УДК 539.30

ПОБУДОВА РІВНЯННЯ ВПЛИВУ НАПРУЖЕНЬ НА МАГНЕТНУ ПРОНИКНІСТЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ВІЛЬНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

І. Б. ПРОКОПОВИЧ [1], *В. А. ОСАДЧУК* [2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*
[2] *Національний університет “Львівська політехніка”*

Для ізотропного матеріалу побудовано точне локальне рівняння впливу тензора напружень на тензор магнетної проникності. Встановлено, що в загальному випадку такий вплив визначають магнетострикційні властивості матеріалу і менше – залежність його пружності від прикладеного магнетного поля. Головні осі тензора напружень також є головними осями тензора проникності, але й кульова частина тензора проникності залежить від орієнтації головних осей напружень відносно магнетного поля. В припущенні слабкої магнетної залежності пружних властивостей записано спрощені вирази для тривісного і плоского напруженого станів.

Ключові слова: *магнетопружність, магнетна проникність, механічні напруження.*

Магнетопружний неруйнівний контроль напружень у сталевих виробах ґрунтується на їх електромагнетному впливі. Безпосереднє вимірювання напружень тут можливе лише за їх однорідного розподілу [1, 2]. Проте поля залишкових напружень неоднорідні, особливо поблизу зварних швів [3]. Для визначення неоднорідного розподілу кожної компоненти тензора напружень необхідно формулювати відповідну задачу комп’ютерної томографії, розв’язувальними рівняннями якої слугують рівняння локального впливу напружень на електромагнетне поле, зокрема на магнетну проникність чи сприйнятливість. Магнетопружні ефекти, включаючи вплив напружень на магнетне поле, відкриті ще в позаминулому столітті. Їх досліджують й досі через широке застосування в техніці [2, 4–8]. Часткові співвідношення, що пов’язують ефекти впливу напружень на магнетну проникність з магнетострикцією, будують на основі експериментальних даних, застосовуючи мікрофізичні міркування для “обґрунтування”. Такий підхід не строгий і не дає змоги оцінити всі чинники, що можуть впливати на точність отриманих співвідношень. Більше того, встановлено, що оцінка магнетопружних ефектів на основі атомарних уявлень призводить до помилкових результатів [9]. З іншого боку, континуальний підхід до побудови таких рівнянь у поліноміальному вигляді із використанням термодинамічних потенціалів також не дає належного результату, бо отримані вирази містять надто велику кількість невідомих констант, які практично неможливо визначити експериментально. Оскільки лінійні рівняння магнетопружності не враховують вплив напружень на проникність, то за вихідні необхідно брати нелінійні рівняння стану. Проте ці рівняння записані через тензор накопиченої повної деформації, неоднозначно пов’язаної з напруженнями. Зокрема, для залишкових напружень таку деформацію встановити, як правило, неможливо. Нижче запропоновано метод вільної деформації, який дає змогу обійти вказані труднощі і побудувати точне та фізично наочне рівняння магнетного впливу напружень у загальному випадку з урахуванням природної та наведеної анізотропії. Метод ґрунтується на відомому факті, що лежить в основі

Контактна особа: І. Б. ПРОКОПОВИЧ, e-mail: ihorprokopovych@yahoo.com

руйнівного контролю напружень: *незалежно від історії утворення напружень їх можна визначити за пов'язаною з ними пружною деформацією*. Згідно з цим підходом накопичену деформацію розбиваємо на дві частини – пружну, пов'язану з напруженнями, та вільну, незалежну від них. Прикладами вільної деформації різного походження є залишкова, пластична, температурна, п'єзоелектрична та магнетострикційна. В межах лінійної моделі метод вільної деформації застосовано у розв'язуванні задач визначення залишкових напружень у світлопроникних матеріалах, щоб досягти замкненої та коректної постанови оберненої задачі фотопружності в тонких оболонкових елементах конструкцій [10], змоделювати поля залишкових напружень в оптичних волокнах [11] та зварних конструкціях [3, 12]. Нелінійну модель вжито для обґрунтування та побудови розв'язувальних рівнянь задачі акустопружного визначення залишкових напружень [13, 14]. В обох випадках використано кінематичну модель, яка не враховує природу вільної деформації. Тут же необхідно застосувати фізичну нелінійну модель [15–18], що враховує магнетну природу зондувального сигналу.

