

УДК 539.3

ВПЛИВ ГАЗОНАПОВНЕНОЇ ПОРОЖНИНИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ НА НАПРУЖЕННЯ В ОКОЛІ СУСІДНЬОЇ ТРІЩИНИ

Б. М. СТАСЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Методом граничних елементів розв'язано задачу моделювання напружено-деформованого стану в безмежному пружному ізотропному тілі, що містить тріщину та газонаповнену порожнину довільної форми. Отримано систему шести граничних інтегральних рівнянь для визначення компонент переміщень на поверхні порожнини та стрибків переміщень на поверхні тріщини. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень на контурі круглої плоскої тріщини залежно від її розташування відносно порожнини, від форми порожнини та внутрішнього тиску в ній.

Ключові слова: *тріщина, газонаповнена порожнина, метод граничних елементів, метод граничних інтегральних рівнянь, сланцевий газ.*

Видобування нетрадиційних видів газу (сланцевий, метан вугільних родовищ) – важлива частина розв'язання проблеми енергетичної залежності України. Найпоширенішою сьогодні технологією видобування такого газу є розтріскування пористої газоносної породи методом гідравлічного удару. У зв'язку із екологічними загрозами від застосування гідророзривів важливо детально вивчити механізми руйнування крихких та квазікрихких пористих матеріалів газоносної породи, зокрема, проаналізувати взаємодіючі концентратори напружень типу тріщин та газонаповнених порожнин.

Дослідження граничної рівноваги тріщини в околі газонаповненої порожнини складної форми пов'язане зі значними математичними труднощами визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у точках контуру тріщини. Відомі [1] розв'язки відповідних задач у двовимірній поставі. Проте, як зауважено в праці [2], деформований стан навіть в околі тонких включень чи порожнин може відрізнятися на 30%, коли використовувати плоскі та просторові моделі постави задач. Аналітичні методи розв'язування просторових задач теорії пружності для тіл з тріщинами та порожнинами ефективні тільки за розташування тріщини поблизу порожнини канонічної форми [3, 4]. Якщо тріщина має невеликий розмір порівняно з радіусами кривини поверхні порожнини, то допускається ідеалізація тіла з тріщиною до рівня півпростору [5, 6]. Такі спрощення неприйнятні, щоб виявити особливості впливу від'ємної та додатної кривини поверхні порожнини на концентрацію напружень біля вершини тріщини та внутрішнього тиску в газонаповненій порожнині на напружено-деформований стан (НДС) тіла з тріщиною. Таким чином, для розв'язування просторових задач теорії пружності для тіл з дефектами складної форми доцільний числовий метод, який знімає всі обмеження на топологію концентраторів напружень. Нижче для розв'язування задачі про безмежне пружне ізотропне тіло, що містить плоску тріщину та газонаповнену порожнину довільної форми, вибрано метод граничних елементів.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежне пружне ізотропне тіло Ω , що містить газонаповнену порожнину довільної форми, яка обмежена гладкою по-

Контактна особа: Б. М. СТАСЮК, e-mail: stasyuk.bohdan.m@gmail.com

верхню S_P із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. Нехай поблизу порожнини розташована плоска тріщина довільної форми. Область S_T , яку займає тріщина, обмежена гладким контуром L (рис. 1). Механічні властивості тіла визначають модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона ν . Тіло знаходиться під дією статичного навантаження, яке створює за відсутності неоднорідностей відоме первинне поле переміщень $\mathbf{u}^{(0)}(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ і пов'язане з ним законом Гука поле напружень

$\sigma_{ij}^{(0)}(i, j = \overline{1,3})$. Крім того, поверхня S_P навантажена тиском p газу, що перебуває в порожнині. Поверхні тріщини вільні від навантажень.

У центрі тріщини виберемо систему координат $O_T x_1 x_2 x_3$ так, щоб вісь $O_T x_3$ була перпендикулярною до поверхні тріщини. Іншу систему координат $O_P y_1 y_2 y_3$ виберемо в центрі порожнини. Взаємне розташування дефектів та орієнтацію тріщини відносно порожнини у тілі характеризуватимемо такими величинами: d – віддаллю між центрами обох концентраторів напружень, напрямними косинусами e_j та e_j^* ($j = \overline{1,3}$) вектора \mathbf{d} у системах координат $O_P y_1 y_2 y_3$ та $O_T x_1 x_2 x_3$ відповідно, а також косинусами $l_{ij} = \cos(O_T x_i, \widehat{O_P y_j})$ ($i, j = \overline{1,3}$) кутів між координатними осями.

