

УДК 536.12:621.891:539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ФРИКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ ПІД ЧАС ГАЛЬМУВАННЯ

О. ЄВТУШЕНКО, М. КУЦЕЙ, Ол. ЄВТУШЕНКО

Білостоцька політехніка, Польща

Отримано аналітичний розв'язок нестационарної теплової задачі тертя для двох півпросторів з узагальненими крайовими умовами Дж. Барбера за сталої питомої потужності тертя. На його основі за допомогою формули Дюамеля побудовано розв'язок теплової задачі тертя під час гальмування зі сталим сповільненням. Для фрикційної пари чавун–металокераміка досліджено вплив коефіцієнтів термічної провідності контакту та розподілу теплових потоків на температурне поле трибосистеми.

Ключові слова: фрикційне нагрівання, температура, гальмування, тепловий контакт.

Побудова розв'язків теплових задач тертя є однією з найактуальніших проблем трибології і триботехніки [1]. Точність визначення температурних полів у співдотичних тілах під час їхнього відносного ковзання прямо залежить від коректного формулювання цих задач [2]. Основним недоліком формулювання теплової задачі тертя є те, що теплові процеси у співдотичних тілах найчастіше досліджували окремо, а розподіл теплової енергії між ними задавали апріорі [3]. Мета роботи – порівняти температури, знайдені за допомогою розв'язків теплової задачі тертя для двох півпросторів із різними варіантами крайових умов на поверхні контакту.

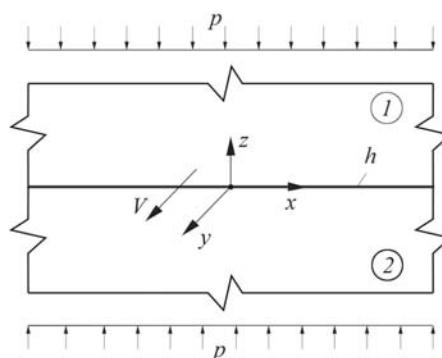


Рис. 1. Схема задачі:
1 – верхній півпростір; 2 – нижній.

Fig. 1. Scheme of the problem:
1 – top semi-space; 2 – bottom.

Формулювання задачі. Розглянемо два різні півпростори, що стискаються на безмежності зусиллями сталої інтенсивності p , прикладеними паралельно до осі Oz (рис. 1). У початковий момент часу $t = 0$ один із півпросторів починає рухатись зі сталою швидкістю V по поверхні іншого у додатному напрямку осі Oy . Внаслідок тертя на поверхні контакту $z = 0$ генерується тепло і співдотичні тіла нагріваються. Сума інтенсивностей теплових потоків, напрямлених вздовж нормалі від поверхні контакту всередину кожного півпростору, дорівнює питомій потужності тертя $q_0 = fVp$, де f – коефіцієнт тертя. Усі величини та параметри, що відносяться до верхнього та нижнього півпросторів, надалі позначатимемо нижніми індексами 1 та 2, відповідно.

Нестационарні температурні поля $T_i(z, t)$, $i = 1, 2$ знайдемо із розв'язку крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k_1^*} \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$-K_1^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = \gamma - \text{Bi} [T_1^*(0^+, \tau) - T_2^*(0^-, \tau)], \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} = 1 - \gamma + \text{Bi} [T_1^*(0^+, \tau) - T_2^*(0^-, \tau)], \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$T_i^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \tau > 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$T_i^*(\zeta, 0) = 0, \quad |\zeta| < \infty, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

де

$$\zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{k_2 t}{a^2}, \quad K^* = \frac{K_1}{K_2}, \quad k^* = \frac{k_1}{k_2}, \quad \text{Bi} = \frac{ha}{K_2}, \quad T_i^* = \frac{T_i K_2}{q_0 a}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$a = 1,73\sqrt{k_2 t_s}$ – ефективна глибина прогрівання нижнього півпростору за час $t = t_s$ [1]; γ – коефіцієнт розподілу тепла між тілами [4]; h, K, k – коефіцієнти термічної провідності контакту, тепло- і температуропровідності, відповідно.

