УДК 539.3

ПРУЖНЕ ЕЛІПСОЇДАЛЬНЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ТІЛІ ЗА ДІЇ СТАЛОЇ ТЕМПЕРАТУРИ НА ПОВЕРХНІ ЇХ З'ЄДНАННЯ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Отримано точний розв'язок системи трьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь термопружної задачі для простору з пружним еліпсоїдальним включенням. Вважали, що на поверхні з'єднання матриця–включення діє стала температура. У результаті одержано формули для обчислення концентрації напружень біля включення та напружень у ньому, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_{\rm I}$ для еліптичної тріщини і абсолютно жорсткого пластинчастого еліптичного включення. Проаналізовано вплив форми включення на концентрацію напружень для часткових випадків задачі.

Ключові слова: *система інтегро-диференціальних рівнянь, пружне еліпсоїдальне включення, стала температура на поверхні з'єднання матриця–включення.*

Основними параметрами для визначення міцності та довговічності тіл з пружним включенням за дії температурного поля служать коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень для відповідних термопружних задач. Задачі для жорсткого пластинчастого еліптичного і пружного еліпсоїдального включень за умови, що в тілі з включенням підтримується стала температура, розглянуті раніше [1, 2]. Також досліджено плоску задачу для тонкого жорсткого [3] і пружного еліптичного [4] включень за сталої температури. Нижче розв'язано термопружну задачу та визначено концентрацію напружень і відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) $K_{\rm I}$ для пружного еліпсоїдального включення у тілі за дії сталої температури на поверхні його з'єднання з матрицею.

Формулювання задачі і її розв'язок. Нехай у тривимірному тілі міститься пружне ($0 \le \varepsilon = E_1 / E < \infty$, E_1, E – відповідно модулі Юнґа включення та матриці) еліпсоїдальне ($x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$, $c << a, b$, $b \le a$) включення. Вважаємо, що на межі з'єднання матриці з включенням має місце ідеальний тепловий і механічний контакти. Припускаємо, що тіло вільне від зовнішніх зусиль, а на поверхнях з'єднання $z = \pm h = \pm c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ діє стала температура $T_1(1 + c/b) = \text{const}$. Вважаємо, що в однорідному тілі температура рівна нулю, оскільки відсутня поверхня з'єднання. Задача полягає у визначенні напружень у включенні та матриці біля нього і, згідно з працею [5], зводиться до такої системи трьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi G}\left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{3-i}^2}\right)\iint_S \left[\tilde{\sigma}_{z\lambda_i}\right]_* \ln(\lambda_i - \xi_i + R)\, d\xi d\eta + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_{3-i}} \iint_S \left[\tilde{\sigma}_{z\lambda_{3-i}}\right]_* \times$$

$$\times \ln(\lambda_i - \xi_i + R)\, d\xi d\eta + \frac{1}{hG_1}\int_{-a_i}^{\lambda_i} \left[\tilde{\sigma}_{z\lambda_i}\right]_* d\lambda_i + D_3 \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta =$$

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: matematyka@i.ua

$$= D_4 \iint_S \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right]_* \frac{d\xi d\eta}{R} + A_i ;$$

$$D_7 \iint_S \left(\left[\tilde{\sigma}_{zx} \right]_* \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} + \left[\tilde{\sigma}_{zy} \right]_* \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} \right) d\xi d\eta + D_6 \Delta \iint_S \frac{\left[\tilde{u}_z \right]_* d\xi d\eta}{R} - \qquad (1)$$

$$- \frac{2d_4}{d_6 h} \left[\tilde{u}_z \right]_* = - D_9 \iint_S \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right]_* \frac{d\xi d\eta}{R} \ , \quad (x, y) \in S ,$$

$$\left(i = 1,2;\ \lambda_1 = x;\ \lambda_2 = y;\ \xi_1 = \xi;\ \xi_2 = \eta;\ a_1 = a;\ a_2 = b \right).$$