Компоненти тензора напружень та вектора переміщень точок тіла за принципом суперпозиції подамо так:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^P(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^T(\mathbf{x}), \\ u_i(\mathbf{x}) &= u_i^{(0)}(\mathbf{x}) + u_i^P(\mathbf{x}) + u_i^T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\sigma_{ij}^P(\mathbf{x})$, $u_i^P(\mathbf{x})$ – напруження та переміщення у пружному просторі, викликані порожниною, поверхня якої знаходиться під внутрішнім тиском p ; $\sigma_{ij}^T(\mathbf{x})$, $u_i^T(\mathbf{x})$ – відповідні характеристики НДС пружного простору, зумовленого розкриттям тріщини.

Пряме формулювання методу граничних елементів ґрунтується на інтегральних поданнях Сомільяно в переміщеннях [7]:

$$\begin{aligned} u_i^P(\mathbf{y}) &= - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_P} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j(\xi) dS_\xi + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_P} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j(\xi) dS_\xi, \\ \mathbf{y} \in \Omega, \quad i &= \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (2)$$

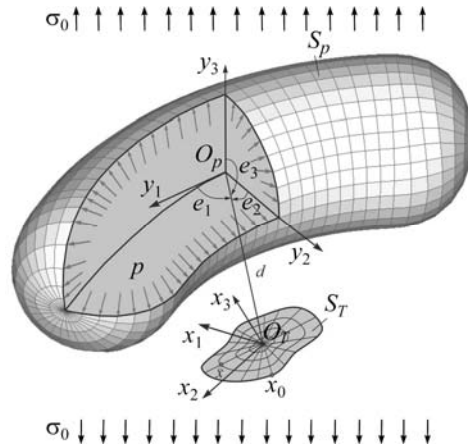


Рис. 1. Схема розташування газонаповненої порожнини та тріщини в тілі з покриттям їх поверхонь сіткою граничних елементів.

Fig. 1. Scheme of location of a gas-filled cavity and a crack in a body with the boundary elements mesh on their surfaces.

де $u_j(\xi)$, $t_j(\xi)$ ($\xi \in S_P$) – значення компонент векторів переміщень та зусиль у точках поверхні порожнини з боку нормалі \mathbf{n} ; U_{ij} та T_{ij} – відомі ядра типу ньютонівського потенціалу з порядком особливості $|\mathbf{y} - \xi|^{-1}$ та $|\mathbf{y} - \xi|^{-2}$ відповідно за наближення точки \mathbf{y} до точки інтегрування ξ .

Диференціюючи інтегральні подання переміщень (2) та підставляючи отримані співвідношення в закон Гука, отримуємо відповідні зображення для компонент тензора напружень [7]:

$$\sigma_{ij}^P(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^3 \left[\iint_{S_P} D_{ijm}(\mathbf{y}, \xi) p n_m(\xi) dS_\xi - \iint_{S_P} L_{ijm}(\mathbf{y}, \xi) u_m(\xi) dS_\xi \right],$$

$$\mathbf{y} \in \Omega, \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (3)$$

Ядра D_{ijm} та L_{ijm} з порядками особливості $|\mathbf{y} - \xi|^{-2}$ та $|\mathbf{y} - \xi|^{-3}$ залежать від механічних характеристик матеріалу тіла та напрямку нормалі до поверхні S_P у точці інтегрування ξ [7].

