

УДК 539.375

## ВПЛИВ ЗАКРУГЛЕННЯ КРАЇВ ОСНОВИ КОНТРТІЛА НА КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ У ТІЛІ З КРАЙОВОЮ ТРІЩИНОЮ

О. П. ДАЦИШИН, В. В. ПАНАСЮК, Р. Є. ПРИШЛЯК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Досліджено залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень у тілі з крайовою довільно орієнтованою тріщиною від радіуса закруглення  $R$  країв основи контртіла, яке втискають з однобічним тертям у пошкоджене тіло в околі гирла тріщини. Це тіло у межах двовимірної задачі змодельовано пружною півплощиною з крайовим розрізом, а дію контртіла – навантаженням, яке відображає розподіл тиску, установлений В. М. Александровим і Б. Л. Ромалісом, у зоні контакту двох пружних циліндрів з початковою смугою контакту. Числові результати отримано для однакових матеріалів контактних тіл для півдовжини початкової ділянки контакту  $b = [5; 10]$  mm і радіуса  $R = [0,1; 1,0; 10,0; 100,0]$  mm, а також кута нахилу крайової тріщини, відносного розміщення контртіла і тріщини та її довжини.

**Ключові слова:** контактна пара, тріщина, контактний тиск, коефіцієнти інтенсивності напружень, закруглення основи контртіла.

Профілі елементів багатьох номінально нерухомих з'єднань є прямокутними, і в зоні їхнього контакту під кутовими точками (ребрами) виникає значна концентрація напружень. Саме там часто зароджуються тріщини, які стають особливо небезпечними, коли з'єднання піддають експлуатаційним вібраціям, і його елементи взаємодіють в умовах фретинг-втомі [1]. Тому на практиці кутові точки згладжують, закруглюючи краї основ контактуючих тіл (рис. 1). Як залежить концентрація напружень і, особливо, коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині тріщини, що є в тілі в зоні контакту, від радіуса  $R$  закруглення основи контртіла – важливе і практичне, і теоретичне питання.

Щоб зрозуміти характер взаємодії тіл у з'єднанні, і, зокрема, руйнування в зоні контакту, часто використовують модельні задачі, коли пошкоджене базове тіло моделюють пружною півплощиною (циліндром необмеженого радіуса) з тріщинами, а дію контртіла – або пружним чи жорстким штампом (рис. 1), або контактним навантаженням (рис. 2). Задачі про тиск жорсткого штампа з основою довільної форми на пружну півплощину, послаблену системою криволінійних тріщин, розглянуто у працях [2–4], а для системи прямолінійних тріщин – асимптотичними підходами в [5]. Зокрема, за втискання у півплощину жорсткого прямокутного штампа отримано КІН для внутрішньої вертикальної тріщини [2],

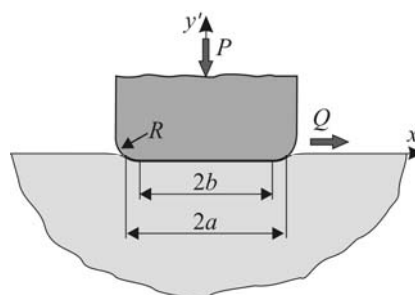


Рис. 1. Модельна схема контактної взаємодії.

Fig. 1. Model scheme of contact interaction.

горизонтальної і вертикальної тріщин [3], а також нахиленої крайової [6] у півплощині. Ці задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. Хасебе та Квін [7] розглядали півплощину з нахиленою крайовою тріщиною під дією штампа, один із країв якого закруглений, а другий – гострий, використовуючи метод конформних відображень. Перші розв’язки у цьому напрямі отримали Тоноян та Мінасян [8] методом дуальних інтегральних рівнянь.

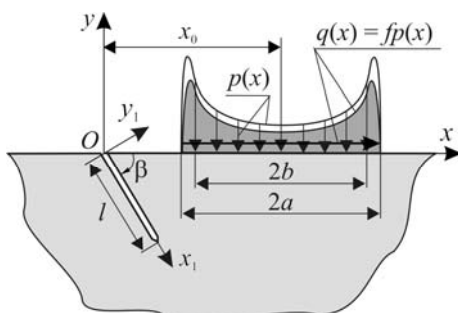


Рис. 2. Розрахункова схема задачі.

Fig. 2. Calculation mode of the problem.

найчастіше використовують рівномірно розподілений тиск, зосереджену силу, еліптичний, лінійний, параболічний та інші розподіли. Тут зацікавлюють результати Руке і Джонса [14] та Едвардса [15]. Однак у них основа контртіла є здебільшого гладкою і випуклою або прямокутною без закруглень, і це закладено в моделях контактних навантажень, тобто відсутня інформація про вплив радіуса закруглення країв основи контртіла на КІН біля вершин тріщин, що є в зоні контакту.

Нижче, продовжуючи розпочаті дослідження [11], розв’язали задачу про напружено-деформований стан в околі вершини крайової тріщини у пружній півплощині під дією на її краю модельного навантаження, яке відтворює розподіл тиску, що виникає під час вдавлення плоского пружного штампа з горизонтальною прямолінійною основою із закругленими краями з довільним радіусом закруглення  $R$  (рис. 2). Такий розподіл встановлено з розв’язку контактної задачі про стискання двох пружних циліндрів уздовж початкової смуги контакту [16]. У модельному навантаженні передбачено дотичну складову, яка засвідчує у контакті між тілами проковзування з одnobічним тертям. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) і розв’язано числово методом механічних квадратур. Вивчено вплив радіуса закруглення країв штампа (контртіла), тертя між штампом і півплощиною, розташування, довжини та орієнтації тріщини на КІН.

