать в терминах переменной m :

$$\left(\frac{dm}{dx}\right)^2 = (1 - m)^2 \frac{(1 + m)(1 - 2\tilde{\omega} + m) - (V/l)^2}{(L^2 - l^2)(1 - m^2) + l^2}. \quad (16)$$

При изотропном обменном взаимодействии ($L = l$) уравнение (16) сводится к следующему:

$$l^2 \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 = (1 - m)^2 \left[(1 + m)^2 - 2\tilde{\omega}(1 + m) - \left(\frac{V}{l}\right)^2 \right]. \quad (17)$$

Фазовый портрет этого уравнения приведен на рис. 1,а. Здесь стандартная сепаратрисная петля 1 соответствует решению общего вида (в частности, решению (9) при $\tilde{\omega} > 0$), сепаратрисы 2 и 2' отвечают решению (8) для доменной стенки с $\omega = 0, V = 0$ и сепаратрисная петля 3 — решению (9) для магнитного солитона с отрицательной частотой.

В пределе изинговского ферромагнетика, когда $l \rightarrow 0$ (при этом, как было показано выше, $V \rightarrow 0$ и $V/l \rightarrow 0$), уравнение (16) трансформируется:

$$(1 - m^2) \left[L^2 \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 + (m - \omega)^2 - (1 - \omega)^2 \right] = 0. \quad (18)$$

Его фазовый портрет существенно отличается от такового для уравнения (17) и изображен на рис. 1,б. Он состоит из эллипса 1 для положительночастотных солитонов, половины эллипса 2 или 2' для доменных границ разного знака с $\omega = 0$ и части эллипса и отрезка прямой $m = -1$ (петля 3) для отрицательночастотных солитонов. (Отметим, что амплитуда неподвижного солитона в ферромагнетике с изотропным обменным взаимодействием и в изинговском магнетике совпадают: $m(x = 0) = -1 + 2\omega$. Из (15) следует, что в общем случае эта величина не зависит от параметра L , а при $V = 0$ и от l .)

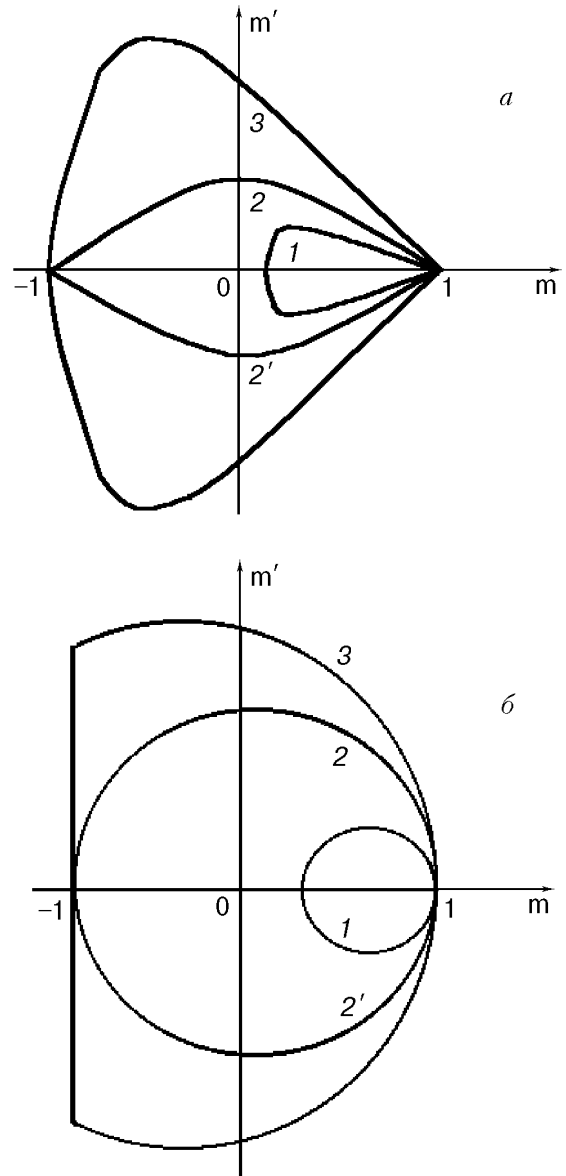


Рис. 1. Фазовые портреты динамических солитонов и доменных границ в случае легкоосного магнетика с изотропным обменным взаимодействием (а) и легкоосного магнетика с изинговским обменным взаимодействием (б): 1 — положительночастотные солитоны, 2 — доменные стенки, 3 — отрицательночастотные солитоны.