Аналогічні інтегральні подання параметрів НДС, зумовлені розкриттям тріщини, отримані раніше [8]. Переміщення точок тіла в напрямку осей системи координат $O_T x_1 x_2 x_3$, спричинені розкриттям тріщини, запишемо в явному вигляді:

$$u_i^T(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T} \Phi_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \alpha_j(\xi) d_\xi S, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

$$\text{де } \Phi_{ii}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{x_3}{2(1-\nu)|\mathbf{x} - \xi|^3} \left(1 - 2\nu + \frac{3(x_i - \xi_i)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \right);$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{(x_i - \xi_i)^{1-\delta_{i3}} (x_j - \xi_j)^{1-\delta_{j3}}}{2(1-\nu)|\mathbf{x} - \xi|^3} \left((1-2\nu)(\delta_{j3} - \delta_{i3}) + \frac{3x_3^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \right), \quad (i \neq j);$$

δ_{ij} – символ Кронекера; функції $\alpha_j(\xi)$ є функціями розкриття тріщини у напрямі осей $O_T x_j$, тобто $\alpha_j(\xi) = (u_j^-(\xi) - u_j^+(\xi)) / 4\pi$.

Компоненти тензора напружень подамо так:

$$\sigma_{ij}^T(\mathbf{x}) = \frac{G}{1-\nu} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_T} K_{ijm}(\mathbf{x}, \xi) \alpha_m(\xi) dS_\xi, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

$$\text{де } K_{ijm}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{a_{ijm}}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{b_{ijm}(\mathbf{x}, \xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} + \frac{c_{ijm}(\mathbf{x}, \xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^7}; \quad |\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2};$$

коефіцієнти a_{ijm} , $b_{ijm}(\mathbf{x}, \xi)$, $c_{ijm}(\mathbf{x}, \xi)$ отримані в явному вигляді раніше [9].

Крайові умови на поверхні порожнини в локальній системі координат $O_P y_1 y_2 y_3$ набудуть вигляду

$$\sigma_{nj}(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y} \in S_P} = p n_j(\mathbf{y}), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

а на поверхні тріщини, що перебуває в безмежному однорідному тілі, в системі координат $O_T x_1 x_2 x_3$ будуть:

$$\sigma_{3j}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x} \in S_T} = 0, \quad j = \overline{1,3}. \quad (7)$$

Виведення системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Здійснимо граничний перехід у другому рівнянні системи (1) до точки \mathbf{y} на поверхні порожнини в системі координат $O_P y_1 y_2 y_3$ з урахуванням подань (2), (4), крайових умов (6) на поверхні тріщини та відомих граничних властивостей пружних потенціалів простого і подвійного шарів [7]. Як результат матимемо систему трьох сингулярних інтегральних рівнянь відносно компонент вектора переміщень точок поверхні порожнини ($i = \overline{1,3}$):

$$u_i(\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_P} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) [u_j(\xi) - u_i(\mathbf{y})] dS_\xi - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T} \Phi_{ij}(\mathbf{y}^*, \xi) l_{ij} \alpha_j(\xi) dS_\xi = u_i^{(0)}(\mathbf{y}) - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_P} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j(\xi) dS_\xi, \quad \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \in S_P, \quad i = \overline{1,3}. \quad (8)$$

Тут і надалі індексом “*” позначатимемо координати точки, яка лежить на поверхні одного дефекту, записані в локальній системі координат, прив’язаній до іншого дефекту. Перетворення координат точки поверхні порожнини за переходу від однієї системи координат до іншої задає вираз $y_i^* = e_i d + \sum_{s=1}^3 l_{si} y_s$, $i = \overline{1,3}$.

Граничним переходом у першому рівнянні системи (1) до точки \mathbf{x} на поверхні тріщини в системі координат $O_T x_1 x_2 x_3$ з урахуванням інтегральних подань (3), (5) та крайових умов (7) отримуємо систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу:

$$\frac{G}{1-\nu} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_T} K_{i3m}(\mathbf{x}, \xi) \alpha_m(\xi) dS_\xi + \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \iint_{S_P} L_{sjm}(\mathbf{x}^*, \xi) l_{3s} l_{ji} u_m(\xi) dS_\xi = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(0)} l_{3m} l_{ji} + p \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \iint_{S_P} D_{sjm}(\mathbf{x}^*, \xi) l_{3s} l_{ji} n_m(\xi) dS_\xi, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in S_T, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9)$$

Координати точки \mathbf{x}^* на поверхні тріщини запишемо в системі координат $O_T x_1 x_2 x_3$: $x_i^* = e_i^* d + \sum_{s=1}^2 l_{is} x_s$.