**Розрахункова модель [11].** Нехай одне зі циліндричних тіл, що контактують, пошкоджене крайовою макротріщиною. Його моделюємо пружною півплощиною з прямолінійним розрізом (тріщиною) (рис. 2), а контактний вплив іншого тіла (контртіла) – дією нормального статичного тиску, розподіленого за певним законом  $p(x)$  на ділянці контакту завдовжки  $2a$ , та однонапрямлених дотичних зусиль  $q(x)$ , пов’язаних з ним за законом Амонтона через коефіцієнт тертя  $f$ :  $q(x) = fp(x)$ , тобто між тілами діють умови повного проковзування. Закон розподілу тиску  $p(x)$  знаходимо із розв’язку контактної задачі про стискання двох пружних циліндрів з початковою смугою контакту завдовжки  $2b$  [16].

Віднесемо півплощину до основної системи координат  $xOy$ , а контур розрізу  $L$  – до локальної системи координат  $x_1O_1y_1$  (рис. 2). Системи  $x_1O_1y_1$  і  $xOy$  пов’язані співвідношенням  $z = z_1 e^{-i\alpha} + z_1^0$ , де комплексна змінна  $z_1 = x_1 + iy_1$ ;  $\alpha = -\beta$  – кут нахилу осі  $O_1x_1$  до осі  $Ox$ ,  $z_1^0$  – комплексна координата точки  $O_1$  у системі  $xOy$ . Форму контуру  $L$  у системі координат  $x_1O_1y_1$  описує параметричне рівняння

Серед досліджень, присвячених впливу модельних контактних навантажень на КІН, можна виокремити два напрямки: задачі про контактну взаємодію кочення і взаємодію фретинг-втоми. У першому випадку дію контртіла моделюють або зосередженою силою, або еліптичним (герцівським) розподілом зусиль, які переміщуються вздовж краю півплощини. Такі розвідки започаткували Кір і Брайант [9] і розвинули багато науковців [4, 10–13]. За контактної взаємодії фретинг-втоми як модельне навантаження

$$t = x_1(\xi) + iy_1(\xi) = \omega(\xi), \quad t \in L, \quad |\xi| \leq 1. \quad (1)$$

Для прямолинійної тріщини довжиною  $l$  маємо:

$$t = x_1(\xi) = \omega(\xi) = l(\xi + 1)/2, \quad 0 \leq x_1 \leq l, \quad |\xi| \leq 1.$$

Сформулюємо крайові умови задачі. На ділянці краю півплощини довжиною  $2a$  задано довільний нормальний тиск  $p(x)$ , а також зсувні зусилля  $q(x)$  так, що

$$\begin{aligned} \sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) &= -p(x)(1 + if), & |x - x_0| \leq a, & \quad y = 0; \\ \sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) &= 0, & |x - x_0| > a, & \quad y = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $x_0$  – абсциса середини ділянки зовнішнього навантаження в системі  $xOy$ . Вважаємо, що береги тріщини вільні від навантаження і не контактують.

Комплексні потенціали напружень Колосова–Мухелішлі [17] задачі запишемо у вигляді [18, 19]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[ \frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} \right] e^{i\alpha} g'(t) dt + \frac{T-\bar{T}}{(\bar{T}-z)^2} e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} d\bar{t} \right\} + \Phi_0(z); \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[ \frac{1}{(\bar{T}-z)^2} - \frac{1}{(T-z)^2} \right] \bar{T} e^{i\alpha} g'(t) dt + \left[ \frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\bar{T}-T)(\bar{T}+z)}{(\bar{T}-z)^3} \right] e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} d\bar{t} \right\} + \Psi_0(z); \quad T = te^{i\alpha} + z_1^0; \end{aligned} \quad (3)$$

тут  $g'(t)$  – невідома густина потенціалів, що виражає похідну від розриву переміщень уздовж контуру тріщини; функції  $\Phi_0(z)$  і  $\Psi_0(z)$  визначають напружений стан півплощини без розриву під дією навантаження (2) на краю півплощини і можливого номінального навантаження на нескінченності (розтяг, згин тощо).

Задовольняючи з допомогою потенціалів (3) крайові умови (2), приходимо до СІР [11] для визначення функції  $g'(t)$ , яке в нормалізованій формі запишемо так:

$$\int_{-1}^1 \left[ R(\xi, \eta) \varphi(\xi) + S(\xi, \eta) \overline{\varphi(\xi)} \right] d\xi = \pi P(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad R(\xi, \eta) &= \text{Re} \left[ \frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)} + \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{W(\xi, \eta)} \right] + \frac{1}{2} \frac{W(\xi, \xi)}{W^2(\xi, \eta)} \left[ \overline{\omega'(\eta)} + \omega'(\eta) e^{2i\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{2i\alpha} \overline{\omega'(\eta)} \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{W(\xi, \eta)} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\omega(\xi) - \overline{\omega(\eta)}} + \\ &\quad + \frac{\omega'(\eta)}{2} \left[ W^{-1}(\xi, \eta) + \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{W^2(\xi, \eta)} \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{\omega'(\eta)} + e^{-2i\alpha} \frac{\overline{W}(\xi, \xi)}{\overline{W}^2(\xi, \eta)} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$W(\xi, \eta) = \overline{\omega(\eta)} - \omega(\xi) e^{2i\alpha} - 2ie^{i\alpha} \text{Im} z_1^0; \quad \varphi(\xi) = g'(t) \omega'(\xi);$$