Решение уравнения (18) для положительнототных солитонов ($\omega > 0$) имеет простой вид [4]:

$$m = \omega - (1 - \omega) \cos(x/L), \quad |x| < \pi L, \quad (19)$$

$$m = 1, \quad |x| > \pi L,$$

и его профиль приведен на рис. 2,а.

Сравнивая это солитонное решение с решением (9), видим что амплитуда по-прежнему пропорциональна величине $1 - \omega$, что характерно для динамических солитонов, но область локализации

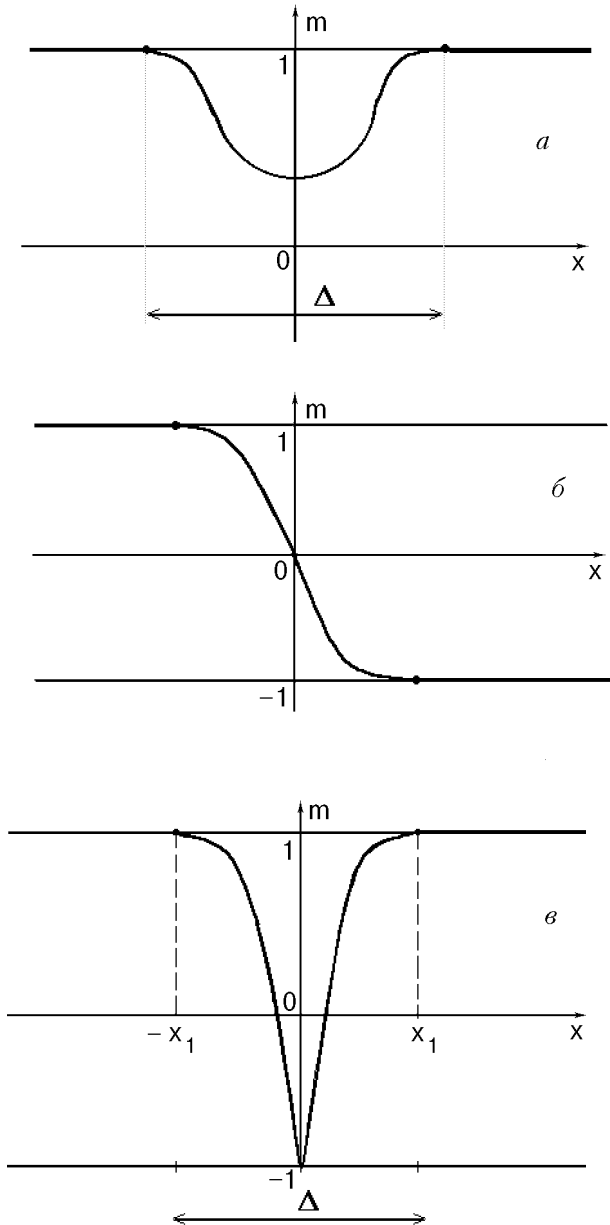


Рис. 2. Профили динамического компактона с положительными (а) и отрицательными (в) частотами и компактной доменной стенки (б) в изинговском легкоосном ферромагнетике.

теперь не зависит от частоты и фиксирована: $\Delta = 2\pi L$.

Наиболее интересным свойством найденного решения является то, что $m \equiv 1$ в областях $|x| > \pi L$, и все изменения поля намагниченности сконцентрированы в конечной области пространства. Позже такие решения были названы «компактонами» [20,21]. Физическая причина существования таких экзотических возбуждений следующая: поскольку в изучаемом предельном случае дисперсия линейных волн равна нулю, то на бесконечности в локализованном решении с $m \rightarrow 0$ (при $|x| \rightarrow \infty$) асимптотика может лишь тождественно равняться нулю. Однако в центре локализованного возбуждения, где амплитуда отлична от нуля, за дисперсию нелинейной волны ответственны нелинейные дисперсионные слагаемые в уравнении.