Крайові умови (3), (4) неповного теплового контакту двох тіл із урахуванням теплоутворення від тертя запропонував Барбер [5]. З крайових умов (3) і (4) отримаємо іншу частіше уживану форму запису крайових умов Барбера:

$$-K^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} + \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} = 1, \quad \tau > 0, \quad (8)$$

$$K^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} + \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} = 1 - 2\gamma + 2\text{Bi} [T_1^*(0^+, \tau) - T_2^*(0^-, \tau)], \quad \tau > 0. \quad (9)$$

За $\gamma = 0,5$ з умови (9) випливає:

$$K^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} + \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} = 2\text{Bi} [T_1^*(0^+, \tau) - T_2^*(0^-, \tau)], \quad \tau > 0. \quad (10)$$

Систему крайових умов неповного теплового контакту (8), (10) вперше отримав Я. С. Підстригач [6, 7], а застосував до формулювання та розв'язування теплових задач тертя Д. В. Грилицький [8–11]. Зокрема, розв'язок теплової задачі тертя для двох різнорідних півпросторів із крайовими умовами (8), (10) побудовано у монографії [11].

Перейшовши в крайових умовах (9) чи (10) до границі $\text{Bi} \rightarrow \infty$, отримаємо умову рівності температур співдотичних тіл на поверхні контакту:

$$T_1^*(0^+, \tau) = T_2^*(0^-, \tau), \quad \tau > 0, \quad (11)$$

яка разом з умовою (8) утворює систему крайових умов повного теплового контакту під час фрикційного нагрівання Ф. Лінга [12]. Розв'язок теплової задачі тертя для двох півпросторів із крайовими умовами (8), (11) та нульовими початковими (6) має вигляд [13]

$$\begin{aligned} T_1^*(\zeta, \tau) &= 2\sqrt{\tau}(1+\varepsilon)^{-1} \operatorname{ierfc}(0,5\zeta/\sqrt{k^*\tau}), \quad \zeta \geq 0, \tau \geq 0, \\ T_2^*(\zeta, \tau) &= 2\sqrt{\tau}(1+\varepsilon)^{-1} \operatorname{ierfc}(-0,5\zeta/\sqrt{\tau}), \quad \zeta \leq 0, \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\varepsilon = K^*/\sqrt{k^*}$ – коефіцієнт теплової активності матеріалів фрикційної пари, $\operatorname{ierfc}(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \operatorname{erfc}(x)$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erf}(x)$ – функція помилок Гаусса [14].

Спрямувавши $Bi \rightarrow 0$, із крайових умов Барбера (3), (4) або (8), (9) отримуємо звичайні теплові крайові умови 2-го роду на поверхні півпросторів:

$$-K^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = \gamma, \quad \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} = 1 - \gamma, \quad \tau > 0. \quad (13)$$

Розв'язок задачі теплопровідності для півпросторів, що нагріваються на поверхні тепловими потоками сталої інтенсивності (13) за нульових початкових умов (6), відомий [15]:

$$\begin{aligned} T_1^*(\zeta, \tau) &= 2\sqrt{\tau} \gamma \varepsilon^{-1} \operatorname{ierfc}(0,5\zeta/\sqrt{k^*\tau}), \quad \zeta \geq 0, \quad \tau \geq 0, \\ T_2^*(\zeta, \tau) &= 2\sqrt{\tau}(1-\gamma) \operatorname{ierfc}(-0,5\zeta/\sqrt{\tau}), \quad \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Зазначимо, що перехід до границі $Bi \rightarrow 0$ у крайових умовах Підстригача–Грильського (8), (10) також приводить до двох задач теплопровідності для півпросторів, що нагріваються тепловими потоками однакової інтенсивності (13) за $\gamma = 0,5$.

