

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТІЛ З ТЕРМІЧНИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ТА ТРІЩИНАМИ (ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ)

Г. С. КИТ, М. С. ЧЕРНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

З використанням термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері визначено напруження у безмежній та півбезмежній площинах з круговими термічними включеннями (коефіцієнти лінійного теплового розширення яких відрізняються від матричних) за рівномірного нагріву. Досліджено концентрацію напружень, коли включення розташовані поблизу межі півплощини. Одержано аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі прямолінійної тріщини, розміщеної між двома однаковими включеннями.

Ключові слова: *півбезмежне тіло, циліндричні включення, температурні напруження, прямолінійна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

Міцність і руйнування крихких тіл за нагріву значно залежить від наявності в них включень та тріщин, в околі яких зростають температурні напруження. Реальні композитні тіла містять систему включень, які вводять, щоб створити нові властивості матеріалів або досягти їх певної комбінації, непридатної кожному з них. Руйнування таких тіл (композитів) визначає концентраційна взаємодія включень між собою і з матрицею, ускладнена початковими технологічними напруженнями, зумовленими температурним натягом.

Розподіл температури та напружень у тілі з включеннями залежить від багатьох факторів, зокрема механічних і теплофізичних характеристик матеріалів включень і матриці. Якщо включення розташовані близько одне від одного, то температурні поля і напруження взаємодіють, внаслідок чого виникають труднощі під час аналізу напруженого стану. Ця ситуація ускладнюється ще більше через велику кількість параметрів, які необхідно враховувати у розрахунках: модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення матеріалів, геометричні характеристики включень. Врахування всіх цих факторів ускладнює розв'язання задач термопружності. Але у разі однакових механічних характеристик матеріалів включень і матриці, беручи до уваги тільки різні коефіцієнти лінійного теплового розширення (КЛТР), можна одержати точний розв'язок і зробити певні висновки про розподіл напружень у тілі. Включення, які мають однакові з тілом пружні властивості, але різні КЛТР, за термінологією праці [7] називають термічними.

Дослідженню стаціонарного термопружного стану кусково-однорідних тіл з тріщинами присвячено низку публікацій. При цьому з використанням інтегральних подань функцій комплексної змінної задачі зводили до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші та регулярним ядром, яке враховує взаємодію тріщини з включенням. Сингулярні інтегральні рівняння записували по замкнутих (межі включень) та розімкнутих (тріщини) контурах [1–6, 9–11] і розв'язували методом механічних квадратур для круглого або еліптич-

ного циліндричних включень і прямолінійної тріщини за певних значень механічних і теплофізичних характеристик.

Напружений стан площини з включеннями. Розглянемо безмежну площину, в якій міститься N кругових термічних включень радіусів a_n ($n = \overline{1, N}$). Пружні властивості включень і матриці однакові, а КЛТР різні: включень – α_i , а матриці – α_m . Композит нагрівається до сталої температури T_0 .

У декартовій системі координат xOy центри включень позначимо через x_n і y_n . Розв'язок задачі будуюмо за допомогою термопружного потенціалу переміщень $\Phi(x, y)$, через який напруження σ_{jk} виразимо формулою

$$\sigma_{jk} = 2G \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial j \partial k} - \delta_{jk} \Delta \Phi \right], \quad j, k = x, y, \quad (1)$$

де G – модуль зсуву; δ_{jk} – символ Кронекера. Термопружний потенціал переміщень ззовні включень запишемо у вигляді

$$2\Phi(x, y) = (1 + \nu) T_0 \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \ln R_n(x, y), \quad R_n(x, y) = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \quad (2)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, $\eta_n = \alpha_{in} - \alpha_m$ – різниця між КЛТР матеріалів включень і матриці. Із рівнянь (1) і (2) маємо:

$$\sigma_{yy} = -A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{(y - y_n)^2 - (x - x_n)^2}{R_n^4}, \quad A = (1 + \nu) G T_0, \quad (3)$$

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy} = -2A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{(x - x_n)(y - y_n)}{R_n^4}.$$