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, компактное решение (19) выражается через тригонометрическую функцию, которая обычно является решением линейного уравнения. (Действительно, множитель в квадратных скобках в (18) является интегралом линейного уравнения $L^2 m_{xx} + m = \omega$.) Однако амплитуда решения не произвольна, а является определенной функцией частоты, как обычно в нелинейных уравнениях.

Во-вторых, хотя решение (19) «сшито» из нескольких функций и является кусочным, сама функция $m(x)$ вместе со своей первой производной являются непрерывными функциями. Более того, решение (19) является пределом (при $l \rightarrow 0$) аналитической функции без всяких особенностей. Например, в магнетике с $l/L \ll 1$ при $1 - \omega \ll 1$ и $V = 0$ малоамплитудный солитон с $1 - m \ll 1$ описывается приближенным уравнением

$$4L^2 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = u^2 \frac{2(1 - \omega) - u^2}{l^2/2L^2 + u^2} \quad (20)$$

для функции $u = \sqrt{1 - m}$. Аналитическое во всей области пространства решение (20) имеет следующий неявный вид [18,19]:

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \frac{\sqrt{A} - f}{\sqrt{A} + f} - \arcsin \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1}, \quad (21)$$

где $A = (2L/l)^2(1 - \omega)$ и

$$f = \left[\frac{4L^2(1 - \omega) - 2L^2(1 - m)}{l^2 + 2L^2(1 - m)} \right]^{1/2}.$$

В пределе $\omega = 0$ солитонное решение (19) трансформируется в решение для доменной границы [4]:

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad x > \pi L/2, \\ m &= \sin(x/L), \quad |x| < \pi L/2, \\ m &= -1, \quad x < -\pi L/2 \end{aligned} \quad (22)$$

(см. рис. 2,б). Это решение также имеет вид компактона, но топологического. Ему соответствуют сепаратрисы 2 и 2' на рис. 1,б. Недавно решение такого типа было найдено Ремуссине с соавторами для предложенной ими механической модели. Из (19) и (22) видно, что ширина компактной доменной стенки равна половине ширины динамического компактона.

Наконец, при отрицательных частотах прецессии намагниченности в солитоне решение также имеет компактный вид:

$$\begin{aligned} m &= -|\omega| - (1 + |\omega|) \cos[(x + x_0)/L], \quad 0 < x < x_1, \\ m &= 1, \quad x > x_1, \end{aligned} \quad (23)$$

где $x_0 = \arccos[(1 - |\omega|)/(1 + |\omega|)]$, $x_1 = L\pi - x_0$ и $m(x) = m(-x)$ (см. рис. 2,в).

Однако теперь решение (23) имеет скачок производной в центре солитона. Но амплитуда решения в этой точке не произвольна, а равна вполне определенной величине $m = -1$, и при этом значение $m = -1$ является решением нелинейного уравнения (18). Тем не менее производная от угловой переменной θ в нуле имеет особенность: $d\theta/dx \approx 4\sqrt{|\omega|}/\sqrt{Lx(1 + |\omega|)}$, и длинноволновое рассмотрение в этой точке теряет смысл. Однако, как и в предыдущем случае, решение (23) представляет предел аналитического решения уравнения (16) с $l \ll L$ при $l \rightarrow 0$. Такое поведение характерно для так называемых «пиконов» (см. ниже), и поэтому отрицательночастотные солитоны в изинговском пределе представляют собой комбинацию компактона и пикона.

В отличие от положительночастотных в отрицательночастотных солитонах область локализации не фиксирована и зависит от частоты: $\Delta = 2L(\pi - \arccos[(1 - |\omega|)/(1 + |\omega|)])$. При $|\omega| \rightarrow \infty$ решение превращается в точечную особенность. При больших частотах зависимость ширины солитона от частоты $\Delta \approx 4L/\sqrt{|\omega|}$ такая же, как и в случае изотропного магнетика, для которого $\Delta \approx 4l/\sqrt{|\omega|}$.

