УДК 539.3

УМОВИ СТРИБКА НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ НА ТОНКОМУ В'ЯЗКОПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ

В. П. СИЛОВАНЮК, А. В. РЕВЕНКО

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

У тривимірному формулюванні отримані умови, яким задовольняють компоненти вектора переміщень і тензора напружень у включенні із в'язкопружного матеріалу. Для тонкого включення на основі рівнянь лінійної теорії в'язкопружності одержані залежності зведено до співвідношень між стрибками переміщень і напружень на його серединній поверхні.

Ключові слова: *включення, в'язкопружність, напруження, переміщення, релаксація, умови стрибка.*

Включення, один із характерних розмірів якого значно менший від двох інших, часто з різним наближенням моделюють поверхнею, за переходу через яку напруження і (або) переміщення зазнають стрибків.

Першими в цьому напрямі були праці Я. С. Підстригача, які торкалися теплопровідності тіл з тонкими прошарками [1, 2]. Пізніше цей підхід він поширив на загальний напружено-деформований стан пружних тіл з тонкими пружними включеннями [3]. Аналізуючи напружено-деформований стан тіл з тонкими включеннями, застосовували інші, більш наближені, моделі тонких дефектів однорідної структури [4–7], що дало можливість отримати ефективні розв'язки задач про концентрацію напружень. Моделі пружних тонких включень, методи розв'язування відповідних крайових задач та напружено-деформований стан проаналізовано в монографії [8].

У матеріалознавстві та інженерній практиці виникають проблеми, для розв'язування яких недостатньо лише моделей пружних середовищ. Зокрема, це пов'язано із розрахунком довготривалої міцності пошкоджених тріщинами елементів будівельних споруд тривалої експлуатації, що відновлені за ін'єкційними технологіями. Як ін'єкційні матеріали найчастіше використовують полімери (поліуретани, епоксидні смоли тощо), які володіють після тверднення в'язкопружними властивостями. Тому необхідні моделі, які б враховували зміну властивостей матеріалів з часом, зокрема реологічні. Для прогнозування в часі ресурсу роботоздатності елемента конструкції із заповненою ін'єкційним матеріалом тріщиною слід застосовувати в'язкопружну модель тонкого включення.

Нижче отримано умови стрибка напружень і переміщень на тонкому включенні із в'язкопружного матеріалу. Для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкції із багатьох в'язкопружних матеріалів (в тому числі і полімерів) застосовують лінійну теорію в'язкопружності, один із варіантів якої базується на принципі Больцмана [9]. Основні її рівняння складаються із трьох рівнянь рівноваги (інерційні члени в рівняннях руху не враховують)

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0 \quad (1)$$

Контактна особа: А. В. РЕВЕНКО, e-mail: andrevenko@ukr.net

і шести реологічних рівнянь ізотропного в'язкопружного тіла

$$\sigma_{xx} = \left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial \mathrm{u_x}}{\partial \mathrm{x}} + \Lambda^*\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{yy} = \left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial \mathrm{u_y}}{\partial \mathrm{y}} + \Lambda^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{yy} = \left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial \mathrm{u_y}}{\partial \mathrm{y}} + \Lambda^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{zz} = \left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial \mathrm{z}} + \Lambda^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{xz} = \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad \sigma_{yz} = \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \quad \sigma_{xy} = \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad (2)$$

де Λ^* і M^* – інтегральні оператори

$$\Lambda^* f(t) = \lambda\left(f(t) + \int_{t_0}^{t} \Lambda(t-\tau) f(\tau)\,d\tau\right),$$
$$\mathrm{M}^* f(t) = \mu\left(f(t) + \int_{t_0}^{t} M(t-\tau) f(\tau)\,d\tau\right), \quad (3)$$

Λ, M – ядра операторів. Тут вважаємо, що зовнішні навантаження починають діяти з моменту часу $t = t_0$; λ, μ – пружні сталі Ляме миттєвої деформації. Функції $\Lambda(t)$, $\mathrm{M}(t)$ описують релаксацію напружень з часом і коли $t \to \infty$, асимптотично прямують до нуля. Оскільки в них аргументом є різниця $t - \tau \geq 0$, то напруження, встановлені на основі виразів (2), будуть інваріантні до зміни початку відліку часу.