Нехай $\mathsf{W} = \mathsf{W}(\mathbf{C},\mathbf{H})$ – потенціал стану магнетопружного матеріалу, наприклад питома магнетна ентальпія на одиницю маси. Тут вектор $\mathbf{H}$ – поточне значення напруженості магнетного поля, а тензор $\mathbf{C}$ – міра Коші накопиченої деформації з переходом тіла від початкового ненапруженого стану за відсутності магнетного поля ($\mathbf{H}=0$) до змінного поточного. Крім того, потенціал стану може залежати від поточних та початкових значень інших скалярних базисних параметрів стану, наприклад, температури. Для виведення рівняння впливу напружень на магнетну проникність це несуттєво. З потенціалу стану випливають такі рівняння стану для тензора напружень $\mathbf{T}$ та вектора магнетної індукції $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{T} = 2\rho\mathbf{F}^{\mathsf{T}} \cdot (\partial\mathsf{W}/\partial\mathbf{C}) \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = -\rho(\partial\mathsf{W}/\partial\mathbf{H}) = -\partial(\rho\mathsf{W})/\partial\mathbf{H}. \tag{1}$$

Тут ρ – поточна густина тіла. Несиметричний тензор другого рангу $\mathbf{F}$ – міра дисторсії (або правий тензор ґрадієнта деформації за поширеною термінологією [19]), що пов'язує між собою лінійні елементи $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}_0$ відповідно за поточного і початкового станів: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F}$. Індекс "$^{\mathsf{T}}$" означає транспонований тензор, а крапка – однократну згортку тензорів (що є звичайним скалярним добутком пари суміжних векторів з поліадного подання кожного з тензорів). Міра Коші накопиченої повної деформації пов'язана з мірою дисторсії так: $\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathsf{T}}$. Поточне значення густини $\rho = \rho_0 c^{-1}$, де $c \equiv \sqrt{\det\mathbf{C}}$, а $\rho_0 = \mathrm{const}$ – початкова густина.

Міра $\mathbf{C}$ не стосується дійсної деформації, накопиченої тілом під час виникнення напружень (наприклад, залишкової технологічної). Тут вона враховує лише пружну деформацію разом з деформацією, викликаною магнетним полем (магнетострикцією). Використовуючи підхід вільної деформації [15, 17, 18], перейдемо у співвідношенні (1) до міри пружної деформації $\hat{\mathbf{C}}$, пов'язаної з напруженнями співвідношенням пружності:

$$\mathbf{C} = \not{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \not{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{C}} = \not{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \left(\not{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Тут $\not{\mathbf{F}} = \not{\mathbf{F}}(\mathbf{H})$ – тензор вільної дисторсії, що характеризує зміну лінійних елементів $d\not{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}_0 \cdot \not{\mathbf{F}}$ вільного від напружень тіла внаслідок виникнення магнетного поля. З формул (2) випливають вирази для частинних похідних від міри повної деформації:

$$\partial\mathbf{C}/\partial\hat{\mathbf{C}} = \not{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \not{\mathbf{F}} : \mathbf{J}_{2s} = \mathbf{J}_s : \not{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \not{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \partial\hat{\mathbf{C}}/\partial\mathbf{C} = \not{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \not{\mathbf{F}}^{-1} : \mathbf{J}_{2s},$$

$$\partial \mathbf{C} / \partial \breve{\mathbf{F}} = 2\mathbf{J}_s \cdot \breve{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{C}}, \quad \partial \hat{\mathbf{C}} / \partial \breve{\mathbf{F}} = -2\mathbf{J}_s : \left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{I}_2\right) : \left(\breve{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{I}_2\right), \tag{3}$$