Розташуємо включення на осі Ox з центрами $x_n = c_n$, $y_n = 0$. Тоді із співвідношення (3) одержимо:

$$\sigma_{yy}(x, y) = -A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{y^2 - (x - c_n)^2}{\left[y^2 + (x - c_n)^2 \right]^2}, \quad \sigma_{xx} = -\sigma_{yy}.$$

Відповідно на осях Ox і Oy

$$\sigma_{yy}(x, 0) = A \sum_{n=1}^N \frac{a_n^2 \eta_n}{(x - c_n)^2}, \quad \sigma_{xx}(0, y) = -A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{c_n^2 - y^2}{(c_n^2 + y^2)^2}. \quad (4)$$

Для двох включень з однаковими радіусами і КЛТР, які дотикаються ($c_1 = -c_2 = a$), напруження в точці дотику не залежать від радіуса: $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx} = 2(1 + \nu) \eta G T_0$, $\eta = \alpha_i - \alpha_m$.

За розташування на осі Ox періодичної системи включень радіусів a з центрами в точках $x_n = \pm 2nc$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = A \eta a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + 2nc)^2} = \frac{A \eta \pi^2 a^2}{4c^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2c}.$$

Якщо всі включення дотикаються, то в точці дотику ($x = c = a$) напруження $\sigma_{yy} = A \eta \pi^2 / 4$, тобто на 23% більше, ніж для двох включень.

Напружений стан півплощини з включеннями. Нехай включення розміщені у півплощині $x \geq 0$, межа якої вільна від навантаження ($\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$). Доповнимо півплощину до повної площини і симетрично відносно осі Oy в точках $x = -x_n$, $y = y_n$ розмістимо кругові включення радіусів a_n так, що різниця їх КЛТР $\eta_n = \alpha_{in} - \alpha_m < 0$. Позначимо $R_{1n} = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$, $R_{2n} = \sqrt{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}$. Тоді

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \left[\frac{(x + x_n)^2 - (y - y_n)^2}{R_{2n}^4} - \frac{(x - x_n)^2 - (y - y_n)^2}{R_{1n}^4} \right], \quad \bar{\sigma}_{yy} = -\bar{\sigma}_{xx}, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \left[\frac{(x + x_n)(y - y_n)}{R_{2n}^4} - \frac{(x - x_n)(y - y_n)}{R_{1n}^4} \right].\end{aligned}\quad (5)$$

Тепер на межі півплощини нормальне напруження $\bar{\sigma}_{xx}(0, y) = 0$, а дотичне набуває значення

$$\bar{\sigma}_{xy}(0, y) = 4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{x_n (y - y_n)}{\left[x_n^2 + (y - y_n)^2 \right]^2}.\quad (6)$$

Щоб ця межа була вільна від навантажень, необхідно на ній задати дотичні зусилля (6) з протилежним знаком. Для цього використаємо функцію напружень Ері:

$$F(x, y) = -2A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{x(x + x_n)}{R_{2n}^2}.$$

Напруження визначимо через другі похідні цієї функції:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \bar{\sigma}_{xx} &= 4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{x(x + x_n) \left(R_{2n}^2 - 4(y - y_n)^2 \right)}{R_{2n}^6}, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -4A \sum_{n=1}^N \left\{ a_n^2 \eta_n R_{2n}^2 \left(x_n (x + x_n) + (y - y_n)^2 \right) / R_{2n}^6 - \right. \\ &\quad \left. - 2(x + x_n) \left(x_n (x + x_n)^2 + (2x + x_n)(y - y_n)^2 \right) / R_{2n}^6 \right\}, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= -4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{(y - y_n) \left((2x + x_n) R_{2n}^2 - 4x(x + x_n)^2 \right)}{R_{2n}^6}.\end{aligned}\quad (7)$$

Для одного включення у півплощині формули (7) збігаються з виразами, наведеними раніше [12]. Напруження у всіх точках півплощини поза включеннями виражено сумою напружень (5) і (7).

