УДК 517.927

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Побудова точних розв'язків інтегро-функціональні рівнянь можлива лише в окремих випадках, тому актуальним є питання відшукання та дослідження умов збіжності наближених методів розв'язання цих рівнянь та оцінки похибок колокаційно-ітеративного методу.

Ключові слова: *лінійне інтегро-функціональні рівняння, інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, обернений оператор, наближений розв'язок, колокаційно-ітеративний метод.*

Вступ. Відомо, що крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу, коли відхилення є змінною величиною, зводяться до лінійних інтегро-функціональних рівнянь вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x;t)y(t)\,dt, x \in [a;b], \qquad (1)$$

$$y(x) = 0, x \notin [a;b],$$

де $f(x)$ — відома, а $y(x)$ — невідома функції з простору $L_2(a;b)$. В останні десятиліття ведуться глибокі дослідження цих рівнянь і вже отримано низку важливих результатів [1–4]. Але знайти точний розв'язок рівняння вдається лише в окремих випадках. Тому актуальним є питання дослідження та розробки методів побудови наближеного розв'язку задачі (1).

Основна частина. Розглянемо випадок, коли функції $p(x)$, $h(x), K(x;t)$ задовольняють відповідно на відрізку $[a;b]$ та в квадраті $[a;b]^2$ умовам:

$$|p(x)| \le \overline{p} < \infty, \qquad (2)$$

$h(x)$ — диференційовна на $(a;b)$ і

$$h'(x) \ge l, x - h(x) \ge \sigma > 0, \qquad (3)$$

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x;t)\,dx\,dt = K^2 < \infty\ . \qquad (4)$$

До задачі (1) при виконанні згаданих вище умов можна застосувати метод послідовних наближень, проекційний метод та деякі модифікації проекційно-ітеративного методу. Причому, найбільш ефективним, стосовно умов збіжності, є згадані варіанти проекційно-ітеративного методу [3].

Суттєвим моментом у побудові та обґрунтуванні цих методів є те, що в силу виконання умов (2), (3) функціональне рівняння

$$y(x)-p(x)y(h(x))=s(x),x\in[a;b], \tag{5}$$

$$y(x)=0,x\notin[a;b],$$

може бути розв'язане за допомогою скінченної кількості кроків, завдяки чому інтегро-функціональне рівняння задачі (1) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Якщо ж умова (3) не виконується і оператор внутрішньої суперпозиції

$$(Sv)(x)=p(x)v(h(x)),v(x)\in L_2(a;b), \tag{6}$$

більш складної структури (зокрема, коли рівняння (5) не розв'язується за допомогою скінченної кількості кроків), то згадані вище методи не можна застосовувати до задачі (1).

Тому виникає необхідність в застосуванні та дослідженні нових варіантів наближених методів розв'язування задачі (1). Одним з них є колокаційно-ітеративний метод. Йому присвячені об′ємні та глибокі дослідження [4].

Опис методу. Ідея методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1) знаходимо за формулами

$$y_k(x)=f(x)+p(x)z_k(h(x))+\int_a^b K(x;t)z_k(t)dt,\ \ x\in[a;b], \tag{7}$$

$$y_k(x)=0,x\notin[a;b];$$

$$z_k(x)=y_{k-1}(x)+\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x), \tag{8}$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ — система лінійно незалежних неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій, зокрема система алгебраїчних або тригонометричних поліномів, або ж *B*-сплайнів.

Невідомі параметри знаходимо з умови

$$r_k(x_i)=0,i=\overline{0,n}, \tag{9}$$

$$r_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)z_k(t)dt-z_k(x)+p(x)z_k(h(x)), \tag{10}$$

де $x_i\in[a;b]$ — вузли колокації.

За початкове наближення $y_0\left(x\right)$ беремо деяку неперервну функцію.