Розв'язок задачі для сталої потужності тертя. Застосувавши до крайової задачі (1)–(6) пряме та обернене інтегральне перетворення Лапласа за числом Фур'є τ (7), знаходимо безрозмірні нестационарні температурні поля у півпросторах:

$$\begin{aligned} T_1^*(\zeta, \tau) &= \frac{2\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) - \\ &- \frac{\alpha}{\beta} \left[e^{\beta^2\tau + \beta \frac{\zeta}{\sqrt{k^*}}} \operatorname{erfc}\left(\beta\sqrt{\tau} + \frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) \right], \quad \zeta \geq 0, \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T_2^*(\zeta, \tau) &= \frac{2\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)} \operatorname{ierfc}\left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{\beta} \left[e^{\beta^2\tau - \beta\zeta} \operatorname{erfc}\left(\beta\sqrt{\tau} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) \right], \quad \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\alpha = \gamma/\varepsilon - 1/(1+\varepsilon), \quad \beta = Bi(1+\varepsilon)/\varepsilon. \quad (17)$$

Із формул (15) і (16) отримуємо температури робочих поверхонь:

$$T_1^*(0^+, \tau) = \frac{2}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{\alpha}{\beta} [e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) - 1], \quad \tau \geq 0, \quad (18)$$

$$T_2^*(0^-, \tau) = \frac{2}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{\alpha}{\beta} [e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) - 1], \quad \tau \geq 0 \quad (19)$$

та безрозмірні інтенсивності теплових потоків на них:

$$q_1^*(0^+, \tau) \equiv -K^* \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \alpha\varepsilon e^{\beta^2\tau} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}), \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$q_2^*(0^-, \tau) \equiv \left. \frac{\partial T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^-} = \frac{1}{1+\varepsilon} - \alpha \varepsilon e^{\beta^2 \tau} \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau}), \quad \tau \geq 0. \quad (21)$$

Підставивши співвідношення (18)–(21) до крайових умов (3) і (4), отримуємо тождності. Під час числового аналізу за формулами (15)–(21) можна скористатись наближенням [14]

$$e^{\beta^2 \tau} \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau}) \approx 1/(\beta \sqrt{\pi \tau}), \quad \tau \gg 1.$$

Перейшовши у формулах (15)–(17) до границь $Bi \rightarrow \infty$ та $Bi \rightarrow 0$, отримуємо розв'язки (12) та (14), відповідно.

Розв'язок задачі зі змінною з часом потужністю тертя. Розв'язок теплової задачі тертя (1)–(6) з питомою потужністю тертя, що зменшується лінійно із часом (гальмування зі сталим сповільненням впродовж часу $t = t_s$),

$$q(\tau) = q_0 q^*(\tau), \quad q^*(\tau) = 1 - \tau \tau_s^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad \tau_s = k_2 t_s / a^2, \quad (22)$$

знайдемо за допомогою формули Дюамеля [12]:

$$T_i^*(\zeta, \tau) = \int_0^\tau q^*(s) \frac{\partial}{\partial \tau} T_i^{(0)*}(\zeta, \tau - s) ds, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (23)$$

де безрозмірні температури $T_i^{(0)*}(\zeta, \tau)$, $i = 1, 2$ мають вигляд (15)–(17). Підставивши під знак інтеграла у формулі (23) функції $q(\tau)$ (22) та $T_i^{(0)*}(\zeta, \tau)$, $i = 1, 2$ (15)–(17), після інтегрування отримуємо:

$$T_i^*(\zeta, \tau) = T_i^{(0)*}(\zeta, \tau) - \tau_s^{-1} T_i^{*(1)}(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T_1^{*(1)}(\zeta, \tau) = & \frac{2\tau\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)} \left[\left(1 + \frac{\zeta^2}{6k^*\tau} \right) \operatorname{ierfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{4k^*\tau}} \right] - \\ & - \frac{\alpha}{\beta^3} \left\{ e^{\beta^2 \tau + \beta \frac{\zeta}{\sqrt{k^*}}} \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} + \frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) + 2\beta \sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) + \right. \\ & \left. + \beta^2 \tau \left[\frac{\zeta}{\sqrt{k^*\tau}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) \right] \right\}, \quad \zeta \geq 0, \\ T_2^{*(1)}(\zeta, \tau) = & \frac{2\tau\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)} \left[\left(1 + \frac{\zeta^2}{6\tau} \right) \operatorname{ierfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} \right] + \\ & + \frac{\alpha \varepsilon}{\beta^3} \left\{ e^{\beta^2 \tau - \beta \zeta} \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + 2\beta \sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right. \\ & \left. - \beta^2 \tau \left[\frac{\zeta}{\sqrt{\tau}} \operatorname{ierfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}, \quad \zeta \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