Нехай включення розташовані на осі Ox з центрами $x_n = c_n$, $y_n = 0$. Дослідимо характер напруженого стану на межі півплощини і на осі Ox . Напру-

ження σ_{xx} і σ_{xy} на межі згідно з умовами задачі дорівнюють нулеві, а напруження σ_{yy} виражає формула

$$\sigma_{yy}(0, y) = 4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \frac{c_n^2 - y^2}{(c_n^2 + y^2)^2}, \quad (8)$$

з якої видно, що максимальне розтягальне значення σ_{yy} досягається в точці $y = 0$:

$$\sigma_{yy}^{\max} = 4A \sum_{n=1}^N \frac{a_n^2 \eta_n}{c_n^2}. \quad (9)$$

Концентрація напружень у цій точці (відношення величини (9) до відповідного значення (4) в необмеженій площині з такими ж вклученнями при $x = 0$) дорівнює чотирьом.

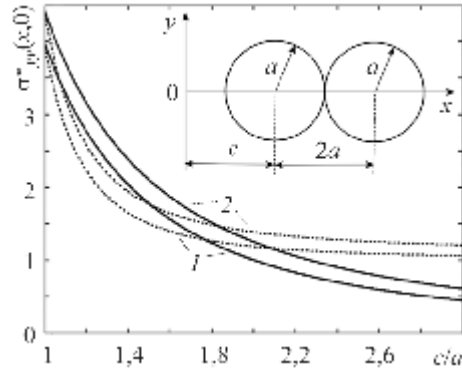
На осі симетрії ($y = 0$) маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \left\{ \frac{x}{(x + c_n)^2} \left[\frac{1}{x + c_n} - \frac{c_n}{(x - c_n)^2} \right] \right\}, \\ \sigma_{yy} &= 4A \sum_{n=1}^N a_n^2 \eta_n \left\{ \frac{c_n}{(x + c_n)^2} \left[\frac{1}{x + c_n} + \frac{x}{(x - c_n)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Напруження $\sigma_{yy} > 0$, якщо $\eta_n > 0$, тобто коли КЛТР вклучень більший, ніж матриці. Напруження σ_{xx} будуть розтягувальні в околі вклучень, коли $\eta_n < 0$.

Рис. 1. Розподіл напружень $\sigma_{yy}^*(x, 0)$ на межі півплощини ($x = 0$; суцільні лінії) та на вклученні ($x = c - a$; штрихові) для одного (криві 1) та двох (криві 2) вклучень.

Fig. 1. Stress, $\sigma_{yy}^*(x, 0)$, distribution at the half-plane interface ($x = 0$; solid lines) and at the inclusion ($x = c - a$; dashed lines) for one (curve 1) and two (curve 2) inclusions.



Розглянемо одне та два вклучення однакових радіусів a , що дотикаються, а їх центри знаходяться на відстані c та $c + 2a$ від межі півплощини, і знайдемо за формулою (10) напруження $\sigma_{yy}^*(x, 0) = \sigma_{yy}(x, 0) / A\eta a^2$ на межі ($x = 0$) та на контурі ($x = c - a$) вклучення (рис. 1). Вони є рівні відповідно $\sigma_{yy}^1 = 1,277A\eta a^2$ при $c/a = 1,77$ і $\sigma_{yy}^2 = 1,467A\eta a^2$ при $c/a = 1,83$. На межі півплощини напруження в чотири рази більші, ніж далеко від неї. Верхні індекси вказують на кількість вклучень. Якщо $c/a < 1,77$ ($c/a < 1,83$), напруження більші біля межі півплощини, інакше – біля вклучень.

Нехай тепер два вклучення однакових радіусів розташовані у півплощині симетрично відносно осі Ox на однаковій віддалі від осі Oy ($x_1 = x_2 = c$, $y_1 = -y_2 = d$). Тоді напруження σ_{yy} на осях Ox і Oy будуть:

$$\sigma_{yy}(x,0) = 2Aa^2\eta \left\{ \frac{d^2 - (x+c)^2}{(d^2 + (x+c)^2)^2} - \frac{d^2 - (x-c)^2}{(d^2 + (x-c)^2)^2} - \frac{4(d^2 + (x+c)^2)(d^2 + c(x+c)) - 8(x+c)(d^2(2x+c) + c(x+c)^2)}{(d^2 + (x+c)^2)^3} \right\}, \quad (11)$$

$$\sigma_{yy}(0,y) = 4Aa^2\eta \left[\frac{c^2 - (y-d)^2}{(c^2 + (y-d)^2)^2} + \frac{c^2 - (y+d)^2}{(c^2 + (y+d)^2)^2} \right].$$

Відзначимо, що на початку координат

$$\sigma_{yy}(0,0) = 8Aa^2\eta \left[\frac{c^2 - d^2}{(c^2 + d^2)^2} \right].$$

Звідси видно, що при $c = d$ вони дорівнюють нулеві, а при $\eta = \alpha_i - \alpha_m > 0$ і $c > d$ ($c < d$) відповідно додатні (від'ємні).