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P_0 + P_1(\eta) = [p_0(t) + p_1(t)] \omega'(\eta); \\ p_0(t) &= -\Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \left[ t\Phi_0'(t) + \overline{\Psi_0(t)} \right] \frac{d\bar{t}}{dt}. \end{aligned} \quad (7)$$

Надалі вважатимемо, що центри  $O$  і  $O_1$  збігаються, тому  $z_1^0 = 0$ . Оскільки прийнято, що береги тріщини не навантажені, то функція  $p_1(t)=0$ . Інтегральне рівняння (4) розв'язуватимемо числово методом механічних квадратур Гаусса–Чебишова [18, 19]. Для цього шукаємо функцію подамо у вигляді

$$\varphi(\eta) = \frac{u(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (8)$$

Тут  $u(\eta)$  – неперервна на відрізку  $[-1;1]$  функція, яка задовольняє додаткову умову

$$u(-1) = 0, \quad (9)$$

що забезпечує обмеженість розв'язку в точці  $\eta = -1$  на краю півплощини. Застосовуючи квадратурні формули Гаусса до рівняння (4) і зображаючи функцію  $u(\eta)$  як інтерполяційний поліном Лагранжа у вузлах Чебишова, від рівняння (4) і умови (9) приходимо до системи  $M$  лінійних алгебричних рівнянь відносно  $M$  невідомих  $u(\xi_k)$ :

$$\sum_{k=1}^M \left[ R(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + S(\xi_k, \eta_m) \bar{u}(\xi_k) \right] = MP(\eta_m) \quad (m = \overline{1, M-1}),$$

$$\sum_{k=1}^M \left[ (-1)^k \operatorname{tg} \left( \frac{2k-1}{4M} \pi \right) u(\xi_k) \right] = 0; \quad (10)$$

тут  $\xi_k = \cos \left[ (2k-1)\pi / (2M) \right]$ ,  $\eta_m = \cos \left[ \pi m / M \right]$  – нулі поліномів Чебишова відповідно першого і другого роду. З розв'язку системи (10) знаходимо [19] КІН  $K_I$  і  $K_{II}$  у вершині тріщини:

$$K_I - iK_{II} = \frac{1}{M} \frac{\sqrt{\pi |\omega'(1)|}}{\omega'(1)} \sum_{k=1}^M \left[ (-1)^k \operatorname{ctg} \left( \frac{2k-1}{4M} \pi \right) u(\xi_k) \right]. \quad (11)$$

Запишемо тепер комплексні потенціали  $\Phi_0(z)$  і  $\Psi_0(z)$  та знайдемо праву частину  $P(\eta)$  СІР (4) для розподілу контактних зусиль, поданих на рис. 2. Оскільки тріщина вільна від навантаження і зусилля на нескінченності також відсутні, то  $P(\eta) = P_0(\eta)$ . На основі відомого розв'язку [16] отримуємо такий розподіл контактної тиску [11] для співвідношення (2) сформульованої задачі:

$$p(x) = \frac{P(1+\delta)}{b\pi F(\delta)} \left[ (\pi - 2\phi_0) \cos \phi + \sin \phi \ln \left| \frac{\sin(\phi + \phi_0)}{\sin(\phi - \phi_0)} \right| + \right. \\ \left. + \sin \phi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\phi + \phi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\phi - \phi_0}{2} \right| \right] = \tilde{p}(x'), \quad (12)$$

$$\phi = \arcsin \frac{x - x_0}{a}, \quad \phi_0 = \arcsin \frac{1}{1 + \delta}, \quad \delta = (a - b) / b, \quad x' = x - x_0,$$

$$F(\delta) = \frac{\pi - 2\phi_0}{2 \sin^2 \phi_0} - \operatorname{ctg} \phi_0. \quad (13)$$

Тут  $P$  – головний вектор нормальних зусиль контактної навантаження на контртіло (рис. 1);  $2b$  – довжина початкової лінії контакту;  $2a$  – повна її довжина, що зросла внаслідок контактування тіл. При цьому параметр  $\delta$  характеризує приріст довжини лінії контакту і пов'язаний з радіусом  $R$  формулою

$$R = \frac{b^2 EF(\delta)}{4P(1-\nu^2)}, \quad (14)$$

де  $E, \nu$  – пружні сталі матеріалів (розглядаємо випадок, коли матеріали контактних тіл однакові). Параметр  $\delta$ , а відтак і довжину ділянки контакту  $2a$  для заданого радіуса  $R$  закруглення країв штампа, довжини початкової лінії контакту  $2b$  та сили притискання  $P$  на основі співвідношень (13) і (14) визначаємо із трансцендентного рівняння

$$\frac{\pi - 2\phi_0}{2\sin^2 \phi_0} - \operatorname{ctg}\phi_0 = \frac{4PR(1-\nu^2)}{b^2 E}. \quad (15)$$

Обчислюючи комплексні потенціали  $\Phi_0(z)$  і  $\Psi_0(z)$ , користуємося їхніми зображеннями [17–19] в першій основній задачі теорії пружності для півплощини без тріщини:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \frac{1+if}{2\pi i} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{p(x)}{x-t} dx; \\ \Psi_0(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \left[ \frac{(1-if)p(x)}{x-t} - \frac{(1+if)xp(x)}{(x-t)^2} \right] dx, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $p(x)$  визначає співвідношення (12). На основі формул (7) і (16) запишемо праву частину СІР (4) в інтегральній формі. Під час числового розв'язування задачі у цьому разі застосуємо квадратурну формулу Сімпсона.