Тут S – еліптична область $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 \le 1$; $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$; $\left[\tilde{u}_z \right]_*$, $\left[\tilde{\sigma}_{zx} \right]_*$, $\left[\tilde{\sigma}_{zy} \right]_*$ – невідомі стрибки збурених зміщень та напружень для тріщини, на поверхнях якої $z = \pm 0$ діють напруження, знесені з поверхонь включення $z = \pm h$; A_i – довільні сталі, які підлягають визначенню;

$$D_1 = \left(\mu_1 G d_3 - \kappa G_1 \right) \left(2 G_1 d_1 d_4 \right)^{-1}; \quad D_2 = \left(2 G \mu_1 d_3 + G_1 d_4 - G_1 \kappa d_3 \right) \left(8 \pi G G_1 d_1 d_4 \right)^{-1};$$

$$D_3 = \left(G_1 d_3 + \mu G \right) \left(2 \pi G_1 d_1 d_4 \right)^{-4}; \quad D_4 = \alpha d_2 \left(G_1 - \mu_1 G \right) \left(2 \pi G_1 d_1 d_4 \right)^{-1} - d_5 \alpha_1 \left(\pi d_4 \right)^{-1};$$

$$D_6 = \left(G d_6 - G_1 \mu_1 d_3 \right) \left(2 \pi G_1 d_1 d_6 \right)^{-1}; \quad D_7 = \left(G d_3 d_6 + G_1 \mu_1 \kappa \right) \left(4 \pi G G_1 d_1 d_6 \right)^{-1};$$

$$D_9 = \alpha d_2 \left(G d_6 + G_1 \mu_1 \right) \left(2 \pi d_1 d_6 G_1 \right)^{-1} - \alpha_1 d_5 \left(\pi d_6 \right)^{-1}; \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 ;$$

$d_1 = 1 - \mu$; $d_2 = 1 + \mu$; $d_3 = 1 - 2\mu$; $d_4 = 1 - \mu_1$; $d_5 = 1 + \mu_1$; $d_6 = 1 - 2\mu_1$; $\kappa = 3 - 4\mu$; μ_1, μ – коефіцієнти Пуассона включення і матриці, відповідно; $G_1 = E_1 / (2 d_5)$; $G = E / (2 d_2)$; α_1, α – коефіцієнти теплового розширення відповідно включення і матриці.

Оскільки на межі матриця–включення існує ідеальний тепловий контакт, тобто має місце рівність температури і теплового потоку зі сторони включення та матриці, одержимо [5]:

$$\iint_S \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right]_* \frac{d\xi d\eta}{R} = -4\pi T_1 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right), \quad \lambda = \frac{b}{c}. \qquad (2)$$

Подамо розв’язок системи рівнянь (1) у вигляді таких функцій:

$$\left[\tilde{u}_z \right]_* = C_1 \sqrt{1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2}; \quad \left[\tilde{\sigma}_{zx} \right]_* = C_2 x / \sqrt{1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2};$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zy} \right]_* = C_3 y / \sqrt{1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2}, \qquad (3)$$

де C_1, C_2, C_3 – невідомі сталі.

Підставляючи вирази (3) в інтегральні рівняння (1) та враховуючи співвідношення (2) для визначення сталих C_1, C_2, C_3, одержимо формули:

$$C_1 = a^2 \left(E(k) \left(2\pi D_7 Q_1 - D_1 Q_2 / G \right) + \lambda Q_2 / G_1 \right) / \left(b C_4 \right);$$

$$C_2 = \left(-2\pi E(k) \left(D_3 Q_2 - D_6 Q_1 \right) / b + 2 d_4 \lambda Q_1 / \left(b d_6 \right) \right) / C_4; \quad C_3 = a^2 C_2 / b^2, \qquad (4)$$

де
$$Q_1 = -4 T_1 \left(1 + 1/\lambda \right) \left(\alpha d_2 \left(G_1 - \mu_1 G \right) / \left(2 d_1 G_1 \right) - \alpha_1 d_5 \right) / d_4 ;$$

$$Q_2 = 4 T_1 \left(1 + 1/\lambda \right) \left(\alpha d_2 \left(G d_6 + \mu_1 G_1 \right) / \left(2 d_1 G_1 \right) - \alpha_1 d_5 \right) / d_6 ;$$

$$C_4 = 2a^2 \left[d_4 E(k) \left(D_1 G_1 \lambda - G E(k) \right) / G - \lambda \left(\pi D_6 d_6 E(k) + \lambda d_4 \right) \right] / \left(G_1 b^2 d_6 \right);$$