Для визначення параметрів $a_j^k, j=\overline{0,n}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij}a_j^k = b_i^k, i=\overline{0,n}\ , \tag{11}$$

в якій

$$\beta_{ij}=\varphi_j\left(x_i\right)-p\left(x_i\right)\varphi_j\left(h\left(x_i\right)\right)-\int_a^b K\left(x_i;t\right)\varphi_j\left(t\right)dt,\ j,i=\overline{0,n}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}b_i^k = f\left(x_i\right)+p\left(x_i\right)y_{k-1}\left(h\left(x_i\right)\right)-y_{k-1}\left(x_i\right)+\\ +\int_a^b K\left(x_i;t\right)y_{k-1}\left(t\right)dt,\ \ i=\overline{0,n},\end{gathered} \tag{13}$$

Дійсно, на підставі формул (7) і (8) отримаємо, що

$$\begin{gathered}y_k\left(x\right)-z_k\left(x\right)=f\left(x\right)-y_{k-1}\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)y_{k-1}\left(t\right)dt-\\ -\sum_{j=0}^{n}a_j^k\left\{\varphi_j\left(x\right)-\int_a^b K\left(x_i;t\right)\varphi_j\left(t\right)dt\right\}.\end{gathered} \tag{14}$$

Тобто, приймаючи до уваги позначення (12), (13) прийдемо до системи рівнянь (11).

У випадку коли поправка $\omega_k(x)$ — алгебраїчні поліноми, за вузли доцільно брати корені многочленів степеня n, ортогональних на відрізку $\left[a;b\right]$ з вагою $\rho(x)\geq 0$. У випадку періодичної задачі, коли вільний член $f\left(x\right)$ і ядро $K\left(x;t\right)$ — періодичні функції по x і t, поправку слід брати у вигляді тригонометричного полінома, а вузли — рівновіддаленими.

Нехай система рівнянь (11) має розв'язок. У такому випадку, за допомогою колокаційно-ітеративного методу наближені розв'язки будуються однозначно. Причому за наближення до шуканого розв'язку можна взяти, як функцію $y_k\left(x\right)$, так і функцію $z_k\left(x\right)$.

Обгрунтування методу. Припустимо, що $\left\{\varphi_j(x)\right\}$ — фундаментальна система функцій на відрізку $\left[a;b\right]$, $\varphi_j\left(x_i\right)=\delta_{ij}$, де δ_{ij} — символ Кронекера. Якщо початкові координати утворюють чебишевську систему, то таку систему завжди можна отримати.

Побудуємо для колокаційно-ітеративного методу оператори переходу, які визначаються за формулами:

$$z(x)=\int_a^b Z_n(x;t)g(t)dt=g(x)+u_n(x), \tag{15}$$

$$y(x)=\int_a^b M_n(x;t)g(t)dt=\int_a^b K(x;t)z(t)dt, \tag{16}$$

$$v(x)=\int_a^b L_n(x;t)g(t)dt=y(x)-y_n(x), \tag{17}$$

де $g(x)$ — неперервна на відрізку $[a;b]$ функція і

$$u_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x), \tag{18}$$

$$y_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\varphi_i(x), \tag{19}$$

а невідомі параметри $c_i, i=\overline{0,n}$ визначаються з умови

$$y(x_i)-z(x_i)=0, i=\overline{0,n}. \tag{20}$$

На основі формул (15), (16), (18) та наступної рівності

$$g_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g_i\varphi_i(x), g_i=g(x_i), i=\overline{0,n}, \tag{21}$$

маємо:

$$u_n(x)+g_n(x)=\sum_{i=0}^{n} d_i\varphi_i(x), d_i=c_i+g_i, i=\overline{0,n}; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} y(x)-z(x)&=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)+u_n(t)\right]dt-g(x)-u_n(x)=\\ &=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt+\int_a^b K(x;t)\left[g_n(t)+u_n(t)\right]dt+\\ &+g_n(x)-g(x)-u_n(x)-g_n(x)=\int_a^b K(x;t)\left[g(t)-g_n(t)\right]dt+\\ &+g_n(x)-g(x)+\sum_{i=0}^{n} d_i\left\{\int_a^b K(x;t)\varphi_i(t)dt-\varphi_i(x)\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Вважаючи, що в (23) $x=x_i$ та враховуючи умову (20) і рівність $g(x_i)=g_n(x_i)$, що безпосередньо випливає з (21), для визначення невідомих параметрів $d_i, i=\overline{0,n}$, у формулі (22) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$d_i - \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} d_j = \int_a^b K(x_i;t)\left[g(t) - g_n(t)\right]dt\ , i=\overline{0,n}, \tag{24}$$