**Аналіз числових результатів.** Спочатку знайдемо розподіл контактного тиску  $\tilde{p}(x') = p(x)$  (12) під штампом і довжину  $2a$  ділянки контакту залежно від радіуса  $R$  закруглення країв основи штампа за умови його гладкого контакту ( $f=0, q=0$ ) з краєм півплощини вздовж початкової лінії завдовжки  $2b$  під дією стискальної сили  $P$  (рис. 1). Для цього використовуємо співвідношення (12)–(15). Зокрема, обчислення довжини ділянки контакту зводимо до розв'язування трансцендентного рівняння (15), а далі розподіл контактного тиску знаходимо за співвідношенням (12). Обираємо такі значення радіуса закруглення країв основи контртіла:  $R = [0,1; 1,0; 10,0; 100,0]$  mm. Сила втискання штампа  $P = [0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0]$  MN/m. Обчислюємо для початкової півдовжини ділянки (півширини смуги) контакту  $b = [5; 10]$  mm. Зауважимо, що такі значення сили  $P$  та ширини початкової смуги ділянки контакту  $2b$  обрали, враховуючи типові величини тиску контактних накладок на основу (елемент конструкції) під час експериментальних досліджень контактної взаємодії фретинг-втоми, а також результати інженерної практики [1, 20].

Побудовано (рис. 3) графіки розподілу нормованого контактного тиску залежно від радіуса закруглення  $R$ . Форма кривих аналогічна відомим з літератури [16]. Результати (рис. 3 і таблиця) свідчать, що зі зменшенням на порядок радіуса  $R$  різко зростають (приблизно удвічі) максимальні значення  $\tilde{p}_{\max}$  контактного тиску у півплощині біля країв контртіла, а зі збільшенням – площа ділянки контакту (особливо для  $R = 100$  mm). Як і очікували, тиск у центрі ділянки контакту  $\tilde{p}(0)$  мало змінюється з варіюванням параметра  $R$  для заданої сили  $P$  і суттєво – її за модифікації. У діапазоні  $0,1 \dots 4,0$  MN/m тиск  $\tilde{p}(0)$  змінюється в межах  $20 \div 200$  МПа (див. таблицю).

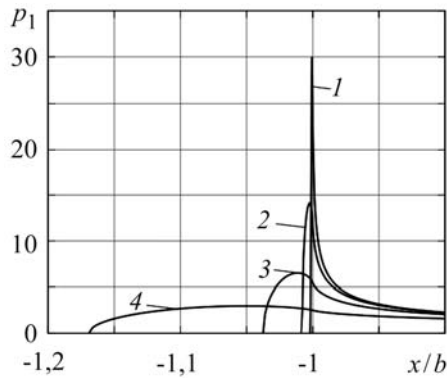


Рис. 3. Криві розподілу нормованого тиску  $p_1 = \tilde{p}(x')\pi b/P$  в околі лівого краю ділянки контакту ( $P = 2,0$  MN/m;  $b = 5$  mm;  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$ ;  $E_1 = E_2 = E = 210$  GPa):  $1 - R = 0,1$  mm;  $2 - 1,0$ ;  $3 - 10,0$ ;  $4 - 100,0$  mm.

Fig. 3. Distribution of normalized pressure  $p_1 = \tilde{p}(x')\pi b/P$  near the left end of contact area ( $P = 2.0$  MN/m;  $b = 5$  mm;  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$ ;  $E_1 = E_2 = E = 210$  GPa):  $1 - R = 0.1$  mm;  $2 - 1.0$ ;  $3 - 10.0$ ;  $4 - 100.0$  mm.

