8. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. — М. : Мир, 1984. — 350 с. (кн.1), 282 с. (кн.2).
10. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. — М. : Мир, 1989. — 655 с.
11. Абрамчук В. С. Итерационные методы направленного поиска решения систем $Ax = f$с сингулярно-естественным упорядочением переменных / В. С. Абрамчук // Доп. НАН Украины. — 1996. — № 8. — С. 4–8.
12. Абрамчук В. С. Проблеми, методи, алгоритми розв'язування систем лінійних рівнянь з погано зумовленими матрицями / В. С. Абрамчук, І. В. Абрамчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. — Вип. 13. — С. 5–16.
13. Ильин В. П. Методы би-сопряженных направлений в подпространствах Крылова / В. П. Ильин // СибЖИМ. — 2008. — Т. 11, № 4 (36). — С. 47–60.

The problems, that investigates, was related with estimation of errors in the solutions of noised systems and minimizations errors of calculations that arise in Gaussian transformations and acceleration of convergence of the iterative methods.

Key words: *the estimation of solution's error, multilayer method of Gaussian elimination, the local basis of the direct search method, Rayleigh–Ritz quotient.*

Отримано: 23.03.2017

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ШРЕДІНГЕРА З КУБІЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування стоячих хвиль для таких рівнянь.

Ключові слова: *дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, теорема про зачеплення.*

Вступ. Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння sin-Ґордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в працях О. Панкова, зокрема, в [20] найбільш повний огляд результатів. У статті [4] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі декілька праць [1; 12; 15], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [2; 13; 14] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. В статті [6] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці. В статтях [7; 8] одержано результати про існування дозвукових і надзвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. А в статті [3] одержано результат про існування відокремлених біжучих хвиль для таких систем. В статтях [16; 17] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Ґордона на одновимірній ґратці, а в статтях [6; 9; 11] — на двовимірній ґратці. В статтях [5; 19; 20] досліджено питання існування стоячих хвиль для одновимірного рівняння Шредінгера.

Метою статті є одержання умов існування періодичних і локалізованих стоячих хвиль для рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчається дискретне нелінійне рівняння Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) = -\Delta\psi_{n,m}(t) - x_{n,m}\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2 \psi_{n,m}(t),\ (n,m)\in\mathbb{Z}^2, \qquad (1)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n, m)-ї частинки, а $(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа. Зауважимо, що в статті [10] вивчались двовимірні солітони в таких системах при $x_{n,m} \equiv 2$.

Припускається, що послідовність $\left(x_{n,m}\right) \subset \mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто $x_{n+N,m} = x_{n,m+N} = x_{n,m}$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t), \qquad (2)$$

де $\left(u_{n,m}\right) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з N-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто відповідно

$$u_{n+N,m} = u_{n,m+N} = u_{n,m}\,, \tag{3}$$

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} u_{n,m} = 0\,. \tag{4}$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1) і враховуючи, що $\left|\exp\left(-i\omega t\right)\right| = 1$, одержимо рівняння

$$-\Delta u_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m}\left|u_{n,m}\right|^2 u_{n,m}\,. \tag{5}$$

Позначимо

$$L = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}$$

і розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m}\left|u_{n,m}\right|^2 u_{n,m}\,, \tag{6}$$

де $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$ і $c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}$.

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див., [22]). Доповнення $\mathbb{R}\setminus\sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, в загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли частота ω належить скінченному проміжку. Зафіксуємо довільний спектральний проміжок оператора L і позначимо його через $\left(a;\, b\right)$.