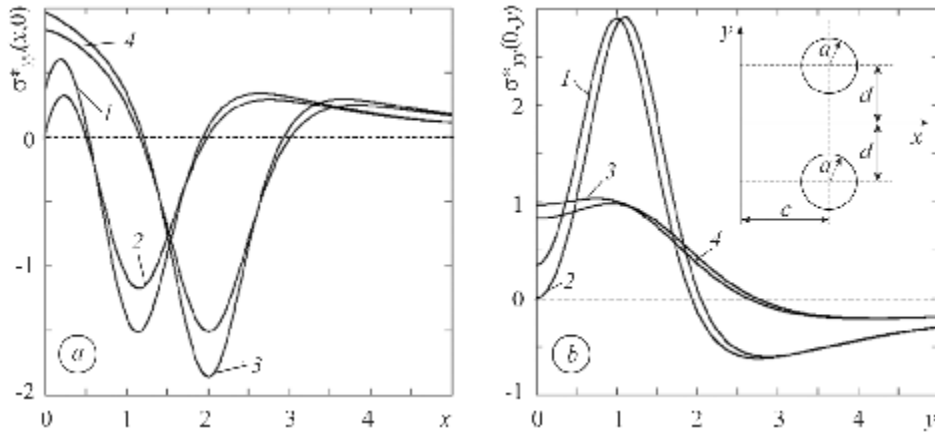


Рис. 2. Розподіл нормальних напружень на осі Ox для двох включень у півплощині (а) та на межі півплощини за різних розташувань двох включень (б):

1 - $\bar{c} = 1,1$, $\bar{d} = 1$; 2 - $\bar{c} = 1,1$, $\bar{d} = 1,1$; 3 - $\bar{c} = 2$, $\bar{d} = 1$; 4 - $\bar{c} = 2$, $\bar{d} = 1,1$.

Fig. 2. Normal stress distribution on axis Ox for two inclusions in a half-plane (a) and at the half-plane boundary at different locations of two inclusion (b):

1 - $\bar{c} = 1,1$, $\bar{d} = 1$; 2 - $\bar{c} = 1,1$, $\bar{d} = 1,1$; 3 - $\bar{c} = 2$, $\bar{d} = 1$; 4 - $\bar{c} = 2$, $\bar{d} = 1,1$.

На рис. 2а побудовані за формулами (11) графіки $\sigma_{yy}^*(x,0) = \sigma_{yy}(x,0)/A\eta a^2$, а рис. 2б - $\sigma_{yy}^*(0,y) = \sigma_{yy}(0,y)/A\eta a^2$ для деяких значень $\bar{c} = c/a$ і $\bar{d} = d/a$. Як бачимо, при $c > d$ і $\eta > 0$, тобто коли КЛТР включення більший, ніж матриці, в околі близько розташованих включень виникають стискальні зусилля, в той час як біля межі - розтягальні. Коли $\eta < 0$, то маємо протилежне. На-

пруження на межі півплощини є максимальні напроти включень (рис. 2b) і зменшуються з їх віддаленням від межі.