Тут і далі двокрапка означає подвійну тензорну згортку між тензорами рангу не нижче другого (така згортка є пара скалярних добутків між сусідніми базисними векторами з поліадних подань кожного з тензорів-операндів). Тензори $\mathbf{I}_2$ та $\mathbf{J}_s$ – ізотропні тензори четвертого рангу [15], які у довільному ортонормованому базисі $\mathbf{i}_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ мають такий вигляд:

$$\mathbf{I}_2 = \sum_{k,l=1}^{3} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \quad \mathbf{J}_s = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3} \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l\right). \tag{4}$$

Подвійна згортка довільного тензора другого рангу з цими тензорами відповідно транспонує та симетризує перший, наприклад,

$$\mathbf{F}^{\mathsf{T}} = \mathbf{F} : \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2 : \mathbf{F}, \quad (\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathsf{T}}) / 2 = \mathbf{F} : \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s : \mathbf{F}.$$

Ці властивості використано під час виведення формул (4) і застосовано нижче. Похідна тензора вільної дисторсії має вигляд

$$\partial \breve{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H} = \breve{\mathbf{F}} \cdot \breve{\mathbf{\Omega}} \quad \Rightarrow \quad \breve{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{H}) \equiv \breve{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \partial \breve{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H}, \tag{5}$$

де тензор третього рангу $\breve{\mathbf{\Omega}}$ описує безмежно малу вільну дисторсію, викликану збуренням магнетного поля. Його симетрична частина $\breve{\mathbf{\Omega}}_{sym} \equiv \mathbf{J}_s : \breve{\mathbf{\Omega}}$ характеризує безмежно малу вільну деформацію.

Разом із заміною повної деформації на пружну у рівняннях стану перейдемо від потенціалу стану до суми потенціалу вільного стану $\breve{\mathsf{W}}(\mathbf{H}) \equiv \mathsf{W}(\breve{\mathbf{C}}(\mathbf{H}), \mathbf{H})$ та потенціалу пружності $\Pi(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{H}) \equiv \mathsf{W}(\breve{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \breve{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}}, \mathbf{H}) - \breve{\mathsf{W}}(\mathbf{H})$ [15, 17, 18], значення якого дорівнює віднесеній до маси накопиченій енергії пружної деформації:

$$\mathsf{W} = \breve{\mathsf{W}}(\mathbf{H}) + \Pi(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{H}). \tag{6}$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1) для напружень і враховуючи формули для частинних похідних (4), отримаємо:

$$\mathbf{T} = 2\rho \hat{\mathbf{V}} \cdot (\partial \Pi / \partial \hat{\mathbf{C}}) \cdot \hat{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{B} = \hat{c}^{-1} \breve{\mathbf{B}}(\mathbf{H}) + \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{H}). \tag{7}$$

Тут $\hat{c} = \det \hat{\mathbf{V}} = \sqrt{\det \hat{\mathbf{C}}}$ – міра об’ємної накопиченої пружної деформації, $\hat{\mathbf{V}}$ – міра накопиченої пружної деформації, така, що $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}}$;

$$\breve{\mathbf{B}} = -\breve{\rho} \partial \breve{\mathsf{W}} / \partial \mathbf{H} = -\left[\partial(\rho \mathsf{W}) / \partial \mathbf{H}\right]\Big|_{\mathbf{C} = \breve{\mathbf{C}}(\mathbf{H})} \tag{8}$$

– індукція ненапруженого матеріалу, де

$$\breve{\rho}(\mathbf{H}) = \rho\big|_{\mathbf{C} = \breve{\mathbf{C}}(\mathbf{H})} = \rho_0 \breve{c}^{-1} = \rho \hat{c} \tag{9}$$