Таким чином, отримано замкнуту систему шести сингулярних та гіперсингулярних ГІР (8), (9) відносно невідомих компонент вектора переміщень точок поверхні порожнини та функцій розкриття тріщини.

Метод граничних елементів розв’язування системи ГІР. Апроксимуємо поверхні S_P та S_T неперервною сукупністю чотирикутних (восьмивузлових) і трикутних (шестивузлових) криволінійних граничних елементів (рис. 1). Дискретизуємо систему ГІР (8), (9), розкладаючи інтеграл по кожній області на суму інтегралів по відповідних граничних елементах та подаючи невідомі функції і ядра інтегральних рівнянь через їх значення у вузлах граничних елементів. При цьому, зважаючи на різний ступінь особливості інтегральних ядер у рівняннях (8) та (9), застосовуватимемо комбінацію супер- та ізопараметричних граничних елементів.

Суперпараметричні граничні елементи використовуватимемо для дискретизації області S_P поверхні порожнини. За числового інтегрування по граничному елементу S_q відобразимо його внутрішність на плоску область S_q^* (квадратної форми для восьмивузлового граничного елемента і трикутної – для шестивузло-

вого), використовуючи апроксимацію по всіх вузлах граничного елемента. При цьому координати точки інтегрування виразимо через координати вузлів граничного елемента та його функції форми, а компоненти вектора переміщень точок поверхні порожнини білінійно інтерполюємо через їх значення в кутових (непарних) вузлах елемента [7].

Якщо точка u не належить до області граничного елемента, за яким інтегрують, то інтеграл в рівняннях (8) регулярні і їх можна обчислити з допомогою формули Гауса–Лежандра. Числовий експеримент виявив задовільну точність обчислень вже за другого порядку квадратур.

Для знаходження сингулярних інтегралів, перш ніж застосувати формули Гауса–Лежандра, необхідно виконати числову регуляризацію. Одним з найефективніших методів такої регуляризації слабо сингулярних двовимірних інтегралів є метод регуляризувальних відображень [7], який полягає у розбитті області інтегрування на трикутні підобласті та застосуванні до них відображень, якобіан яких перетворюється в нуль у сингулярних точках.

Ізопараметричні граничні елементи використовуватимемо для дискретизації області S_T поверхні тріщини. Для моделювання функцій розкриття тріщини застосуємо квадратичну інтерполяцію, попередньо виділивши в окремий множник степеневу функцію рівняння контуру тріщини, що забезпечить рівність нулю розкриття тріщини на її контурі. Інтерполяційні функції розкриття тріщини будуть одночасно і функціями форми граничного елемента [7].

Гіперсингулярні інтегралі, що є частиною системи рівнянь (9), пропонуємо регуляризувати шляхом виділення та числово-аналітичного обчислення скінченної частини інтеграла (в сенсі Адамара) в околі сингулярної точки. Для цього розкладаємо в ряд в околі сингулярної точки ядра гіперсингулярних інтегралів та невідомі функції розкриття тріщини. Оскільки порядок сингулярності таких інтегралів залежатиме від положення вузла, в якому обчислюємо інтеграл, то і процедура регуляризації дещо відрізнятиметься для крайових та внутрішніх сингулярних точок.

Інтегралі за ізопараметричним граничним елементом S_q у точці \tilde{x} , яка збігається з вузлом, що знаходиться всередині області тріщини (рис. 1), мають ядра з особливістю порядку $|\tilde{x} - \xi|^{-3}$, тому для їх регуляризації потрібно виділяти члени аж до другого порядку похідних невідомих функцій розкриття. Виділені окремо сингулярні інтегралі аналітично зводимо до регулярних одновимірних інтегралів, які визначаємо числово. Якщо інтеграл такого типу потрібно обчислити в точці контуру тріщини $x_0 \in L$ (рис. 1), то ступінь сингулярності знижується на одиницю внаслідок рівності нулю функції розкриття тріщини в точці x_0 .