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Розглянемо площину з одним та двома включеннями радіуса a з центрами $x = -c_1, y = 0$ та $x = c_2, y = 0$ і тріщиною довжини $2l$, розташованою на осі Ox (рис. 3a). Напруження σ_{yy} на цій осі виражають формули (4) (індекси 1 і 2 вказують на кількість включень):

$$\sigma_{yy}^1(x,0) = \frac{A\eta a^2}{(c_1+x)^2}, \quad \sigma_{yy}^2(x,0) = A\eta a^2 \left[\frac{1}{(c_1+x)^2} + \frac{1}{(c_2-x)^2} \right]. \quad (12)$$

КІН в околі тріщини визначають за формулою [8]

$$K_I^\pm = -\frac{1}{\pi\sqrt{l}} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{l \pm \xi}{l \mp \xi}} p(\xi) d\xi = -\frac{1}{\pi\sqrt{l}} \int_{-l}^l \frac{l \pm \xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2}} p(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Тут величина K_I^\pm відноситься відповідно до правої і лівої вершин тріщини ($x = \pm l$); $p(\xi)$ – нормальні зусилля на тріщині.

Підставимо у формулу (13) $p(\xi) = -\sigma_{yy}(\xi,0)$ і покладемо $\xi = l \sin \varphi$. Тоді для одного включення

$$K_I^\pm = \frac{A\eta a^2 \sqrt{l}}{(c_1 \pm l) \sqrt{c_1^2 - l^2}}, \quad (14)$$

а для двох

$$K_I^\pm = A\eta a^2 \sqrt{l} \left[\frac{1}{(c_1 \pm l) \sqrt{c_1^2 - l^2}} + \frac{1}{(c_2 \mp l) \sqrt{c_2^2 - l^2}} \right]. \quad (15)$$

Якщо кінці тріщини знаходяться на однаковій віддалі від двох включень, то з формули (15) при $c_1 = c_2 = c$ маємо:

$$K_I^\pm = 2A\eta a^2 \sqrt{l} c (c^2 - l^2)^{-3/2}. \quad (16)$$

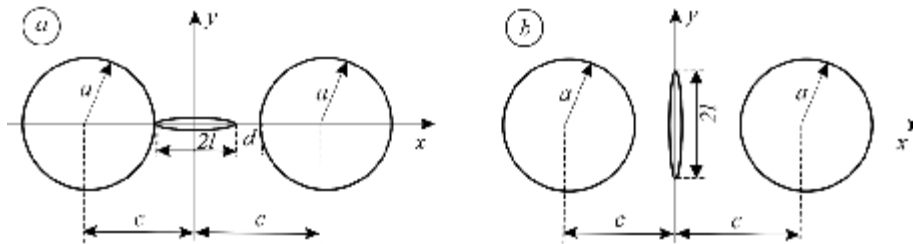


Рис. 3. Схема розташування включень і тріщини:
 a – горизонтальна тріщина; b – вертикальна.

Fig. 3. Scheme of inclusions and a crack location: a – horizontal crack; b – vertical.

Приклади. Нехай ліва вершина тріщини дотикається до одного включення. Тоді, покладаючи у формулі (14) $c_1 = a + l$, маємо:

$$K_I^+ = A\eta \sqrt{l} (1 + 2l/a)^{-3/2}, \quad K_I^- = A\eta \sqrt{l} (1 + 2l/a)^{-1/2}. \quad (17)$$

Якщо у разі двох включень кінці тріщини дотикаються до них, то з формули (16) при $c = a + l$ одержимо:

$$K_1^\pm = 2A\eta\sqrt{l}(1+l/a)(1+2l/a)^{-3/2}. \quad (18)$$

У таблиці наведені величини $\overline{K_1^\pm} = \frac{K_1^\pm}{(1+\nu)G\eta T_0\sqrt{a}}$, обчислені за певних значень l/a за формулами (17) для одного (перші дві стрічки) та за формулою (18) для двох (третья стрічка) включень. Максимальний КІН $\overline{K_1^-}$ за наявності одного включення, до якого дотикається кінець тріщини, зростає зі збільшенням її довжини, в той час як $\overline{K_1^+}$ на протилежному кінці зменшується. Для двох включень КІН спочатку зростає зі збільшенням l/a , а пізніше спадає. Із зміною радіуса включення a ці коефіцієнти пропорційні \sqrt{a} .