За досконалого теплового контакту півпросторів ($Bi \rightarrow \infty$) із формул (25) і (26) для $\zeta = 0$ знаходимо:

$$T_1^{*(1)}(0, \tau) = T_2^{*(1)}(0, \tau) = \frac{4\tau}{3(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \quad (27)$$

Підставивши розв'язки (12) (при $\zeta = 0$) та (27) у співвідношення (24), приходимо до відомої формули Фазекаша [16]:

$$T_1^*(0, \tau) = T_2^*(0, \tau) = \frac{2}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(1 - \frac{2\tau}{3\tau_s} \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s.$$

Перейшовши у формулах (25) і (26) до границі, коли $Bi \rightarrow 0$, отримаємо:

$$T_1^{*(1)}(\zeta, \tau) = \frac{4\gamma\tau\sqrt{\tau}}{3\varepsilon} \left[\left(1 + \frac{\zeta^2}{4k^*\tau} \right) \text{ierfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) - \frac{\zeta}{4\sqrt{k^*\tau}} \text{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{k^*\tau}} \right) \right], \quad \zeta \geq 0, \quad (28)$$

$$T_2^{*(1)}(\zeta, \tau) = \frac{4}{3}(1-\gamma)\tau\sqrt{\tau} \left[\left(1 + \frac{\zeta^2}{4\tau} \right) \text{ierfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{\zeta}{4\sqrt{\tau}} \text{erfc} \left(-\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad \zeta \leq 0. \quad (29)$$

При $\zeta = 0^\pm$ із формул (14), (24), (28) та (29) одержимо:

$$T_1^*(0^+, \tau) = \frac{2\gamma}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(1 - \frac{2\tau}{3\tau_s} \right), \quad T_2^*(0^-, \tau) = 2(1-\gamma) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(1 - \frac{2\tau}{3\tau_s} \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s.$$

Числовий аналіз. Обчислення виконано для фрикційної пари чавун ЧМНХ ($K_1 = 51 \text{ W/(mK)}$, $k_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) і металокераміка ФМК-11 ($K_2 = 34,3 \text{ W/(mK)}$, $k_2 = 15,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) [1]. Безрозмірні вхідні параметри задачі такі: просторова змінна ζ , час (число Фур'є) τ , час гальмування τ_s та число Біо Bi . Температури співдотичних тіл на безмежності однакові, тому коефіцієнт розподілу теплових потоків обчислювали за формулою Шаррона $\gamma = (1+\varepsilon)^{-1}$ [4]. Для вибраної фрикційної пари $\varepsilon = 1,549$, а $\gamma = 0,392$. Криві, побудовані для температур, знайдених із розв'язку теплової задачі тертя для двох різнорідних півпросторів із крайовими умовами Підстригача-Гриліцького (8), (10), на рис. рис. 2, 3 позначено додатково міткою $\gamma = 0,5$.

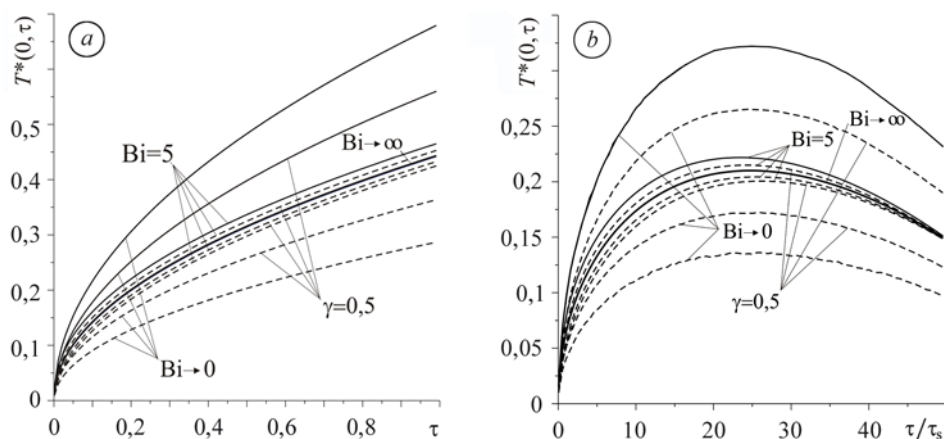


Рис. 2. Еволюція безрозмірної температури на поверхнях півпросторів за сталої потужності тертя (а) і під час гальмування зі сталим сповільненням (б).