– його густина. Тут $\breve{c} = \sqrt{\det \breve{\mathbf{C}}}$ – міра накопиченої об’ємної вільної деформації. Другий доданок у виразі для індукції (7) характеризує п’єзоіндукцію, зумовлену напруженнями та пружною деформацією. Згідно із виразами частинних похідних (4) він має такий вигляд:

$$\hat{\mathbf{B}} = -\rho\left(\partial \Pi / \partial \mathbf{H} + (\partial \Pi / \partial \hat{\mathbf{C}}) : (\partial \hat{\mathbf{C}} / \partial \breve{\mathbf{F}}) : \mathbf{I}_2 : \partial \breve{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H}\right) = \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{V}}^{-1} : \breve{\mathbf{\Omega}} - \rho\left(\partial \Pi / \partial \mathbf{H}\right). \tag{10}$$

Ця формула на відміну від конститутивного рівняння (1) не залежить від жодного початкового стану. Її перший член явно залежить від тензора напружень. У межах точності теорії малих деформацій $\hat{\mathbf{V}} \approx \mathbf{I}$, а тому перший член має перший порядок малості відносно тензора накопиченої пружної деформації $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{V}} - \mathbf{I}$. Другий член характеризує залежність пружних властивостей матеріалу від магнетного поля і має другий порядок малості відносно тензора $\hat{\mathbf{E}}$. Тому його можна знехтувати за умови, що пружні властивості тіла слабо залежать від магнетного поля. Тоді в наближеному вигляді п'єзоіндукція пропорційна до тензора напружень:

$$\hat{\mathbf{B}} \approx \mathbf{T} : \overset{\#}{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{H}) . \tag{11}$$

Коефіцієнтом пропорційності слугує модуль безмежно малої магнетної деформації, що не залежить від напруженого стану. Для подальшого уточнення формул (10) та (11) розпишемо залежність $\overset{\#}{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{H})$, спираючись на відповідні результати для вільної деформації, зумовленої електричним чи магнетним полями [16]:

$$\overset{\#}{\mathbf{F}}(\mathbf{H}) = \lambda \mathbf{I} + (\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda)\mathbf{hh} , \tag{12}$$

де $\mathbf{h} = \mathbf{H} / |\mathbf{H}|$ – одиничний вектор у напрямку $\mathbf{H}$. Коефіцієнти $\lambda_{\mathbf{h}}, \lambda > 0$ – відносні довжини лінійних елементів відповідно вздовж та поперек напрямку вектора магнетної напруженості. Вони задовольняють початкову умову $\lambda_{\mathbf{h}}, \lambda|_{\mathbf{H}=0} = 1$. З рівняння (12) випливає такий вираз для оберненої вільної дисторсії:

$$\overset{\#}{\mathbf{F}}{}^{-1}(\mathbf{H}) = \lambda^{-1}\mathbf{I} + (\lambda_{\mathbf{h}}^{-1} - \lambda^{-1})\mathbf{hh} . \tag{13}$$

Враховуючи, що $\partial(\mathbf{hh}) / \partial \mathbf{H} = 2 |\mathbf{H}|^{-1} \left(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h} - \mathbf{hhh} \right)$, з рівняння вільної дисторсії (12) отримаємо такий вираз для похідної по вектору магнетної напруженості:

$$\partial \overset{\#}{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H} = 2\mathbf{H}^{-1}(\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda)(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h} - \mathbf{hhh}) + \left[\lambda' \mathbf{I} + (\lambda'_{\mathbf{h}} - \lambda')\mathbf{hh} \right] \mathbf{h} . \tag{14}$$

Підставимо його разом з рівнянням оберненої дисторсії (13) у формулу (5):

$$\overset{\#}{\boldsymbol{\Omega}} = \lambda^{-1}(\partial \overset{\#}{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H}) + (\lambda_{\mathbf{h}}^{-1} - \lambda^{-1})\mathbf{h} \Big[|\mathbf{H}|^{-1} (\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{hh}) + \lambda'_{\mathbf{h}}\mathbf{hh} \Big] . \tag{15}$$