Нехай у пружному твердому тілі міститься тонке плоске включення товщиною $2h(x, y)$, напружено-деформований стан якого описує лінійна теорія в'язкопружності (співвідношення (1)–(3)). Систему прямокутних декартових координат x, y, z вибираємо так, щоб площина $x0y$ збігалася зі серединною площиною включення. У співвідношеннях (1), (2) виключимо із розгляду компоненти тензора напружень σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}. Для визначення трьох компонент переміщень u_x, u_y, u_z і трьох компонент напружень σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} маємо шість рівнянь:

$$\left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \Lambda^*\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}\right) + \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \Lambda^*\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z}\right) + \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{yz} = \mathrm{M}^*\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \quad \sigma_{zz} = \left(\Lambda^* + 2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \Lambda^*\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right). \quad (4)$$

Застосувавши до рівнянь (4) операцію усереднення по товщині включення, одержимо:

$$\left(\Lambda^*+2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial^2(u_x)}{\partial x^2}+\Lambda^*\left(\frac{\partial^2(u_y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{[u_z]}{h}\right)+\mathrm{M}^*\left(\frac{\partial^2(u_x)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(u_y)}{\partial x\partial y}\right)+\frac{[\sigma_{xz}]}{h}=0,$$

$$\left(\Lambda^*+2\mathrm{M}^*\right)\frac{\partial^2(u_y)}{\partial y^2}+\Lambda^*\left(\frac{\partial^2(u_x)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{[u_z]}{h}\right)+\mathrm{M}^*\left(\frac{\partial^2(u_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u_x)}{\partial x\partial y}\right)+\frac{[\sigma_{yz}]}{h}=0,$$

$$\frac{\partial\left(\sigma_{xz}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\sigma_{yz}\right)}{\partial y}+\frac{\left[\sigma_{zz}\right]}{h}=0\,,$$

$$\left(\sigma_{xz}\right)-\mathrm{M}^*\left(\frac{\left[u_x\right]}{h}+\frac{\partial\left(u_z\right)}{\partial x}\right)=0\,,$$

$$\left(\sigma_{yz}\right)-\mathrm{M}^*\left(\frac{\left[u_y\right]}{h}+\frac{\partial\left(u_z\right)}{\partial y}\right)=0\,,$$

$$\left(\sigma_{zz}\right)-\left(\Lambda^*+2\mathrm{M}^*\right)\frac{\left[u_z\right]}{h}-\Lambda^*\left(\frac{\partial\left(u_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u_y\right)}{\partial y}\right)=0\,, \tag{5}$$

де $\left(f\right)=f^++f^-$; $\left[f\right]=f^+-f^-$. Знаки (+) і (–) відносяться до верхньої та нижньої (відносно серединної площини) поверхонь включення.

Отже, вплив в'язкопружного тонкого включення у тілі описують умови (5), які виконуються на поверхні контакту матеріалів. Це дає можливість умовно вилучити включення та замінити його дію напруженнями $\sigma^{\pm}_{xz}$, $\sigma^{\pm}_{yz}$, $\sigma^{\pm}_{zz}$ на поверхні утвореної порожнини, які невідомі і зв'язані з переміщеннями поверхні порожнини u_x, u_y, u_z співвідношеннями (5).