Похідні від невідомих функцій подамо методом скінченних різниць через їх значення у вузлах граничного елемента. Зауважимо, що для інтерполяції похідних другого порядку від функцій розкриття тріщини слід використати їх значення як мінімум у трьох вузлах по одній із сторін граничного елемента. Саме цим продиктована необхідність ізопараметричних граничних елементів для моделювання розкриття тріщин.

Застосовуючи описану процедуру числового інтегрування та регуляризації сингулярних інтегралів, отримаємо дискретний аналог системи ГІР (8), (9) – систему лінійних рівнянь відносно значень компонент вектора переміщень у кутових вузлах граничних елементів поверхні S_P та значень функцій розкриття тріщини у вузлах граничних елементів поверхні S_T . Компоненти тензора напружень і вектора переміщень у тілі знаходимо з формул (1), враховуючи інтегральні подання (2)–(5). КІН на контурі тріщини довільної форми обчислюватимемо через функції їх розкриття за виразами, отриманими раніше [10].

Числові результати. Обчислимо КІН для кругової тріщини з радіусом a , що знаходиться неподалік від порожнини, яка має вигляд викривленого циліндра із закругленими кінцями та діаметром основи $2a$ (рис. 2). Нехай на безмежності до тіла прикладені навантаження σ_0 , перпендикулярні до поверхонь тріщини. Згідно з експериментальними даними, отриманими раніше [11], пружні характеристики тіла задаватимемо такими, що відповідають піщанистому сланцю: модуль зсуву $G = 1,04 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,31$.

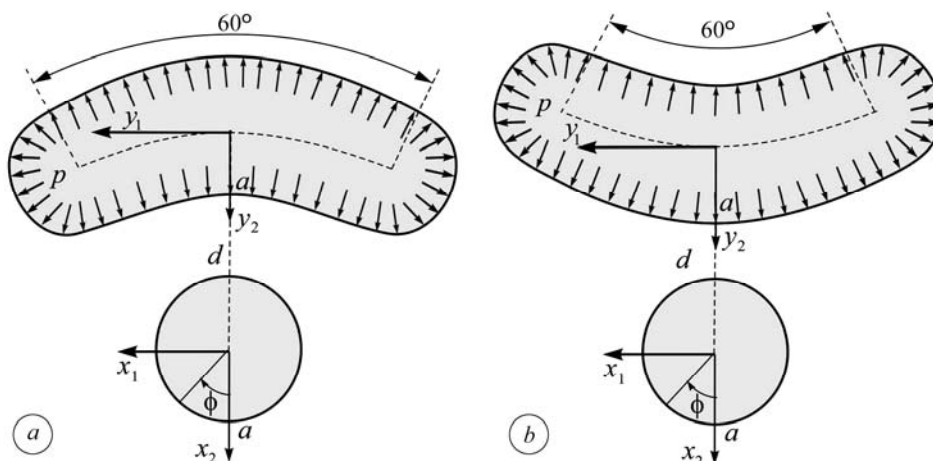


Рис. 2. Схеми перерізу тіла з тріщиною та газонаповненою порожниною в площині $x_3 = y_3 = 0$ за радіуса кривини осі порожнини: $a - \rho = 6a$; $b - \rho = -6a$.

Fig. 2. Scheme of the cross-section of a body with a crack and a gas-filled cavity in the plane $x_3 = y_3 = 0$ for the curvature radius of the cavity axis: $a - \rho = 6a$; $b - \rho = -6a$.

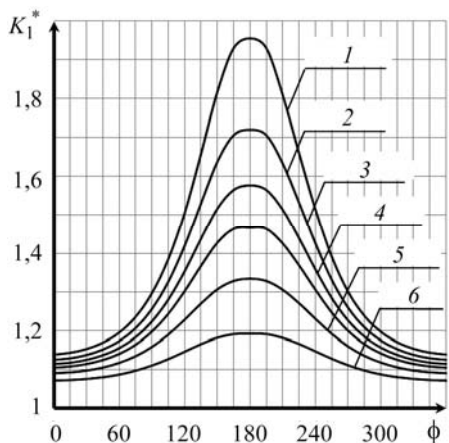


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність приведенного КІН від кутової координати точки контуру тріщини в околі газонаповненої порожнини (див. схему рис. 2а):
 $1 - d = 2,1a$; $2 - 2,3a$; $3 - 2,4a$; $4 - 2,6a$; $5 - 2,8a$; $6 - 3a$.