Залежність КІН від розташування включень і тріщини та її довжини

l/a	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	4	6
$\overline{K_1^+}$	0,240	0,270	0,250	0,213	0,192	0,126	0,074	0,050
$\overline{K_1^-}$	0,289	0,378	0,5	0,555	0,577	0,632	0,667	0,679
$\overline{K_1^\pm}$	0,529	0,648	0,750	0,768	0,770	0,759	0,741	0,732
K_1^*	0,197	0,377	0,716	0,762	0,707	0,358	0,114	0,057

Розглянемо тепер приклад, коли тріщина розміщена на осі Oy симетрично відносно осі Ox (рис. 3b). Напруження на місці тріщини за формулою (4) такі:

$$\sigma_{xx}(0, y) = -2A\eta a^2 \frac{c^2 - y^2}{(c^2 + y^2)^2}, \quad K_1^\pm = -2A\eta a^2 \sqrt{lc} (c^2 + l^2)^{-3/2}.$$

В околі включень вони будуть розтягальні, якщо $\eta = \alpha_i - \alpha_m < 0$, і максимальні, коли $c = a$. Для цього випадку величини $K_1^* = K_1^\pm / (1+\nu)G\eta T_0\sqrt{a}$ наведені у четвертій стрічці таблиці. Із збільшенням тріщини вони зростають, при $l/a = 0,8$ досягають максимального значення $K_1^* = 0,762$, а далі спадають, бо кінці тріщини при $y > c$ попадають у зону стискальних напружень.

ВИСНОВКИ

Досліджено в умовах плоскої деформації напружений стан рівномірно нагрітого безмежного і півбезмежного тіл з циліндричними включеннями, які відрізняються від матриці коефіцієнтами лінійного теплового розширення. В декартовій системі координат одержано явні вирази для напружень поза включеннями. Встановлено, що нормальні напруження в точці дотику періодичної системи включень однакових радіусів на 23% більші, ніж для двох включень. Якщо центри двох однакових включень знаходяться на віддалі $2c/a = 5$ одне від одного, то вони практично не взаємодіють. Концентрація напружень у точці дотику включення до межі півпростору дорівнює чотирьом. При $c/a = 3$ межа практично не впливає на напружений стан в околі включення.

РЕЗЮМЕ. С использованием термоупругого потенциала перемещений и функции напряжений Эри определены напряжения в бесконечной и полубесконечной плоскостях с круговыми термическими включениями (коэффициенты линейного теплового расширения которых отличаются от матричного) при равномерном нагреве. Исследована концентрация напряжений, когда включения размещены около границы полуплоскости. Получены аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности прямолинейной трещины, размещённой между двумя одинаковыми включениями.

SUMMARY. Using a thermo-elastic displacement potential and Eri stress function, the stresses in an infinite and a semi-infinite planes with circular thermal inclusions (linear temperature coefficients different from that of a matrix) under uniform heating are studied. Stress concentration, when inclusions are located at the semi-plane boundary, are investigated. Analytical expressions for the stress intensity factors in the vicinity of a rectilinear crack, located between two similar inclusions, are obtained.

1. *Запильняк И. М.* Интегральные уравнения задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с криволинейными трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 11. – С. 1001–1005.
2. *Запильняк И. М.* Термоупругое состояние плоскости с включением и криволинейными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 22. – С. 60–65.
3. *Зеленяк В. М., Євтушенко О. О.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 140–146.
4. *Зеленяк В., Мартиняк Р., Слободян Б.* Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною // Машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 13–17.
5. *Кит Г. С., Запильняк И. М.* Термоупругое состояние плоскости с круговым включением, ослабленным трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 630–633.
6. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 4. – С. 34–40.
(*Matysiak S. I., Evtushenko O. O., and Zeleniak V. M.* Heating of a half space containing an inclusion and a crack // Materials Science. – 2004. – № 4. – P. 466–474.)
7. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
8. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – 22, № 3. – С. 82–88.
(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise-uniform plane with cracks // Materials Science. – 1986. – № 3. – P. 297–304.)
10. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Там же. – 1987. – 23, № 5. – С. 70–78.
(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* The plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for a finite piecewise uniform body with cracks // Materials Science. – 1987. – № 5. – P. 502–510.)
11. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Там же. – 1988. – 24, № 2. – С. 23–28.
(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for two joined dissimilar half-planes with curved inclusions and cracks // Materials Science. – 1988. – № 2. – P. 124–129.)
12. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.

Одержано 02.10.2009