Із умов (5) легко отримати часткові граничні випадки. Зокрема, поклавши у співвідношеннях (3) $\lambda=0$, $\mu=0$ із (5), отримаємо умови на вільній поверхні:

$$\sigma^+_{xz}=\sigma^-_{xz}=0\,;\quad \sigma^+_{yz}=\sigma^-_{yz}=0\,;\quad \sigma^+_{zz}=\sigma^-_{zz}=0\,.$$

Умови ідеального контакту (за відсутності включення) одержимо, якщо у співвідношеннях (5) вважатимемо, що товщина включення $h\to 0$:

$$\sigma^+_{xz}=\sigma^-_{xz},\quad \sigma^+_{yz}=\sigma^-_{yz},\quad \sigma^+_{zz}=\sigma^-_{zz};$$

$$u^+_x=u^-_x,\quad u^+_y=u^-_y,\quad u^+_z=u^-_z.$$

Модель податливого в'язкопружного включення отримаємо, якщо знехтуємо стрибки напружень та величини вищого порядку малості у співвідношеннях (5):

$$\left(\sigma_{xz}\right)=\mathrm{M}^*\frac{\left[u_x\right]}{h},\quad \left(\sigma_{yz}\right)=\mathrm{M}^*\frac{\left[u_y\right]}{h},\quad \left(\sigma_{zz}\right)=\left(\Lambda^*+2\mathrm{M}^*\right)\frac{\left[u_z\right]}{h}\,. \tag{6}$$

Зазначимо, що на основі співвідношень (6) розрахували [10] довготривалу міцність тіла з еліптичною тріщиною, заповненою в'язкопружним матеріалом. Якщо покласти у співвідношеннях (5) ядра релаксації $\Lambda(t)$ і $\mathrm{M}(t)$ тотожно рівними нулю, одержимо відповідні результати для лінійно-пружного включення.

ВИСНОВКИ

Повзучість в'язкопружного матеріалу включення суттєво впливає на напружено-деформований стан у тілі, яке перебуває під дією довготривалих статичних навантажень, через що під час дослідження релаксації напружень у включенні слід застосувати теорію в'язкопружності. На основі рівнянь лінійної в'язкопружності розроблено математичний підхід, за яким вдається замінити крайову задачу для тіла з тонким в'язкопружним включенням на задачу для тіла з розрізом, на поверхнях якого виконуються певні умови стрибків переміщень і напружень, а отже отримувати ефективні розв'язки складних крайових задач лінійної теорії пружності та в'язкопружності.

РЕЗЮМЕ. В трехмерной постановке получены условия, которым удовлетворяют компоненты вектора смещений и тензора напряжений во включении из вязкоупругого материала. Для тонкого включения на основании уравнений линейной теории вязкоупругости полученные зависимости сведены к соотношениям на прыжки напряжений и перемещений на его срединной поверхности.

SUMMARY. The conditions which satisfy the components of the displacement vector and the stress tensor in the inclusion of a viscoelastic material are obtained in the three-dimensional formulation. For a thin inclusion, based on the equations of the linear theory of viscoelasticity, the dependences are reduced to relations for the jumps of stresses and displacement in its middle surface.

1. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
2. *Подстригач Я. С.* Температурные поля в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – **7**, № 10. – С. 76–83.
3. *Підстригач Я. С.* Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
4. *Чабанян К. Р., Хачиканян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН Арм. ССР. – 1967. – № 6. – С. 19–29.
5. *Сокилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи однородной теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1975. – **38**, № 3. – С. 537–550.
6. *Сулим Г. Т.* Термоупругие условия взаимодействия среды с тонкостенным включением // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1979. – № 15. – С. 83–92.
7. *Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
8. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. *Boltzmann L.* Zuz Teorie elastischen Nachuirkung Silzungsler // Bayer. acad. Wiss. math.-naturuiss. – 1874. – **70**, № 2. – S. 315–325.
10. *Силованюк В. П., Ревенко А. В.* Довготривала міцність пружного тіла з еліптичною тріщиною, заповненою в'язкопружним матеріалом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 1. – С. 33–38.

   (*Sylovanyuk V. P., Revenko A. V.* Long-term strength of an elastic body with elliptic crack filled with a viscoelastic material // Materials Science. – 2012. – **48**, № 1. – P. 29–35.)

Одержано 13.07.2012