Fig. 3. Dependence of normalized SIF on the angular coordinates of the crack contour in the neighborhood of the gas-filled cavity (see chart in Fig. 2a):
 $1 - d = 2,1a$; $2 - 2,3a$; $3 - 2,4a$; $4 - 2,6a$; $5 - 2,8a$; $6 - 3a$.

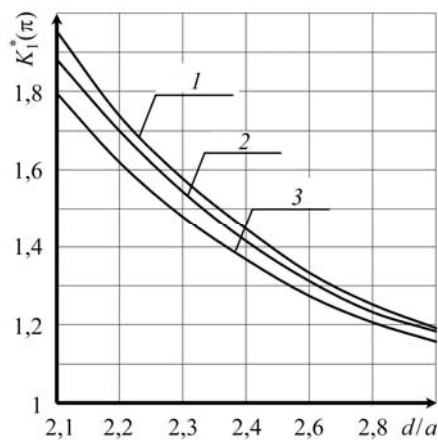


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність максимального значення приведенного КІН на контурі тріщини від відстані між центрами тріщини та порожнини: $1 - \rho = 6a$; $2 - \infty$; $3 - -6a$.

Fig. 4. Dependence of the maximum value of normalized SIF on the crack contour on the distance between the centers of cracks and cavities: $1 - \rho = 6a$; $2 - \infty$; $3 - -6a$.

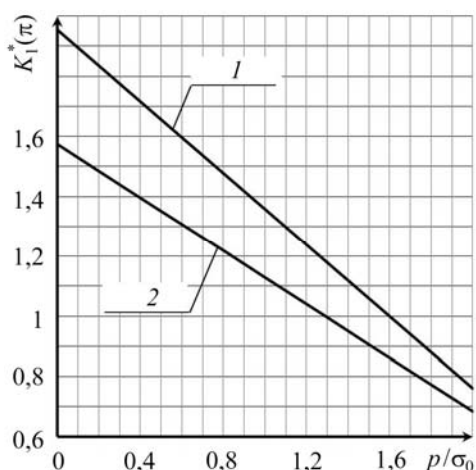


Рис. 5. Залежність приведенного КІН у найбільш наближеній до порожнини точці контуру тріщини від внутрішнього тиску в порожнині: 1 – $d = 2.1a$; 2 – $2.3a$.

Fig. 5. Dependence of normalized SIF at the point of crack contour closest to the cavity on the internal pressure values in the cavity: 1 – $d = 2.1a$; 2 – $2.3a$.

Подано (рис. 3–5) приведенне значення КІН $K_1^* = K_1 / \hat{k}_1$, де $\hat{k}_1 = 2\sigma_0 \sqrt{a/\pi}$ – КІН для ізольованої кругової тріщини, що перебуває в безмежному тілі під дією аналогічного навантаження. Наведені результати (рис. 3 і 4), коли на поверхні порожнини внутрішній тиск відсутній для різних відстаней між центрами порожнин та для різних радіусів кривини осі порожнини. Рис. 5 ілюструє залежність КІН на контурі тріщини в точці, найбільш наближеній до поверхні порожнини, від приведенного внутрішнього тиску p/σ_0 у ній для двох випадків розташування тріщини ($d = 2.1a$ та $2.3a$).

Вважаємо, що радіус кривини осі порожнини ρ в 6 разів перевищує радіус її основи. Кут розхилу осі порожнини прийmemo 60° . Розташування тріщини визначають величини: $e_1 = 0$; $e_2 = 1$; $e_3 = 0$; $e_1^* = 0$; $e_2^* = -1$; $e_3^* = 0$.

Орієнтацію тріщини відносно порожнини задають напрямні косинуси $l_{ij} = \delta_{ij}$.

ВИСНОВКИ

Числове дослідження зміни густини сітки граничних елементів свідчить, що точність запропонованого методу забезпечується в межах 1% вже за використання 64 ізопараметричних граничних елементів на поверхні тріщини та 96 суперпараметричних на поверхні порожнини. Точність визначення напружено-деформованого стану в околі газонаповненої порожнини за відсутності тріщини перевірено також методом скінченних елементів за допомогою програмного комплексу FEMAP-NASTRAN NX, наданого фірмою Siemens Software Industry.