Наконец, рассмотрим соотношение интегралов движения компактонов. Кроме энергии (1), принимающей в изинговском пределе вид

$$E = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(L^2 \left(\frac{dm}{dx} \right)^2 - (m^2 - 1) \right), \quad (24)$$

система обладает дополнительным интегралом движения — полным числом спиновых отклонений

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 - m). \quad (25)$$

Для компактона зависимость его энергии и числа связанных в нем магнонов от частоты описывается соответственно формулами

$$\begin{aligned} E &= \beta\pi L(1 - \omega^2), \quad \omega > 0, \\ E &= \beta L \left[(1 - \omega^2) \left(\pi - \arccos \frac{1 - |\omega|}{1 + |\omega|} \right) + 2(1 + |\omega|)\sqrt{|\omega|} \right], \\ &\quad \omega < 0 \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} N &= 2\pi L(1 - \omega), \quad \omega > 0, \\ N &= 2L(1 + |\omega|) \left[\pi - \arccos \frac{1 - |\omega|}{1 + |\omega|} - \frac{2\sqrt{|\omega|}}{1 + |\omega|} \right], \\ &\quad \omega < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из этих формул следует обычное для солитонных решений соотношение $dE/dN = \beta\omega$, и качественно зависимости $E = E(\omega)$ и $N = N(\omega)$ напоминают таковые для магнетиков с изотропным обменом [3]. Но в отличие от обычных солитонов в магнетиках с изотропным обменным взаимодействием, для которых величина N бесконечно возрастает при $\omega \rightarrow 0$, в данном случае $N(\omega = 0) = 2\pi L$ остается конечным (как и в случае магнетиков с двухосной одноионной анизотропией). Связь интегралов движения особенно просто выглядит для положительночастотных компактонов:

$$E = \beta N - \frac{\beta}{4\pi L} N^2. \quad (28)$$

Эта зависимость необычна и отличается от стандартного для малоамплитудных солитонов соотношения $E = \beta N - \alpha N^3$. Но квадратичные по числу N поправки к энергии характерны для ангармонического осциллятора. Таким образом, из-за своей необычной сильной локализации компактоны обладают некоторыми свойствами такого изолированного ангармонического осциллятора.

(Для отрицательночастотных солитонов из формул (26), (27) следует асимптотическая зависимость $E = E(N)$ при больших значениях $|\omega|$: $E \approx 14\beta L^2/N$, которая качественно согласуется с аналогичной асимптотикой для солитонов в магнетике с изотропным обменом: $E \propto \beta l^2/N$.)

3.2. Локализованные возбуждения в легкоосном XY-ферромагнетике

Рассмотрим другой предельный случай анизотропии обменного взаимодействия XY-типа, когда $L = 0$. При этом уравнение (16) упрощается:

$$l^2 m^2 \left(\frac{dm}{dx} \right)^2 = (1 - m)^2 [m^2 + 2m(1 - \tilde{\omega}) + (1 - 2\tilde{\omega} - (V/l)^2)] . \quad (29)$$

При малом отклонении параметров солитона от закона дисперсии линейных волн малоамплитудный солитон имеет стандартный вид:

$$m \approx 1 - [1 + (V/2l)^2] \frac{\xi}{2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{\xi}(x - Vt)/l)} , \quad (30)$$

где $\xi = 1 - (V/2l)^2 - \tilde{\omega}$. Но решение существенно перестраивается вблизи параболы $\tilde{\omega} = 1/2 - V^2/(2l^2)$, на которой величина m обращается в нуль в центре солитона. На этой линии функция $m(x)$ имеет особенность в нуле: $m(x) \approx [3|x| \sqrt{1 - \tilde{\omega}}/(\sqrt{2}l)]^{2/3}$, хотя величина Ψ остается гладкой: $1 - \Psi^2 \sim (|x|/l)^{4/3}$. Во всей области параметров $\tilde{\omega} < 1/2 - V^2/2l^2$ профиль солитонного