Варіаційне формулювання задачі. З рівнянням (6) пов'язується функціонал

$$J\left(u\right) = \frac{1}{2}\left(Lu - \omega u,\, u\right) - \frac{1}{4}\sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} x_{n,m}u_{n,m}^4\,, \tag{7}$$

визначений на гільбертовому просторі $E := l^2$ зі скалярним добутком $\left(u,\, v\right) = \sum\limits_{n,\, m\in\mathbb{Z}} u_{n,m}v_{n,m}$ та нормою $\left\|u\right\| = \left(\sum\limits_{n,\, m\in\mathbb{Z}}\left|u_{n,m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Зазначимо, що кожний елемент l^2 автоматично задовольняє умову (4). Іноді ми будемо розглядати l^p -норму $\|u\|_{l^p} = \left(\sum\limits_{n,\, m \in \mathbb{Z}} \left| u_{n,m} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p \le \infty$. Нагадаємо, що $\|u\|_{l^q} \le \|u\|_{l^p}$ при $1 \le p \le q \le \infty$.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і позначимо через E_k простір всіх kN-періодичних послідовностей. Це є kN-вимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(u,\, v)_k = \sum\limits_{n,m \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$ та нормою $\|u\|_k =$ $= \left(\sum\limits_{n,\, m \in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2} \right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2} \right] - 1 \right\}$, і $[x]$ — ціла частина x. На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega u,\, u \right) - \frac{1}{4} \sum_{n,\, m \in Q_k} x_{n,m} u_{n,m}^4, \tag{8}$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k. Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. Похідні Гато функціоналів J та J_k визначаються за формулами

$$\left\langle J'(u),\, h \right\rangle = \left(Lu - \omega u,\, h \right) - \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m}\ ,\ u,\, h \in E\ ,$$

$$\left\langle J_k'(u),\, h \right\rangle = \left(L_k u - \omega u,\, h \right)_k - \sum_{n,\, m \in Q_k} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m}\ ,\ u,\, h \in E_k\ ,$$

а їх критичні точки є розв'язками рівняння (6) відповідно з просторів E та E_k.

Допоміжні леми. Зі спектральної теорії диференціальних операторів (див. [22]) маємо, що $\sigma(L_k) \subset \sigma(L)$ і, отже, $\|L_k\| \le \|L\|$. Нехай E_k^+ (відповідно E_k^-) — додатний (відповідно від'ємний) спектральний підпростір оператора $L_k - \omega$ в E_k. Аналогічно введемо додатний та від'ємний спектральні підпростори $E^+ \subset E$ і $E^- \subset E$ для оператора $L - \omega$. Позначимо через $P^\pm$ і $P_k^\pm$ ортогональні проектори на $E^\pm$ і $E_k^\pm$, відповідно. Нехай $\delta = \min\left[|a - \omega|,\, |b - \omega| \right]$ відстань від ω до спектру $\sigma(L)$. Тоді

$$\pm(Lu-\omega u,\, u) \geq \delta\|u\|^2, \quad u \in E^{\pm}, \tag{9}$$

$$\pm(L_k u-\omega u,\, u)_k \geq \delta\|u\|_k^2, \quad u \in E_k^{\pm}. \tag{10}$$

Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 2. Нехай $x_{n,m} > 0$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0 \in E$ (відповідно $u = 0 \in E_k$) єдина критична точка функціоналу J (відповідно J_k).

Доведення. Нехай $u \in E$ нетривіальна критична точка функціоналу J. Тоді

$$0 = \left\langle J'\left(u\right),\, u\right\rangle = \left(Lu-\omega u,\, u\right) - \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} x_{n,m}u_{n,m}^4 \leq \left(Lu-\omega u,\, u\right).$$

Оскільки $b = +\infty$, то $E^+ = \left\{0\right\}$ і згідно (9) $0 \leq -\delta\|u\|^2$. А це означає, що $u = 0$. Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. □

Наступні дві леми, які дають оцінки для критичних точок і відповідних критичних значень (див. [19]).