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\,;\quad k^2=\frac{(a^2-b^2)}{a^2};\quad A_1=A_2=0\,.$$

На основі результатів праці [5] і співвідношень (3) для обчислення напружень у пружному еліпсоїдальному включенні одержимо подання:

$$\sigma_{zz}=E(k)\left(a^2d_3C_2/2-GC_1\right)/(2bd_1)-\alpha d_2GT_1(1+\lambda)/(d_1\lambda)\,;$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=C_2\lambda a^2/(2b),\quad (x,y)\in S\,. \tag{5}$$

Якщо $\varepsilon\to\infty$, $\alpha_1=0$, то із подань (5) матимемо формули

$$\sigma_{zz}=-2T_1(1+1/\lambda)\alpha d_2G/\kappa\,;\ \sigma_{xx}=\sigma_{yy}=2T_1(1+\lambda)\alpha d_2G/\left(\kappa E(k)\right),\ (x,y)\in S \tag{6}$$

для обчислення напружень в абсолютно жорсткому еліпсоїдальному включенні, з яких при $\lambda\to\infty$ ($c\to 0$) отримаємо пластинчасте абсолютно жорстке еліптичне включення, при цьому $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}\to\infty$.

Користуючись рухомою прямокутною системою координат O_1ntz з початком на контурі області S, зі співвідношень (3) одержуємо асимптотичні формули

$$[\tilde{u}_z]'_{*n}=-C_1\sqrt{f(\varphi)}/\sqrt{-2abn}+O(n)\,;\quad [\tilde{\sigma}_{zn}]_*=C_2\,a\sqrt{a\,f(\varphi)}/\sqrt{-2nb}+O(n) \tag{7}$$

для стрибків дотичних напружень $[\tilde{\sigma}_{zn}]_*$ і похідної по n від стрибка переміщень $[\tilde{u}_z]'_{*n}$ у малому околі точок контуру включення. Тут O_1n – нормаль до контуру області S, φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса, $f(\varphi)=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$.

Коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ для еліптичної тріщини, на берегах якої діють напруження, знесені з поверхонь $z=\pm h$ еліпсоїдального пружного включення, обчислимо згідно з результатами праці [5] і виразами (7):

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda)=\sqrt{\pi f(\varphi)}\left(2GC_1-a^2d_3C_2\right)/\left(4d_1\sqrt{ab}\right). \tag{8}$$

Спрямувавши у формулі (8) $\varepsilon\to 0$, одержуємо подання

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda)=T_1\alpha d_2G(1+1/\lambda)\sqrt{\pi bf(\varphi)}/\left(d_1E(k)\sqrt{a}\right), \tag{9}$$

з якого, поклавши $\lambda\to\infty$, матимемо формулу для обчислення КІН $K_{\mathrm{I}}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ для еліптичної [6], а при $a=b$ – кругової тріщини.

Якщо $\varepsilon\to\infty$, $\alpha_1=0$, то із виразу (8) отримаємо

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda)=-T_1\alpha d_2d_3G(1+1/\lambda)\sqrt{\pi bf(\varphi)}/\left(d_1\kappa E(k)\sqrt{a}\right) \tag{10}$$

для еліптичної тріщини, на берегах якої діють напруження, знесені з поверхні еліпсоїдального абсолютно жорсткого включення. Якщо у поданні (10) перейти до границі $\lambda\to\infty$ ($c\to 0$), то матимемо K_{I} для пластинчастого абсолютно жорсткого еліптичного включення.

Для визначення концентрації напружень $\tilde{\sigma}_{zz}$ біля еліпсоїдального пружного включення у матриці на основі результатів праці [5] і подання (8), матимемо співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{zz}=(2GC_1+a^2\mu C_2)/(2d_1c)\,. \tag{11}$$

Перейшовши у виразі (11) до границі $\varepsilon\to 0$, одержимо подання

$$\tilde{\sigma}_{zz}=-2T_1d_2\alpha G(1+\lambda)/\left(d_1E(k)\right) \tag{12}$$

для обчислення концентрації напружень біля еліпсоїдальної порожнини. Звідси, за умови, що $a = b$ або $\lambda \to \infty$, одержуємо часткові випадки для сфероїдальної порожнини або еліптичної тріщини ($\tilde{\sigma}_{zz} \to \infty$).