в якій

$$\alpha_{ij} = \int_a^b K(x_i;t)\varphi_i(t)dt,\ i,j=\overline{0,n}. \tag{25}$$

Нехай система рівняння (24) має єдиний розв'язок

$$d_i = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} \int_a^b K(x_j;t)\left[g(t) - g_n(t)\right]dt\ , i=\overline{0,n}, \tag{26}$$

тоді підставляючи (26) в (22), знаходимо, що

$$u_n(x) = -g_n(x) + \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} \varphi_i(x) K(x_j;t)\left[g(t) - g_n(t)\right]dt. \tag{27}$$

За допомогою формул (15) і (27) та перепозначення

$$B_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} K(x_j;t), \tag{28}$$

отримуємо наступне співвідношення:

$$\int_a^b Z_n(x;t)g(t)dt = g(t) - g_n(t) + \int_a^b B_n(x;t)\left[g(t) - g_n(t)\right]dt\ . \tag{29}$$

Проаналізувавши вирази (15)–(17), (19) і (29) можна зробити висновок, що ядра операторів переходу обчислюються згідно формул:

$$Z_n(x;t) = \delta(x-t) + B_n(x;t); \tag{30}$$

$$M_n(x;t) = K(x;t) + \int_a^b K(x;\xi) B_n(\xi;t) d\xi\ ; \tag{31}$$

$$L_n(x;t) = \int_a^b \left(K(x;\xi) - H_n(\xi;t)\right) Z_n(\xi;t) d\xi\ , \tag{32}$$

де $\delta(x-t)$ — функція Дірака та $H_n(x;t)$ — узагальнений інтерполяційний многочлен по x ядра $K(x;t)$:

$$H_n(x;t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) K(x_i;t). \tag{33}$$

Якщо оператори переходу побудовані, то врахувавши загальну теорію проекційно-ітеративного методу [3] можна встановити умови збіжності і дати оцінки похибки колокаційно-ітеративного методу.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і виконується умова

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b \left|K(x;t)-K(x_0;t)\right|dt=0,\forall x_0\in[a;b]. \tag{34}$$

Якщо $e_n=p+q_n<1$, де $p=\max\limits_{a\le x\le b}|p(x)|$ і

$$q_n=\max_{a\le x\le b}\int_a^b\left|L_n(x;t)\right|dt, \tag{35}$$

то інтегро-функціональне рівняння (1) має єдиний неперервний на відрізку $[a;b]$ розв'язок $y^*(x)$ і послідовність $\{y_k(x)\}$ побудована за допомогою колокаційно-ітеративного методу збігається рівномірно.

Зауваження 1. Якщо $q_n\le 1$, то справедлива оцінка

$$\left\|y^*-y_k\right\|_c\le p_n\left(1-q_n\right)^{-1}\left\|y_k-z_k\right\|_c, \tag{36}$$

яка характеризує швидкість збіжності методу, та конструктивні оцінки

$$\left\|y^*-y_k\right\|_c\le p_n\left(1-q_n\right)^{-1}\left\|y_k-z_k\right\|_c, \tag{37}$$

$$\left\|y_k-z_k\right\|\le q_n^{k-s}\left\|y_s-z_s\right\|,1\le s\le k-1, \tag{38}$$

де $\|\cdot\|_C$ — рівномірна норма і

$$p_n=\max_{a\le x\le b}\int_a^b\left|M_n(x;t)\right|dt. \tag{39}$$

Для похибки $y^*(x)-z_k(x)$ справедливі аналогічні оцінки, в яких слід замінити p_n на

$$l_n=1+\max_{a\le x\le b}\int_a^b\left|B_n(x;t)\right|dt\ . \tag{40}$$

Величини l_n,p_n,q_n можна знайти й оцінити використовуючи співвідношення (30)–(32) та позначення (28), (33).