Цей вираз підставимо у формулу (11):

$$\mathbf{T} : \overset{\#}{\boldsymbol{\Omega}} = \lambda^{-1}\mathbf{T} : (\partial \overset{\#}{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H}) + (\lambda_{\mathbf{h}}^{-1} - \lambda^{-1}) \Big[\underline{(\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda) |\mathbf{H}|^{-1} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{h} - \sigma_{\mathbf{h}}\mathbf{h})} + \underline{\underline{\lambda'_{\mathbf{h}}\sigma_{\mathbf{h}}}} \Big], \tag{16}$$

де $\sigma_{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}$ – нормальне напруження в перерізі з нормаллю $\mathbf{h}$. Розпишемо перший доданок, застосовуючи вираз (14):

$$\mathbf{T} : (\partial \overset{\#}{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{H}) = \underline{2(\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda) |\mathbf{H}|^{-1} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{h} - \sigma_{\mathbf{h}}\mathbf{h})} + 3\lambda'\sigma_0 + \underline{\underline{(\lambda'_{\mathbf{h}} - \lambda')\sigma_{\mathbf{h}}}} , \tag{17}$$

де $\sigma_0 = \mathbf{T} : \mathbf{I} / 3$ – всебічний розтяг, перший інваріант тензора напружень. Зводячи подібні (однаково підкреслені) члени у формулах (16), (17), отримаємо вираз для добутку напружень та модуля вільної деформації

$$\mathbf{T} : \overset{\#}{\boldsymbol{\Omega}} = (3\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_{\mathbf{h}})\mathbf{h} + \gamma \mathbf{T} \cdot \mathbf{h} , \tag{18}$$

де скалярні коефіцієнти

$$\begin{gathered} \alpha(|\mathbf{H}|) = \lambda^{-1}\lambda' = \left(\ln \lambda \right)', \quad \gamma(h) = (\lambda^{-1} + \lambda_{\mathbf{h}}^{-1})(\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda), \\ \beta(|\mathbf{H}|) = \lambda_{\mathbf{h}}^{-1}\lambda'_{\mathbf{h}} - \lambda^{-1}\lambda' - \gamma(h) = \left[\ln\left(\lambda_{\mathbf{h}} / \lambda \right) \right]' - \gamma(h). \end{gathered} \tag{19}$$

Якщо в межах точності $\lambda \approx \lambda_{\mathbf{h}} \approx 1$ (мала магнетострикція), то вирази (19) спрощуються: $\alpha \approx \lambda'$, $\beta \approx \lambda'_{\mathbf{h}} - \lambda' - \gamma$, $\gamma \approx 2(\lambda_{\mathbf{h}} - \lambda)$. Запишемо праву частину виразу для п'єзоіндукції (18) у вигляді добутку тензора п'єзосприйнятливості та вектора напруженості:

$$\hat{\mathbf{B}} \approx \hat{\chi}(\mathbf{T}, \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} . \tag{20}$$

Тут $\hat{\chi}$ – симетричний тензор другого рангу, залежний від тензора напружень та вектора напруженості:

$$\hat{\chi}(\mathbf{T}, \mathbf{H}) = \left[(3\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_{\mathbf{h}})\mathbf{I} + \gamma \mathbf{T} \right] / |\mathbf{H}| . \tag{21}$$

Розіб'ємо це співвідношення на кульову та девіаторну частини:

$$\hat{\chi} : \mathbf{I} = \left[(3\alpha + \gamma)\sigma_0 + \beta\sigma_{\mathbf{h}}\right] / |\,\mathbf{H}\,|, \quad \operatorname{Dev}\hat{\chi} = \gamma \operatorname{Dev}\mathbf{T} / |\,\mathbf{H}\,|. \tag{22}$$

Як бачимо, головні напрямки п'єзосприйнятливості, а отже, і напрямки поляризації електромагнетної хвилі в ізотропному провіднику збігаються з головними напрямками тензора напружень. Власне на цьому факті ґрунтується визначення різниці між головними значеннями тензора напружень у сталевих виробах. Коефіцієнт пропорційності між девіаторами тензорів п'єзосприйнятливості та напружень у свою чергу пропорційний до різниці між поздовжнім та поперечним ефективними модулями магнетострикції. Якщо обидва модулі однакові, то $\beta = \gamma = 0$ і п'єзосприйнятливість – кульовий тензор.