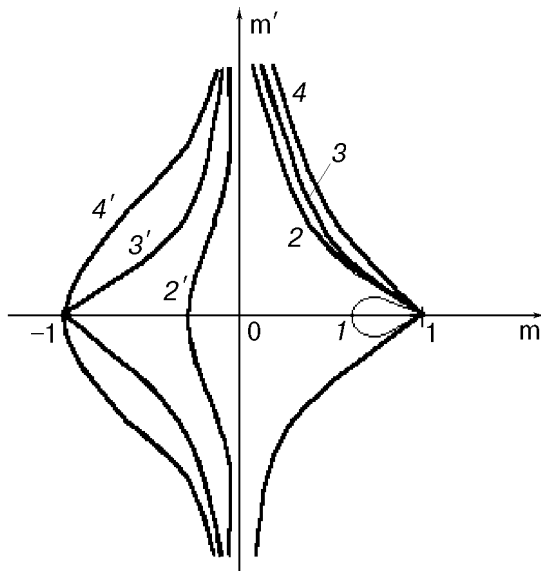


Рис. 3. Фазовые портреты динамических солитонов и доменных границ в легкоосном XY-ферромагнетике при $\tilde{\omega} > 1/2$ (кривая 1), $0 < \tilde{\omega} < 1/2$ (кривые 2, 2'), $\tilde{\omega} = 0$ (кривые 3, 3' для доменной стенки) и $\tilde{\omega} < 0$ (кривые 4, 4').

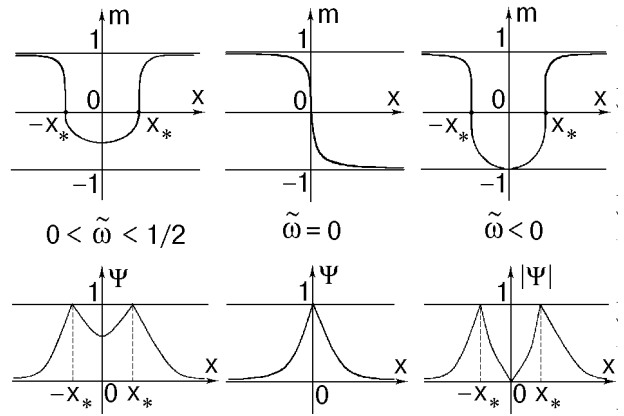


Рис. 4. Профили функций $m(x)$ и $\Psi(x)$ для доменной границы и динамических солитонов с различными частотами в легкоосном магнетике в XY-модели.

решения имеет особенности в точках $\pm x_*$, где величина m обращается в нуль: $m \approx \pm [2 \sqrt{2\tilde{\omega} - 1} |x - x_*|/l]^{1/2}$. При этом функция $\Psi(x)$ имеет в этих точках скачок производной: $\Psi \approx 1 - \sqrt{2\tilde{\omega} - 1} |x - x_*|/l$. Рассмотрим качественно это решение на линии ($V = 0$, $\tilde{\omega} < 1/2$), т.е. для неподвижных солитонов. Фазовый портрет системы изображен на рис. 3, где сепаратрисная петля 1 соответствует солитонному решению с $\tilde{\omega} > 1/2$, линиям 2, 2'; 3, 3'; 4, 4' — соответственно решения с $0 < \tilde{\omega} < 1/2$; $\tilde{\omega} = 0$; $\tilde{\omega} < 0$. Профиль функций $m(x)$ и $\Psi(x)$ изображен на рис. 4. На этом рисунке видно, что решение с $\tilde{\omega} = 0$ отвечает 180° доменной границе. Но в рассматриваемом случае профиль этой границы необычен. Уравнение (5) в этом пределе имеет следующую простую форму:

$$\sqrt{1 - \Psi^2} \left(l^2 \frac{d^2\Psi}{dx^2} - \Psi \right) = 0 . \quad (31)$$

Фазовый портрет этого уравнения для доменных границ представляет собой необычную сепаратрисную петлю в виде треугольника $\Psi' = \pm \Psi/l$, $\Psi = 1$. Такой фазовый портрет типичен для пиконных состояний (см. [18,19]). При этом решение имеет вид

$$\Psi(x) = \exp(-|x|/l) , \quad (32)$$

характерный для пикона. Как и в компактоне решение выражается через функцию (в данном случае экспоненту), обычно являющуюся решением линейного уравнения. Но в случае пикона нелинейность проявляется в том, что амплитуда решения не произвольна, а фиксирована. На рис. 4 видно, что солитонное решение общего вида с $\tilde{\omega} < 1/2$ представляет собой связанное со-