Верхній півпростір – суцільні криві; нижній – штрихові.

Fig. 2. Evolution of the dimensionless temperature on the surface of semi-spaces for a constant value of the friction power (a) and during braking with constant retardation (b).

The top semi-space – solid curves; the bottom – dashed.

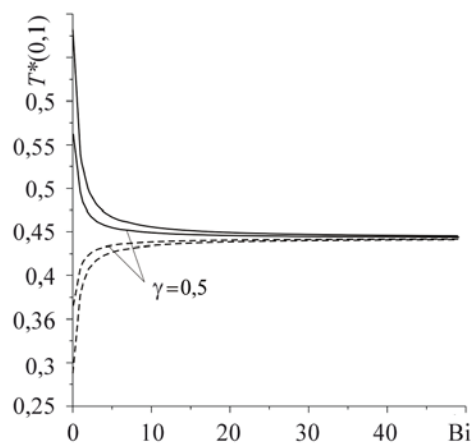


Рис. 3. Залежність безрозмірної температури на поверхнях півпросторів від числа Біо за сталої потужності тертя і $\tau = 1$. Верхній півпростір – суцільні криві; нижній – штрихові.

Fig. 3. Dependence of the dimensionless temperature on the surface of semi-spaces on the Biot number for a constant value of the friction power and $\tau = 1$. The top semi-space – solid curves; the bottom – dashed.

Врахування термоопору поверхні контакту в крайових умовах Барбера (3), (4) призводить до появи на ній стрибка температур поверхонь півпросторів (див. рис. 1). Найбільша різниця температур співдотичних тіл для $Bi \rightarrow 0$, коли термоопір поверхні контакту є настільки значний, що дає змогу розглядати задачу про фрикційне нагрівання кожного півпростору окремо. Зі зменшенням термоопору (збільшенням термічної провідності контакту – числа Біо) температури поверхонь півпросторів вирівнюються.

Температура, обчислена за припущення про розподіл тепла між співдотичними тілами в рівних частинах ($\gamma = 0,5$), суттєво відрізняється від температури, знайденої за точного значення $\gamma = 0,392$, для значень числа Біо $0 \leq Bi \leq 10$ (рис. 3).

Еволюцію температури для змінної з часом потужності тертя (гальмування зі сталим сповільненням) можна умовно поділити на три періоди (рис. 2b). Перший ($0 \leq \tau/\tau_s \leq 0,2$) характеризується великою швидкістю ковзання та низькою температурою робочих поверхонь. Впродовж другого періоду $0,2 \leq \tau/\tau_s \leq 0,7$ швидкість ковзання ще значна, а температура співдотичних поверхонь швидко підвищується і приблизно посередині гальмівного шляху досягає максимального значення та починає знижуватись. При $0,7 \leq \tau/\tau_s \leq 1$ швидкість ковзання близька до нуля, а температура знижується. Якісний вплив числа Біо та коефіцієнта розподілу теплових потоків на температуру такий же, як і за сталої потужності тертя.

ВИСНОВКИ

Найзагальнішими крайовими умовами неповного теплового контакту на поверхні тертя на сьогодні є умови Барбера (3), (4) або (8), (9). Вони допускають безпосередні граничні переходи як до повного теплового контакту тіл, що труться ($h \rightarrow \infty$), так і до повного їхнього відокремлення і розгляду теплових задач тертя окремо для кожного елемента фрикційної пари ($h \rightarrow 0$). Теплові крайові умови Підстригача–Гриліцького (8), (10) отримуємо, поклавши $\gamma = 0,5$ в умовах Барбера (8), (9), тобто нав'язавши трибосистемі однакову кількість тепла, що поглинається кожним зі співдотичних тіл. Однак таке припущення є правомірне, якщо теплофізичні властивості цих тіл однакові чи незначно відрізняються, або робочі поверхні тіл є достатньо гладенькі, щоб знехтувати контактним термоопором.