Зауваження 2. Якщо виконується умова

$$F(\cdot)=\int_a^b\left|K(\cdot,t)\right|^2dt\in C[a;b], \tag{41}$$

то справедливі оцінки

$$\left\|y^*-y_k\right\|_c\le p_nq_n^{k-1}\left\|y^*-y_0\right\|, \tag{42}$$

$$\left\|y^{*}-y_k\right\|_c \le p_n\left(1-q_n\right)^{-1}\left\|y_k - z_k\right\|, \tag{43}$$

$$\left\|y_k - z_k\right\| \le q_n^{k-s}\left\|y_s - z_s\right\|, 1 \le s \le k-1, \tag{44}$$

в яких $\|\cdot\|$ — норма в $L_2\left(a;b\right)$ і

$$p_n^2 = \max_{a \le x \le b}\int_a^b\left|M_n\left(x;t\right)\right|^2 dt\ , q_n^2 = \int_a^b\int_a^b\left|L_n\left(x;t\right)\right|^2 dxdt. \tag{45}$$

Зауваження 3. Ядра операторів переходу можна будувати безпосередньо за формулами (30)–(32), попередньо побудувавши функцію (28).

Обчислювальна схема методу. Спочатку слід задати координатну систему $\left\{\varphi_j(x)\right\}$ і вузли $\left\{x_i\right\}$. Далі можна знайти

$$\xi_j\left(x\right) = \int_a^b K\left(x;t\right)\varphi_j\left(t\right)dt, i = \overline{0,n},$$

$$\beta_{ij} = \varphi_j\left(x_i\right) - \int_a^b K\left(x_i;t\right)\varphi_j\left(t\right)dt,\ j,i = \overline{0,n}.$$

Після таких обчислень вважатимемо наближення $y_{k-1}\left(x\right)$ побудоване. Виконавши ітерацію

$$v_k\left(x\right) = f\left(x\right) + p\left(x\right)y_{k-1}\left(h\left(x\right)\right) + \int_a^b K\left(x;t\right)y_{k-1}\left(t\right)dt,$$

знаходимо величину $b_i^k = v_k\left(x_i\right) - y_{k-1}\left(x_i\right), i = \overline{0,n}.$

Складаємо систему рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij}a_j^k = b_i^k, i = \overline{0,n}\ ,$$

та знаходимо її розв’язок, причому k-те наближення обчислюємо за формулою

$$y_k\left(x\right) = v_k\left(x\right) + \sum_{j=0}^{n}a_j^k\xi_j\left(x\right).$$

Висновки. До одного типу задачі для інтегро-функціонального рівняння застосовано колокаційно-ітеративний метод і подано його обґрунтування.

Список використаних джерел:

1. Вайникко Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г. М. Вайникко // Диференц. уравнения. — 1965. — Вып. 1, №2. — С. 244–254.

2. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Алимов. — М. : Наука, 1948. — 752 с.
3. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1980. — 264 с.
4. Поселюжна В. Б. Колокаційно-ітеративний метод розв′язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В. Б. Поселюжна, Л. М. Семчишин. — Тернопіль : ТНЕУ, 2013. — 203 с.

Construction of exact solutions of integral-functional equations is possible only in some cases, so vital question of finding and study conditions for the convergence of approximate methods for solving these equations and error estimates kolokation-iterative method.

Key words: *linear integral-functional equations, Fredholm's integral equation, inverse operator, approximate solution, collocational-iterative method.*

Отримано: 26.06.2017

UDC 517.946

A. P. Gromyk*, Cand. Tech. Sci, Docent,
I. M. Konet, Doctor of Phys. and Mathem. Sciences, Professor,
T. M. Pylypiuk, Ph. D. in Physics and Mathematics

*State Agrarian and Engineering University in Podilya, Kamianets-Podilsky,
**Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMIBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS SOLID CYLINDER

By means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green matrices) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for semibounded piecewise-homogeneous solid cylinder is obtained for the first time.

Keywords: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugate conditions, integral transforms, the main solutions.*

Introduction. The theory of hyperbolic boundary value problems for partial differential equations is an important section of the modern theory of differential equations which is intensively developing in the present time. The popularity of the problem is the consequence of the significance of its results