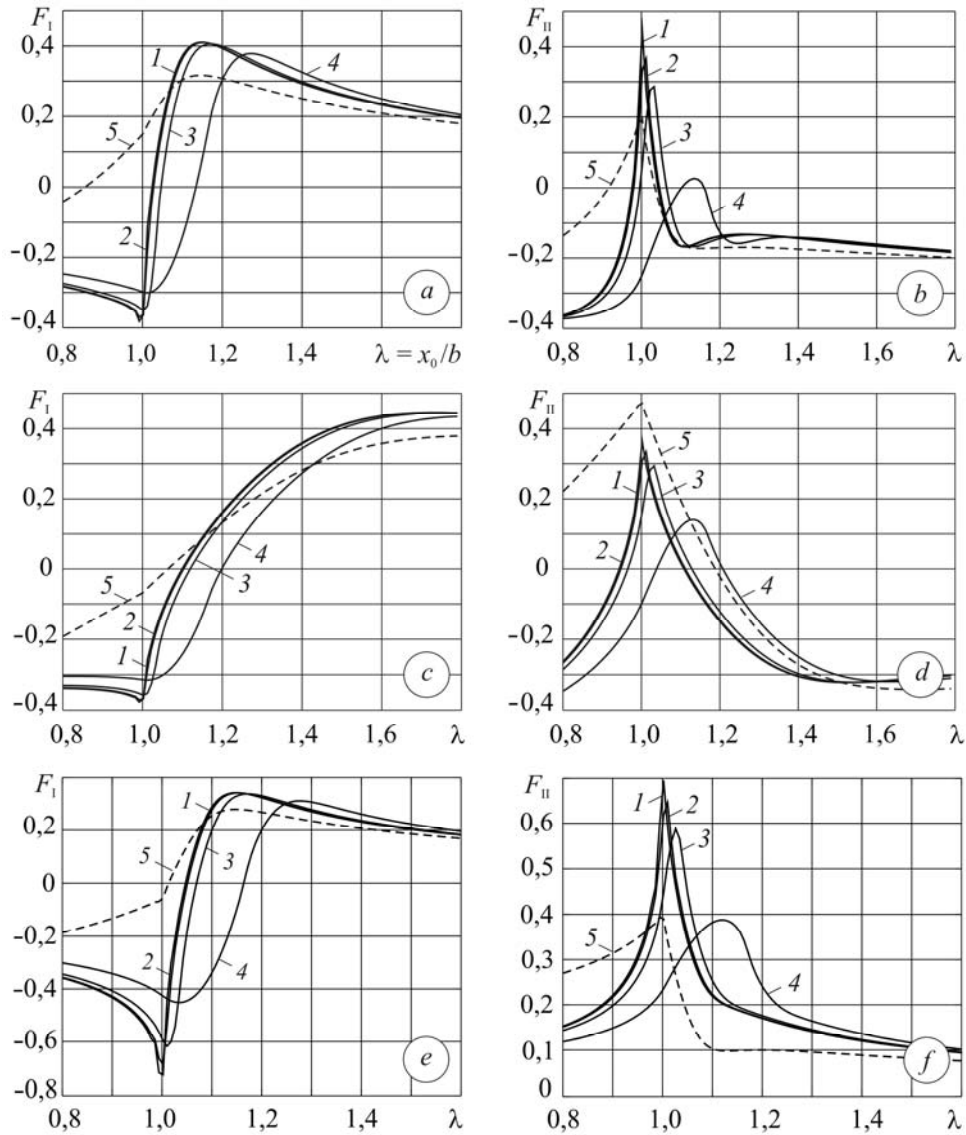
**Півдовжина  $a$  реальної (прирошеної) ділянки контакту, тиск  $\tilde{p}(0)$  в її центрі і максимальне його значення  $\tilde{p}_{\max}$  під краями контртіла залежно від навантаження силою  $P$  і параметрів геометрії основи штамп**

$R$ , mm	$b = 5$ mm			$b = 10$ mm		
	$a$ , mm	$\tilde{p}(0)$ , MPa	$\tilde{p}_{\max}$ , GPa	$a$ , mm	$\tilde{p}(0)$ , MPa	$\tilde{p}_{\max}$ , GPa
$P = 0,1$ MN/m						
0,1	5,0012	6,37	0,44	10,0010	3,18	0,35
1,0	5,0055	6,36	0,20	10,0044	3,18	0,16
10,0	5,0256	6,35	0,11	10,0204	3,18	0,09
100,0	5,1185	6,28	0,05	10,0943	3,17	0,04
$P = 0,5$ MN/m						
0,1	5,0035	31,82	1,28	10,0028	15,91	1,02
1,0	5,0162	31,77	0,63	10,0128	15,90	0,47
10,0	5,0748	31,55	0,33	10,0595	15,86	0,26
100,0	5,3429	30,58	0,15	10,2747	15,66	0,12
$P = 1,0$ MN/m						
0,1	5,0055	63,62	2,03	10,0044	31,82	1,61
1,0	5,0256	63,47	1,12	10,0204	31,79	0,86
10,0	5,1185	62,77	0,52	10,0943	31,65	0,41
100,0	5,5396	59,81	0,24	10,4345	31,02	0,19
$P = 2,0$ MN/m						
0,1	5,0088	127,19	3,22	10,0070	63,64	2,56
1,0	5,0407	126,71	1,79	10,0323	63,54	1,42
10,0	5,1875	124,53	0,83	10,1496	63,10	0,66
100,0	5,8455	115,68	0,38	10,6858	61,15	0,31
$P = 3,0$ MN/m						
0,1	5,0115	190,72	5,06	10,0091	95,44	4,02
1,0	5,0533	189,77	2,35	10,0423	95,25	1,87
10,0	5,2450	185,54	1,09	10,1958	94,39	0,87
100,0	6,0966	168,96	0,48	10,8945	90,65	0,40
$P = 4,0$ MN/m						
0,1	5,0139	254,22	6,13	10,0111	127,24	4,87
1,0	5,0645	252,69	2,85	10,0513	126,93	2,26
10,0	5,2961	245,93	1,31	10,2369	125,54	1,05
100,0	6,3169	220,24	0,57	11,0793	119,62	0,48

Додамо, що довжина початкової лінії контакту слабо впливає на динаміку зміни контактного тиску біля країв штамп і остаточні довжини ділянки контакту

за варіювання радіуса закруглення країв штамп. Однак для менших значень  $b$  (для однакових  $P$  і  $R$ ) отримуємо більші прирости довжини ділянки контакту  $\delta$  і значення  $\tilde{p}_{\max}$ .

Тепер з розв'язку системи алгебричних рівнянь (10), що є аналогом СІР (4), та формули (11) встановлюємо КІН у вершині тріщини. Отримали (рис. 4) залежності нормованих КІН  $F_{I,II} = K_{I,II} \sqrt{\pi b} / P$  (криві 1–4) від відносної віддалі  $\lambda = x_0/b$  середини ділянки контакту до гирла тріщини для таких значень параметрів, властивих фретинг-втомі: кут нахилу тріщини до краю півплощини  $\beta = [\pi/4; \pi/3; 2\pi/3]$ ; відношення довжини тріщини до півдовжини початкової ділянки контакту  $\varepsilon = l/b = [0,1; 0,5]$ ; коефіцієнт тертя між контактуючими тілами  $f = 0,5$ . Відношення радіуса закруглення основи штамп до півдовжини початкової ділянки контакту  $r = R/b = [0,02; 0,20; 2,00; 20,00]$ . Модельне контактне навантаження визначають співвідношення (2) і (12)–(15). Для порівняння наведено також КІН, коли на краю півплощини з тріщиною на ділянці  $2b$  діють рівномірно розподілений тиск  $p$  і дотичні зусилля  $q = fp$  (криві 5);  $2pb = P$ .