стояние двух пиконов (аналогично тому, как обычный магнитный солитон представляет собой связанное состояние двух доменных границ). Но в общем случае $\tilde{\omega} \neq 0$ решение не выражается в терминах экспоненциальных функций. Так, в пределе $|\tilde{\omega}| \gg 1$ в неявном виде солитонное решение представимо в виде

$$\text{Arth} \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sqrt{m+1} = \sqrt{|\tilde{\omega}|} \frac{x}{l}. \quad (33)$$

Из этой формулы следует, что решение является гладким в центре солитона, где $m = -1$, и имеет вертикальную касательную в точках $x_* = \pm l (\text{Arth} (1/\sqrt{2}) - \sqrt{2})/\sqrt{|\tilde{\omega}|}$, где $m = 0$.

4. Экзотические солитоны в легкоплоскостном ферромагнетике

4.1. Волны поворота намагниченности в легкоплоскостном изинговском магнетике

В легкоплоскостном ферромагнетике с анизотропным обменным взаимодействием динамика намагниченности описывается уравнениями (3), (4) с $\sigma = -1$, но решения для динамических солитонов не имеют столь простого вида (14), как в легкоосном случае, на что указывает явный вид решения (13) даже при изотропном обмене. Поэтому сразу рассмотрим предельный случай изинговского ферромагнетика с легкоплоскостной одноионной анизотропией. При $l = 0$ из уравнения (4) следует, что $\theta = \theta(x)$ и не зависит от времени. Это согласуется с выводом об отсутствии движущихся возбуждений, который следует из закона дисперсии линейных магнонов (11) в пределе $l = 0$. Более того, из уравнения (3) вытекает, что возможна лишь линейная зависимость от времени переменной ϕ , что не допускается в локализованных возбуждениях с фиксированной ориентацией намагниченности в легкой плоскости на бесконечности (при $x \rightarrow \pm\infty$).

Таким образом, в пределе изинговского магнетика возможен лишь один тип локализованных возбуждений — неподвижные волны поворота намагниченности. Но для этого типа возбуждений уравнение (3) решается и в общем случае произвольной анизотропии обменного взаимодействия. При $\phi = \text{const}$ после первого интегрирования имеем

$$L^2 \left(\frac{dm}{dx} \right)^2 = m^2 \frac{1 - m^2}{1 - m^2 + (l/L)^2 m^2}. \quad (34)$$

В изинговском пределе это уравнение сводится к тривиальному:

$$(1 - m^2) \left[L^2 \left(\frac{dm}{dx} \right)^2 - m^2 \right] = 0. \quad (35)$$

Фазовый портрет сепаратрисной петли на плоскости $(dm/dx, m)$ в этом случае вырождается в треугольник $L(dm/dx) = \pm m, m = 1$ (см. сплошную линию на рис. 5,а). Вновь, как и в случае компактонов в изинговском легкоосном магнетике, уравнение (35) представляет собой первый интеграл движения линейного уравнения (в квадратных скобках), но с множителем $1 - m^2$, кото-