Якщо у виразі (11) вважати, що $\varepsilon \to \infty$, то матимемо співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{zz} = 2T_1\mu\alpha d_2 G\left(1+\lambda\right)/\left(d_1\kappa E\left(k\right)\right) \tag{13}$$

для обчислення концентрації напружень у матриці біля абсолютно жорсткого еліпсоїдального, сфероїдального ($a = b$), пластинчастого ($\lambda \to \infty$) включення.

Зауважимо, що $K_{\mathrm{I}} = \lim\limits_{\lambda\to\infty} K_{\mathrm{I}}\left(\lambda\right)$ у формулі (10) отримано на основі виразу (8) через стрибки зміщень та напружень відповідної тріщини. Якщо для обчислення K_{I} користуватися формулою згідно з працею [5], що виражає K_{I} через концентрацію напружень σ_{zz} (13) у матриці, тобто $K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi}\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\rho}\,\sigma_{zz}/2$ ($\rho = bf(\varphi)/(a\lambda^2)$ – радіус закруглення вершини включення), то одержуємо вираз

$$K_{\mathrm{I}} = T_1\mu\alpha d_2 G\sqrt{\pi bf\left(\varphi\right)}/\left(d_1\kappa E\left(k\right)\sqrt{a}\right), \tag{14}$$

для пластинчастого абсолютно жорсткого включення, який відрізняється від подання (10) (при $\lambda \to \infty$). Для тріщини, де контактні напруження відсутні, K_{I} однаковий незалежно від того, яку з формул використовувати для його визначення.

РЕЗЮМЕ. Получено точное решение системы трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений термоупругой задачи для пространства с теплопроводящим упругим эллипсоидальным включением. Считали, что на поверхности соединения матрица–включение действует постоянная температура. В результате получены формулы для вычисления концентрации напряжений возле включения и напряжений в нем, а также коэффициентов интенсивности напряжений K_{I} для эллиптической трещины и абсолютно жесткого пластинчатого эллиптического включения. Проанализировано влияние формы включения на концентрацию напряжений для частных случаев задачи.

SUMMARY. The exact solution for a system of three singular integro-differential equations for thermoelastic problem is obtained. The problem for an infinite body with an elastic heat-conducting ellipsoidal inclusion is considered. It is assumed that the temperature on the matrix-inclusion separating surface is constant. As the result the formulae for both stress concentration near and at the inclusion and also the stress intensity factor K_{I} for an elliptical crack or for rigid lamellar elliptical inclusion is obtained. The influence of the inclusion shape on the stress concentration is analyzed too.

1. *Подильчук Ю. Н., Добривечер В. В.* О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением // Прикл. механика. – 1996. – № 1. – С. 11–17.
2. *Стадник М. М.* Пружне включення довільної жорсткості у просторі під одновісним навантаженням і рівномірним нагріванням // Машинознавство. – 2009. – № 6. – С. 9–12.
3. *Sekine H.* Thermal stress problem for a ribbon – like inclusion // Len. Appl. and Engng Sci. – 1977. – № 5. – P. 51–61.
4. *Стадник М. М.* Пружне включення у пластині під дією двовісного навантаження і рівномірного нагріву // Машинознавство. – 2010. – № 1–2. – С. 3–7.
5. *Стадник М. М.* Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 6. – С. 30–40.

   (*Stadnyk M. M.* A Method for the Solution of Three-Dimensional Thermoelasticity Problems for Bodies with Thin Inclusions // Materials Science. – 1994. – **30**, № 6. – P. 643–652.)
6. *Kassier M. K.* On the distribution of thermal stresses near an elliptical crack in an intinite elastic body // Int. J. Engng Sci. – 1969. – **7**, № 8. – P. 53–60.

Одержано 11.12.2012