Ймовірний напрямок поширення тріщини в околі газонаповненої порожнини залежить від внутрішнього тиску в ній та розташування тріщини відносно неї. Зі зменшенням радіуса кривини осі порожнини з безмежності до $6a$ максимальне значення КІН на контурі тріщини зростає на 5%. За відсутності внутрішнього тиску в порожнині КІН досягає найбільшого значення в точці контуру тріщини, яка найбільш наближена до поверхні порожнини. Зі збільшенням співвідношення p/σ_0 КІН у цій точці зменшується за лінійним законом і за досягнення внутрішнім тиском певного значення (при $d/a = 2.1$ – $p/\sigma_0 = 1.6$, а при $d/a = 2.3$ – $p/\sigma_0 = 1.3$) напрямок імовірного поширення тріщини змінюється на протилежний. Таким чином, для прориву сланцевої породи потрібно забезпечити розривне навантаження на берегах тріщин не менше ніж 80% від прогнозованого тиску газу в порожнинах.

РЕЗЮМЕ. Методом граничних елементів решена задача моделювання напружено-деформованого стану в безграничному упругому ізотропному тілі, що містить тріщину та газонаповнену порожнину произвольної форми. Отримана система шести граничних інтегральних рівнянь відносно компонент переміщень на поверхні порожнини та скачков переміщень на поверхні тріщини. Визначено значення коефіцієнтів інтенсивності напружень на контурі круглої плоскої тріщини в залежності від відстані до порожнини, її форми та внутрішнього тиску в ній.

SUMMARY. The problem of modeling the stress-strain state in an elastic isotropic solid which contains a crack and a gas-filled cavity of any shape is solved by the boundary element method. A system of six boundary integral equations with respect to displacement components on the surface of a cavity and displacements jumps on the crack surface is obtained. The stress intensity factors on the contour of a penny-shaped crack depending on its location relative to the cavity, its shape, and internal pressure in the cavity are calculated.

Робота виконана за часткової підтримки НАН України – НТЦУ (проект № 5726).

1. Калюеров С. А., Горянская Е. С., Шаповалова Ю. Б. Двумерное напряженное состояние анизотропного тела с отверстиями, упругими включениями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 63–70.
2. Силованюк В. П., Юхим Р. Я., Горбач П. В. Деформація та руйнування матеріалів в околі сфероїдальних включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 6. – С. 42–46.
(Sylovanyuk V. P., Yukhym R. Ya., and Horbach P. V. Deformation and Fracture of Materials near Spheroidal Inclusions // Materials Science. – 2010. – 46, № 6. – P. 757–762.)
3. Кирилюк В. С. О напряженном состоянии упругой среды с эллиптической трещиной и двумя эллипсоидальными полостями // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 7. – С. 94–105.
4. Lee H. K. and Tran X. H. Onstressanalysisfor a penny-shaped crack interacting with inclusions and voids // Int. J. of Solids and Structures. – 2010. – 47, Issue 5.– P. 549–558.
5. Lo K. K. Three-dimensional crack in the interior of a half-space // J. Elast. – 1979. – 9, № 4. – P. 435–439.
6. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – К.: Наук. думка, 1982. – 348 с.
7. Balas J., Sladek J., and Sladek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – 686 p.
8. Кум Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с.
9. Стасюк Б. М. Метод эффективного поля напряжений в тривимірних задачах про взаємодію плоских тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 1. – С. 33–42.
(Stasyuk B. M. Method of effective stress field in three-dimensional problems of interaction of plane cracks // Materials Science. – 2009. – 45, № 1. – P. 28–40.)
10. Хай М. В., Станкевич В. З., Стасюк Б. М. До теорії механіки руйнування // машинознавство. – 2002. – № 11. – С. 3–19.
11. Жданова О. О., Самедов А. М. Пружні характеристики сланцевих гірських порід // Вісник Житомир. держ. техн. ун-ту. Сер.: Технічні науки. – 2012. – № 1 (60). – С. 109–116.

Одержано 08.04.2013