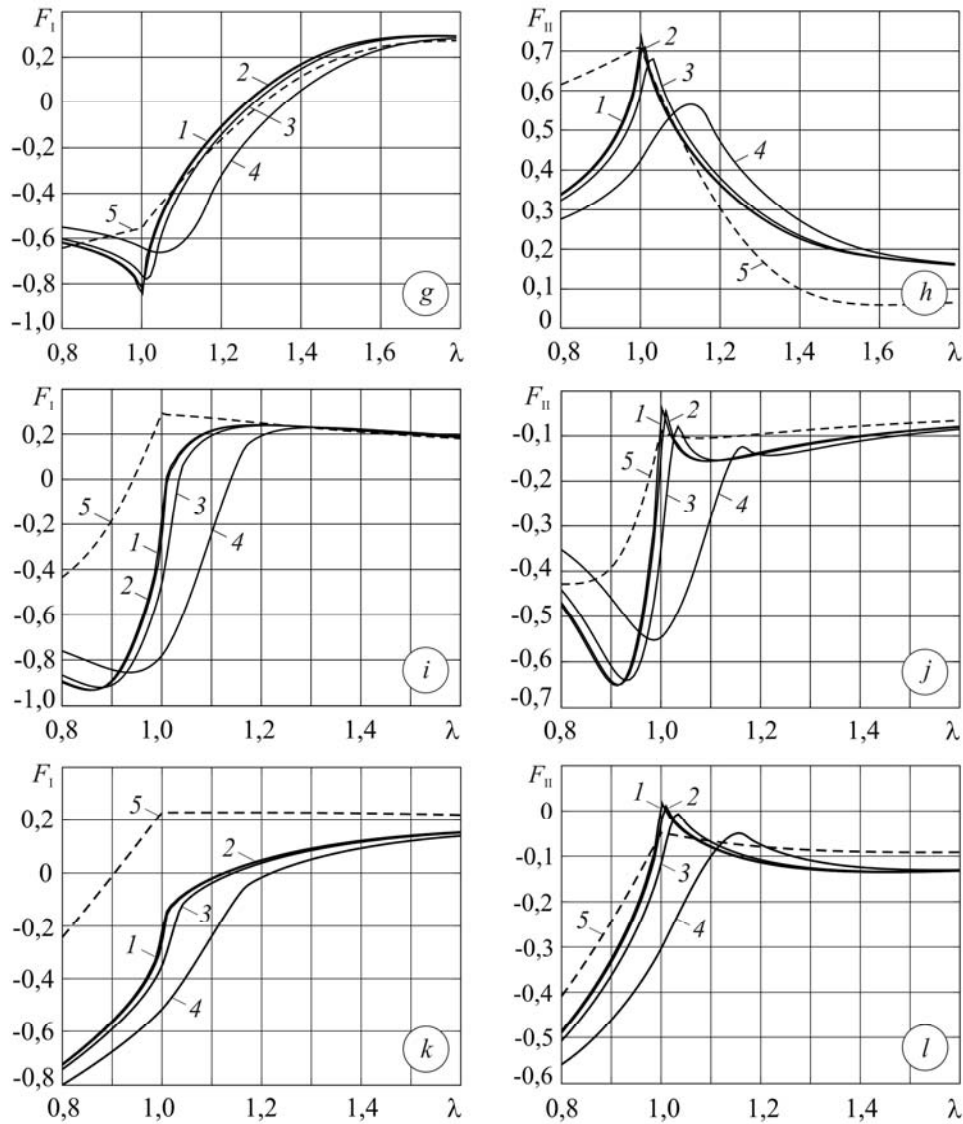


Рис. 4. Залежність нормованих КІН  $F_{I,II} = K_{I,II} \sqrt{\pi b} / P$  від віддалі середини ділянки контакту до гирла тріщини  $\lambda$  для кута її нахилу  $\beta = \pi/3$  (a-d),  $\pi/4$  (e-h) та  $2\pi/3$  (i-l); коефіцієнта тертя між контактуючими тілами  $f = 0,5$  і певних значень відношення довжини тріщини до півдовжини початкової ділянки контакту  $\varepsilon$ :  
 1 -  $r = R/b = 0,02$ ; 2 -  $0,20$ ; 3 -  $2,00$ ; 4 -  $20,00$ ; 5 - рівномірно розподілений тиск;  
 a, b, e, f, i, j -  $\varepsilon = l/b = 0,1$ ; c, d, g, h, k, l -  $0,5$ .

Fig. 4. Dependence of normalized stress intensity factors  $F_{I,II} = K_{I,II} \sqrt{\pi b} / P$  on distance between the center of contact area and crack mouth  $\lambda$  for its inclination angle  $\beta = \pi/3$  (a-d),  $\pi/4$  (e-h) and  $2\pi/3$  (i-l); friction coefficient between contacting bodies  $f = 0.5$  and certain values of the ratio of crack length to semi-length of the initial contact area  $\varepsilon$ :  
 1 -  $r = R/b = 0.02$ ; 2 -  $0.20$ ; 3 -  $2.00$ ; 4 -  $20.00$ ; 5 - evenly distributed pressure;  
 a, b, e, f, i, j -  $\varepsilon = l/b = 0.1$ ; c, d, g, h, k, l -  $0.5$ .