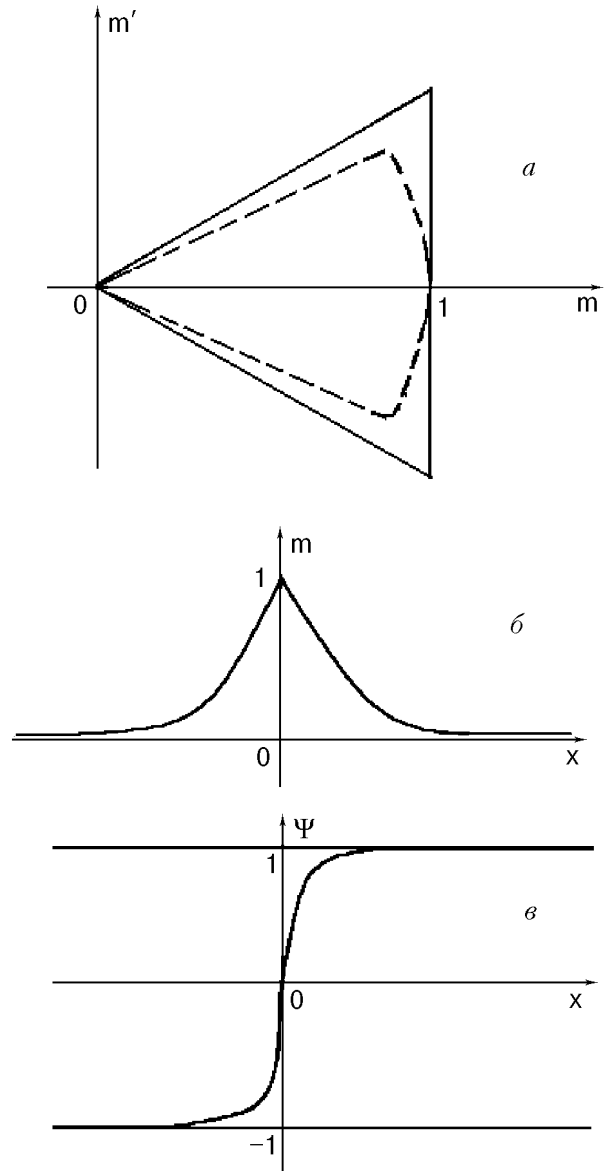


Рис. 5. Фазовый портрет (а) и профили координатной зависимости различных компонент намагниченности (б, в), соответствующие волне поворота намагниченности пиконного типа в легкоплоскостном изинговском ферромагнетике. Штриховая линия соответствует фазовому портрету локализованной волны при учете слабого обменного взаимодействия X- и Y-компонент спинов.

рый и определяет нелинейный характер решения. Оно выражается через экспоненциальные функции (как и в линейном уравнении)

$$m = \exp(-|x|/L), \quad (36)$$

но амплитуда решения фиксирована: $m(0) = 1$. Поскольку уравнение (35) допускает дополнительное решение $m \equiv 1$, становится возможной сшивка экспонент в центре волны поворота намагниченности.

Решение (36) имеет типичный вид экзотического солитона — «пикона» — и изображено на рис. 5,б. В отличие от волны поворота намагниченности в изотропном магнетике (12) с $m = 1/\text{ch}(x/l)$, ширина пикона зависит от магнитной длины L и он имеет «пик» в центре. Функция $\Psi(x)$ при этом определяется формулой $\Psi = \pm \sqrt{1 - \exp(-2|x|/L)}$ и в отличие от решения для изотропного магнетика $\Psi = \text{th}(x/l)$ имеет бесконечную производную в нуле (см. рис. 5,в). Хотя пиконное решение и имеет особенность в нуле, оно является пределом вполне аналитической функции. Из уравнения (34) видно, что при $l \neq 0$ отвечающая солитону сепаратрисная петля на фазовой плоскости является гладкой (пунктирная линия на рис. 5,а) и решение (34) записывается в аналитическом, хотя и в неявном виде:

$$\frac{x}{L} = \ln \left(\frac{1-G}{1+G} \right) - B \ln \left[\left(\frac{1}{G} - B \right)^2 (1-m^2) \right], \quad (37)$$

где $B = \sqrt{1 - l^2/L^2}$ и $G = \sqrt{(1-m^2)/(1-B^2m^2)}$.

Сравнение рис. 4 и рис. 5 показывает, что профили доменной границы в легкоосном ХУ-магнетике и волны поворота намагниченности в изинговском магнетике имеют одинаковый внешний вид при замене $l \leftrightarrow L$ и $\Psi \leftrightarrow m$. То есть существует определенная «инвариантность», связанная с одновременным изменением симметрии обменной и одноионной анизотропии.