Слабким місцем теплових крайових умов Барбера є додатковий вхідний параметр – коефіцієнт розподілу теплових потоків γ . Тільки за фрикційного контакту півпросторів із однаковими температурами на безмежності вищенаведена формула Шаррона для знаходження γ є точна. Більшість інших формул для визначення γ отримані на підставі експериментальних даних. Чітких рекомендацій щодо вибору тієї чи іншої формули практично немає, а їх вплив на температуру може бути значним [17].

У формулюванні теплової задачі тертя із крайовими умовами Підстригача–Грилицького коефіцієнт розподілу теплових потоків є вихідним параметром – його знаходять з умов рівності знайдених попередньо середніх або максимальних температур на поверхні контакту. Недоліком цього варіанту крайових умов є неточність в обчисленні відповідної температури для малих значень коефіцієнта термічної провідності.

РЕЗЮМЕ. Получено аналитическое решение нестационарной тепловой задачи трения для двух полупространств с обобщенными граничными условиями Дж. Барбера при постоянной удельной мощности трения. На его основании с помощью формулы Дюамеля построено решение тепловой задачи трения при торможении с постоянным замедлением. Для фрикционной пары чугун–металокерамика исследовано влияние коэффициентов термической проводимости контакта и распределения тепловых потоков на температурное поле трибосистемы.

SUMMARY. The analytical solution of a non-stationary thermal problem of friction for two semi-spaces with J. Barber generalized boundary conditions at the constant value of the specific capacity of friction was obtained. On the basis of this solution by means of Duhamel formula the corresponding solution of a thermal friction problem during braking with constant retardation was constructed. For a friction couple cast iron-metal ceramic the influence of the coefficients of thermal conductivity of the contact and distribution of the heat fluxes on the temperature field in tribosystem was investigated.

Роботу виконано в межах гранту № 2011/01/B/ST8/07446 Національного Центру Науки Республіки Польща.

1. *Расчет, испытание и подбор фрикционных пар* / А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатъева. – М.: Наука, 1979. – 268 с.
2. *Yevtushenko A. A. and Kuciej M.* One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – **55**, № 15–16. – P. 4148–4153.
3. *Беляков Н. С., Носко А. П.* Неидеальный тепловой контакт тел при трении. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2010. – 104 с.
4. *Переверзева О. В., Балакин В. А.* Распределение теплоты между трущимися телами // *Трение и износ.* – 1992. – **13**, № 3. – С. 507–516.
5. *Barber J. R.* The conduction of heat from sliding solids // *Int. J. Heat. Mass Tran.* – 1970. – **13**, № 5. – P. 857–869.
6. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту тіл // *Доп. АН УССР.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
7. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // *Инж.-физ. журнал.* – 1963. – **1**, № 10. – С. 129–136.
8. *Грилицький Д. В.* Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стаціонарному тепловиділенні на площадці контакту // *Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1984. – Вип. 22. – С. 29–34.
9. *Грилицький Д. В., Баран В. П.* Про постановку контактних задач термопружності при неідеальному тепловому контакті тіл // *Там же.* – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
10. *Грилицький Д. В., Євтушенко О. О.* Контактні задачі термопружності з врахуванням теплоутворення // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1992. – Вип. 35. – С. 93–100.
11. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Ін-т змісту і методів навчання Міністерства освіти України, 1996. – 204 с.
12. *Ling F. F.* A quasi-iterative method for computing interface temperature distribution // *Z. Angew. Math. Phys.* – 1959. – **10**, № 5. – С. 461–475.
13. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
15. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
16. *Fazekas G. A. G.* Temperature gradient and heat stresses in brakes drums // *SAE. Trans.* – 1953. – **61**, № 1. – P. 279–284.
17. *Yevtushenko A. and Grzes P.* Finite element analysis of heat partition in a pad/disc brake system // *Numerical Heat Transfer, Part A.* – 2011. – **59**, № 7. – P. 521–542.

Одержано 13.07.2012