Зі суттєвим (на три порядки) зменшенням радіуса  $R$  закруглення країв основи контртіла незначно (до 10%) збільшуються максимальні значення КІН  $K_I$  (рис. 4a, c, e, g, i, k) і майже удвічі – максимальні КІН  $|K_{II}|$ , особливо для гострих



кутів  $\beta$  ( $\beta = \pi/3$  і  $\pi/4$ ) і коротких тріщин ( $\varepsilon = 0,1$ ) (рис. 4b, d, f, h, j, l). Однак максимальні значення  $|K_{II}|$  реалізуються переважно тоді, коли  $K_I < 0$ . Тому така кількісна оцінка наближена, а для точнішої слід розв'язати задачу, враховуючи контакт берегів тріщини.

Залежності  $F_I(\lambda)$  і  $F_{II}(\lambda)$  (криві 5) для модельного навантаження рівномірно розподіленим тиском якісно, а часто й кількісно збігаються з кривими 1–3 для малих закруглень країв контртіла (малих  $R$ ). Отже, цим розподілом можна користуватися, щоб моделювати контактну взаємодію фретинг-втоми. Як і очікували, максимуми  $K_I$  і  $|K_{II}|$  на кривій 4 для великого радіуса закруглення реалізуються для більших  $\lambda$ , ніж для інших випадків (криві 1–3, 5), тобто коли навантаження перебуває далі від гирла тріщини.

Вплив закруглення швидко зникає із віддаленням контактного навантаження від гирла тріщини незалежно від кута її орієнтації. Уже для  $\lambda = x_0/b > 1,8$  різниця між КІН на кривих 1–4 (рис. 4) не перевищує 1÷5%. Зі збільшенням відносної довжини тріщини  $\varepsilon$  від 0,1 до 0,5 загалом максимуми  $|K_{II}|$  зростають, а  $K_I$  зменшуються (див. також [11]) і реалізуються для більших  $\lambda$ , а вплив радіуса  $R$  слабшає. Для інших значень коефіцієнта тертя ( $f = 0,3$  і  $0,7$ ) його вплив на КІН  $K_I$  також незначний.

Цікаво порівняти наші результати з одержаними раніше [6] для плоского прямокутного жорсткого штампа, який з тертям втискають у півплощину, послаблену тріщиною. Як випливає з рис. 5, вони для  $K_{II}$  близькі, а для  $K_I$  практично збігаються, починаючи з  $\lambda = 15$ ; суттєво відрізняються для  $\lambda \leq 2$ , коли край штампа чи навантаження є близько до гирла тріщини. Подібне також спостерігаємо в праці [15]. Причина розходжень у тому, що криві типу 1 отримано на основі розв'язків, в яких наперед закладено кореневу особливість напружень під краями штампа. Натомість, модельні зусилля  $p(x)$  (12) там скінченні.

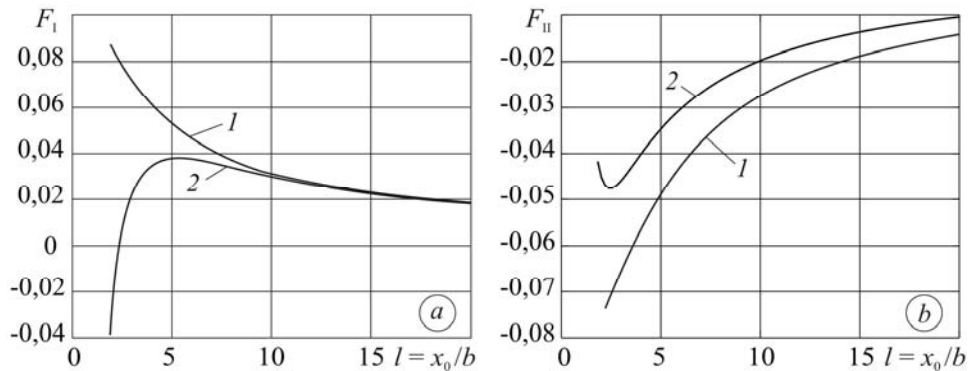


Рис. 5. Залежність нормованих КІН  $F_{I,II} = K_{I,II}\sqrt{\pi b}/P$  від віддалі середини ділянки контакту до гирла тріщини;  $\beta = 3\pi/4$ ;  $f = 0,3$ ;  $\varepsilon = 1,0$ ; криві 1 – за результатами праці [6], 2 – отримані нами.

Fig. 5. Dependence of normalized stress intensity factors  $F_{I,II} = K_{I,II}\sqrt{\pi b}/P$  on distance between the center of contact area and crack mouth;  $\beta = 3\pi/4$ ;  $f = 0,3$ ;  $\varepsilon = 1,0$ ; curves 1 – according to [6]; 2 – our data.