4.2. Компактные волны поворота намагниченности в легкоплоскостном ХУ-магнетике

Рассмотрим случай легкоплоскостного ферромагнетика с обменной анизотропией ХУ-типа ($L = 0$). По-видимому, в этом пределе существуют динамические солитоны с $\tilde{\omega} < 0$, $V < l$ и волны поворота намагниченности с $\tilde{\omega} = 0$, $V < l$. Однако нам не удалось найти соответствующих решений даже в рамках упрощающего предположения о том, что, как и в изотропном случае, разворот вектора намагниченности происходит в

фиксированной плоскости для волны поворота и во вращающейся плоскости для солитона (см. решение (13)).

Исключением является предел неподвижной волны поворота намагниченности, для которой уравнение (5) приобретает тривиальный вид

$$m \left(l^2 \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \Psi \right) = 0, \quad (38)$$

отличающийся от формулы (31) знаком при Ψ .

Уравнение (38) имеет компактное решение

$$\begin{aligned} \Psi &= 1, & x > \pi l/2, \\ \Psi &= \sin \frac{x}{l}, & |x| < \pi l/2, \\ \Psi &= -1, & x < -\pi l/2. \end{aligned} \quad (39)$$

(В случае изотропного обменного взаимодействия соответствующее решение для волны поворота намагниченности имеет вид $\Psi = \text{th}(x/l)$.)

Таким образом, мы видим, что существует определенная симметрия свойств экзотических солитонов при одновременном изменении характера обменной и одноионной анизотропий. В изинговском легкоосном ферромагнетике существуют компактные доменные границы и динамические солитоны, а в ХУ-модели легкоплоскостного магнетика — компактные волны поворота намагниченности. С другой стороны, в изинговском легкоплоскостном магнетике существуют волны поворота намагниченности типа пикона и такие же пиконные доменные границы и динамические солитоны могут существовать в легкоосном ферромагнетике с обменной анизотропией ХУ-типа.

1. В. Е. Захаров, С. В. Минаков, С. П. Новиков, А. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
2. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
3. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
4. А. М. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
5. А. Achiva, *J. Phys. Soc. Jpn.* **27**, 561 (1969).
6. А. Г. Андерс, В. Г. Борисенко, С. В. Волоцкий, *ФНТ* **15**, 39 (1989).
7. М. И. Кобец, А. А. Степанов, А. И. Звягин, *ФНТ* **7**, 1473 (1981).
8. А. И. Звягин, М. И. Кобец, В. Н. Криворучко, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* **89**, 2298 (1985).
9. А. И. Звягин, В. Н. Криворучко, В. А. Пашенко, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* **92**, 311 (1987).
10. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, М. И. Кобец, *ФНТ* **14**, 550 (1988).
11. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, М. И. Кобец, *ФНТ* **14**, 1114 (1988).

12. М. М. Богдан, А. С. Ковалев, *ФНТ* **16**, 321 (1990).
13. А. Н. Гончарук, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ФТТ* **31**, 132 (1989).
14. М. В. Гвоздикова, А. С. Ковалев, Ю. С. Кившарь, *ФНТ* **24**, 635 (1998).
15. М. В. Гвоздикова, А. С. Ковалев, *ФНТ* **24**, 1077 (1998).
16. А. М. Пшисуха, А. И. Звягин, А. А. Степанов, *ФТТ* **13**, 3128 (1971).
17. А. М. Пшисуха, А. С. Черный, А. И. Звягин, *ФНТ* **1**, 473 (1975).
18. A. S. Kovalev, in: *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, and F. Pempinelli (eds.), World Scientific, Singapore (1997), p. 508.
19. А. С. Ковалев, М. В. Гвоздикова, *ФНТ* **24**, 641 (1998).
20. P. Rosenau and J. Numan, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 564 (1993).
21. P. Rosenau, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1737 (1994).
22. Yu. A. Kosevich, *Phys. Lett.* **A176**, 257 (1993).
23. Yu. A. Kosevich, *Phys. Rev.* **B47**, 3138 (1993).
24. J. Tjon and J. Wright, *Phys. Rev.* **B15**, 3470 (1977).

Exotic solitons in magnets with strongly anisotropic exchange interaction

A. S. Kovalev and M. V. Gvozdkova

Exotic magnetic solitons (compactons and peakons) in magnets with an extremely anisotropic exchange interaction are investigated in terms of the classic Ising and XY-models.