Розглянемо випадок, коли вектор індукції спрямований вздовж головного напрямку тензора напружень. Тоді компонента $\sigma_{\mathbf{h}}$ є головне значення тензора напружень і $\mathbf{T} \cdot \mathbf{h} = \sigma_{\mathbf{h}}\mathbf{h}$. З формул (18) і (19) отримаємо:

$$\mathbf{T} : \mathbf{\Omega} = \left[3\alpha\sigma_0 + (\beta + \gamma)\sigma_{\mathbf{h}}\right]\mathbf{h} = \left\{3\left(\ln\lambda\right)'\sigma_0 + \left[\ln\left(\lambda_{\mathbf{h}} / \lambda\right)\right]'\sigma_{\mathbf{h}}\right\}\mathbf{h}.$$

Відповідно, замість співвідношення (20) матимемо:

$$\hat{\mathbf{B}} \approx \hat{\chi}(\sigma_0, \sigma_{\mathbf{h}}, |\,\mathbf{H}\,|)\mathbf{H}, \tag{23}$$

де

$$\hat{\chi}(\sigma_0, \sigma_{\mathbf{h}}, |\,\mathbf{H}\,|) = |\,\mathbf{H}\,|^{-1}\left\{3\left(\ln\lambda\right)'\sigma_0 + \left[\ln\left(\lambda_{\mathbf{h}} / \lambda\right)\right]'\sigma_{\mathbf{h}}\right\}. \tag{24}$$

– скалярна п'єзосприйнятливість.

За допомогою анізотропних магнетопружних перетворювачів вимірюють середню різницю між головними значеннями тензора напружень за плоского напруженого стану. Тоді вектор магнетної напруженості орієнтують вздовж головних напрямків тензора напружень. З формул (23), (24) виводимо вираз, що пов'язує різницю між головними значеннями напружень з різницею між парою векторів п'єзоіндукції, спрямованих вздовж відповідних головних напрямків тензора напружень:

$$\hat{B}_1 - \hat{B}_2 \approx H^{-1}\left[\ln\left(\lambda_{\mathbf{h}} / \lambda\right)\right]'(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{25}$$

де $H = |\,\mathbf{H}_1\,| = |\,\mathbf{H}_2\,|$ – магнетне поле прикладеного вздовж головних напрямків тензора напружень. Ця формула стосується тривісного напруженого стану, і зокрема, плоского. Згідно з другим рівнянням (7), права частина (25) дорівнює різниці між відповідними значеннями індукції загалом. Ця рівність стає точною, коли пружні властивості матеріалу не залежать від прикладеного поля.

РЕЗЮМЕ. Для изотропного материала построено точное локальное уравнение влияния тензора напряжений на тензор магнитной проницаемости. Установлено, что в общем случае такое влияние определяется магнитострикционными свойствами материала и в меньшей мере – зависимостью его упругости от приложенного магнитного поля. Главные оси тензора напряжений являются также главными осями тензора проницаемости, а шаровая часть тензора проницаемости зависит от ориентации главных осей напряжений относительно магнитного поля. В предположении слабой магнитной зависимости упругих свойств записаны упрощенные выражения для трехосного и плоского напряженного состояния.