## ВИСНОВКИ

Установлено, що зі зменшенням закруглення країв контртіла (від 100 до 0,1 mm) незначно (до 10%) підвищуються максимальні значення КІН  $K_I$  і суттєво (інколи вдвічі) – максимальні значення КІН  $|K_{II}|$  у вершині крайової тріщини в

базовому тілі пари тертя. Цей вплив найвідчутніший за малих відносних довжин крайових тріщин ( $\varepsilon = l/b = 0,1$ ; (рис. 2)) і спадає зі збільшенням їхньої довжини та віддаленням контртіла від гирла тріщини (ростом  $\lambda = x_0/b$ ). Залежності  $K_{I,II}(\lambda)$  для модельного контактного навантаження, яке враховує закруглення країв контртіла, і рівномірно розподіленим тиском якісно подібні і близькі кількісно. Це теоретично підтверджує правомірність використання простішого рівномірного розподілу як модельного навантаження.

**РЕЗЮМЕ.** Исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений в теле с краевой произвольно ориентированной трещиной от радиуса закругления  $R$  краев основы контртела, вдавливаемого с трением в поврежденное тело в окрестности устья трещины. Это тело в рамках двумерной задачи смоделировано упругой полуплоскостью с краевым разрезом, а действие контртела – модельной нагрузкой, отображающей распределение давления, установленное В. М. Александровым и Б. Л. Ромалисом, в зоне контакта двух упругих цилиндров с начальной полосой контакта. Числовые результаты получены для одинаковых материалов контактирующих тел для значений полудлины начального участка контакта  $b = [5; 10]$  mm и радиуса  $R = [0,1; 1,0; 10,0; 100,0]$  mm, а также для угла наклона краевой трещины, относительного размещения контртела и трещины и ее длины.

**SUMMARY.** Dependence of the stress intensity factors in a body with an edge arbitrary oriented crack on the curvature radius  $R$  of the edges of counterbody base, pressed with unilateral friction into a cracked body near the crack mouth, is investigated. This body has been modeled within a two-dimensional problem as an elastic half-plane with an edge cut, and counterbody action – as a load modeling the pressure distribution, established by V. M. Aleksandrov & B. L. Romalis, in the contact zone of two elastic cylinders with initial contact strip. Numerical results were obtained for identical materials of contact solids for values of half-length of the initial contact area  $b = [5; 10]$  mm and radius  $R = [0,1; 1,0; 10,0; 100,0]$  mm, as well as inclination angle of an edge crack, relative position of a counterbody and crack and its length.

1. Уотерхауз Р. Б. Фреттинг-коррозия. – Л.: Машиностроение, 1976. – 270 с.
2. Панасюк В. В., Дациськин О. П., Марченко Г. П. Контактна задача про дію штампа на границю півплощини, послабленої системою криволінійних тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 6. – С. 7–16.  
(Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. Contact problem for a half plane with cracks subjected to the action of a rigid punch on its boundary // Materials Science. – 1995. – **31**, № 6. – P. 667–678.)
3. Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action // Int. J. of Fract. – 2000. – **101**, № 4. – P. 347–363.
4. Саврук М. П., Томчик А. Тиск з тертям абсолютно жорсткого штампа на пружний півпростір з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 5–15.  
(Savruk M. P. and Tomczyk A. Pressure with friction of a perfectly rigid die upon an elastic half space with cracks // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 283–296.)
5. Кудіш І. І. Контактная задача теории упругости для тел с трещинами // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, №6. – С. 1020–1034.
6. Savruk M., Tomczyk A., Yevtushenko A. Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną // Acta Mechanica et Automatica. – 2007. – № 2. – S. 41–44.
7. Hasebe N. and Qian J. Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack // J. App. Mechanics. – 1997. – **64**. – P. 73–79.
8. Тоноян В. С., Минасян А. Ф. Несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом // Докл. АН АрмССР. – 1975. – **61**, № 5. – С. 289–297.
9. Keer L. M. and Bryant M. D. A pitting model for rolling contact fatigue // Trans. ASME: J. Lubric. Technol. – 1983. – **105**, № 2. – P. 198–205.
10. Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. To crack propagation theory under rolling contact // Engng. Fract. Mechanics. – 1995. – **52**, № 1. – P. 179–191.

11. Вплив форми модельного контактного навантаження на коефіцієнти інтенсивності напружень для крайової тріщини / О. П. Дацишин, Р. Є. Пришляк, С. В. Приходська, Р. Б. Щур, А. Б. Терлецький // Проблеми трибології. – 1998. – № 3. – С. 3–16.
12. Дацишин О. П., Марченко Г. П. Напружений стан півплощини з крайовою половою тріщиною під герцівським навантаженням. (Огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 1. – С. 23–34.  
(Datsyshyn O. P. and Marchenko H. P. Stressed state of a half plane with shallow edge crack under Hertzian loading. (A survey) // Materials Science. – 2008. – 44, № 1. – P. 22–34.)
13. Дацишин О. П. Моделювання утворення контактних-втомних пошкоджень і оцінювання довговічності елементів трибоспряджень // Там же. – 2011. – 47, № 2. – С. 67–78.  
(Datsyshyn O. P. Modeling of the initiation of contact fatigue damages and estimation of the durability of elements of tribological conjunctions // Materials Science. – 2011. – 47, № 2. – P. 188–200.)
14. Rooke D. P. and Jones D. A. Stress intensity factors in fretting fatigue // J. Strain Anal. – 1979. – 14, № 1. – P. 1–6.
15. Edwards P. R. The application of fracture mechanics to predicting fretting fatigue / Ed.: R. B. Waterhouse // Fretting Fatigue. – London: Elsevier Appl. Science, 1981. – P. 67–99.
16. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
17. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1996. – 708 с.
18. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
19. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
20. Шевеля В. В., Калда Г. С. Фреттинг-усталость металлов. – Хмельницкий: Поділля, 1998. – 300 с.

Одержано 20.05.2013