SUMMARY. In an isotropic material, the accurate local equation is constructed for a stress tensor effect on magnetic permeability tensor. In general case the effect is determined by magnetostrictive properties mainly and in the less degree – by magnetic field effect on elastic properties. The principal axes of stresses are the principal axes of permeability too. The

spherical part of the permeability tensor depends on the axes orientation in the magnetic field. In the assumption of weak magnetic effect on elasticity properties, the simplified expressions are written for three-axial and also plane stress state.

1. *Экспериментальные* методы исследования деформаций и напряжений / Б. С. Касаткин, А. Б. Кудрин, Л. М. Лобанов и др. – К.: Наук. думка, 1981. – 584 с.
2. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. *Кир'ян В. І, Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
4. *Тикадзуми С.* Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические приложения. – М.: Мир, 1987. – 419 с.
5. *The magnetoelastic* Villari effect in $Fe_{25}Ni_{55}Si_{10}B_{10}$ amorphous alloy subjected to thermal treatment / A. Bieńkowski, R. Szewczyk, J. Salach, and A. Kolano-Burian // Rev. Adv. Matter. Sci. – 2008. – № 18. – P. 561–564.
6. *Modern* trends in magnetostriction study and application. Edited by M. R. J. Gibbs. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Kyiv, Ukraine, 22 May–2 June 2000 / NATO Science Series. II. Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 5. – Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 2001. – 349 p.
7. *Tremolet de Lacheisserie, Etienne du.* Magnetostriction: Theory and Applications of Magnetoelasticity. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1993. – 408 p.
8. *Tremolet de Lacheisserie E., Gignoux D., and Schlenker M.* Magnetism: Fundamentals. – New York: Springer, 2005. – 507 p.
9. *Magnetoelasticity* of Fe: Possible failure of ab initio electron theory with the local-spin-density approximation and with the generalized-gradient approximation / M. Fähnle, M. Komelj, R. Q. Wu, and G. Y. Guo // Phys. Rev. B. – 2002. – 65.14. – P. 144436-1–144436-5.
10. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 296 с.
11. *Кушнір Р. М., Прокопович І. Б.* Розрахунок температурних залишкових напружень в оптичних волокнах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1991. – № 34. – С. 79–83.
12. *Дислокаційне* моделювання концентраторів зварних залишкових напружень в тонкостінних елементах конструкцій / В. А. Осадчук, І. Б. Прокопович, В. Ф. Чекурін, Л. М. Сеньків // Там же. – 2005. – **48**, № 1. – С. 130–134.
13. *Осадчук В. А., Прокопович І. Б., Кравчишин О. З.* Лінеаризовані рівняння поширення пружних збурень у тілі з вільними деформаціями // Там же. – 1997. – **40**, № 2. – С. 76–82.
14. *Прокопович І. Б.* Нелінійний опис власних напружень, зумовлених вільними деформаціями // Доп. НАН України, сер. Математика. – 1995. – № 12. – С. 49–51.
15. *Прокопович І. Б.* Загальні вирази для опису впливу напружень на діелектричну або магнетну проникність // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – № 4. – С. 77–85.

    (*Prokopovych I. B.* General Expressions for the Description of the Influence of Stresses on Dielectric Permittivity or Magnetic Permeability // Materials Science. – 2005. – № 4. – P. 520–530.)
16. *Прокопович І. Б.* Визначальне рівняння електричної або магнетної деформації в ізотропному матеріалі // Там же. – 2005. – № 6. – С. 37–41.

    (*Prokopovych I. B.* Determining Equation of Electric or Magnetic Deformation in Isotropic Materials // Materials Science. – 2005. – № 4. – P. 749–754.)
17. *Прокопович І. Б.* Вирази для ефективної діелектричної проникності напруженого ізотропного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 113–118.
18. *Прокопович І. Б.* Принципи незалежності в рівняннях стану деформівного матеріалу // Там же. – 2009. – **52**, №3. – С. 53–64.
19. *Truesdell C. and Noll W.* The Non-linear Field Theories of Mechanics, 3rd edition. – Berlin – Heidelberg: Springer, 2004. – 602 p.

Одержано 27.11.2009