Лема 3. Для будь-яких нетривіальних критичних точок $u \in E$ та $u^{(k)} \in E^k$ відповідно функціоналів J та J_k з критичними значеннями $c = J\left(u\right)$ і $c^{(k)} = J_k\left(u^{(k)}\right)$ правильні нерівності: $\|u\| \leq 4\delta^{-1}\overline{m}m^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{4}}$ і $\left\|u^{(k)}\right\|_k \leq 4\delta^{-1}\overline{m}m^{-\frac{3}{4}}\left(c^{(k)}\right)^{\frac{3}{4}}$, де $\overline{m} = \max\{x_{n,m}\}$ і $m = \min\{x_{n,m}\}$.

Лема 4. За умов леми 3 правильні нерівності: $\|u\|^2 \geq 2^{-\frac{1}{2}}\delta\overline{m}^{-1}$, $c \geq 2^{-3}\delta^2\overline{m}^{-2}m,\ i\ \left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \geq 2^{-\frac{1}{2}}\delta\overline{m}^{-1},\ c^{(k)} \geq 2^{-3}\delta^2\overline{m}^{-2}m.$

Основний результат. Для одержання основного результату нам знадобиться теорема про зачеплення ([21, 23]). Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z : \|z\| = r$. Позначимо $M = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| \leq \rho,\ \lambda \geq 0\right\}$ і

$$M_0 = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| = \rho\ i\ \lambda \geq 0,\ \text{або}\ \|u\| \leq \rho\ \text{і}\ \lambda = 0\ \right\},$$

тобто M_0 — межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай $N := \left\{u \in Z : \|u\| = r\right\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що $\beta := \inf\limits_{u\in N}\varphi\left(u\right) > \alpha := \sup\limits_{u\in M_0}\varphi\left(u\right)$. В такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє *геометрії зачеплення*.

Теорема 1 (про зачеплення). Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай $b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u))$, де $\Gamma := \{\gamma \in C(M;H) : \gamma = id \text{ на } M_0\}$.

Тоді b — критичне значення φ і $\beta \le b \le \sup_{u \in M} \varphi(u)$.

Зауважимо, що послідовність (u_n) точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу φ рівня b, якщо $\varphi(u_n) \to b$ і $\varphi'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Далі нам знадобляться наступні дві леми (див. [19]).

Лема 5. Функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла, тобто будь-яка послідовність Пале-Смейла містить збіжну підпослідовність.

Також функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення з $Y = E_k^-$ та $Z = E_k^+$. Нагадаємо, що функціонал J_k має нетривіальні критичні точки у випадку, коли $b \ne +\infty$, а отже, $E_k^+ \ne \{0\}$.

Лема 6. Для достатньо великого $\rho > 0$: $J_k(u) \le 0,\ u \in M_0$, а при $r^2 \le \overline{m}^{-1}\delta$: $J_k(u) \ge \frac{\delta}{4} r^2,\ u \in N.$ Більше того, існує константа $C > 0$, незалежна від k і така, що $J_k(u) \le C,\ u \in M$.

Основними результатами цієї роботи є наступні дві теореми.

Наступна теорема дає існування нетривіальних періодичних розв'язків рівняння (6).

Теорема 2. Нехай $x_{n,m} > 0$, $\omega \in (a;\, b)$ та $b \ne +\infty$. Тоді для будь-якого $k \ge 1$ рівняння (6) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок $u^{(k)} \in E_k$. Більше того, існує константа $C > 0$, незалежна від k і така, що $\left\| u^{(k)} \right\|_k \le C$, $J_k\left(u^{(k)}\right) \le C$.

Доведення. З лем 5 та 6 випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення, а отже, він має нетривіальну критичну точку $u^{(k)} \in E_k$. Більше того, за цією ж теоремою відповідне критичне значення задовольняє нерівність $J_k\left(u^{(k)}\right) \le \sup_{u \in M} J_k(u)$. Крім того, верхні межі для критичної точки і відповідного критичного значення випливають відповідно з лем 3 та 6. □

Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків рівняння (6). За лемою 1 ці розв'язки є критичними точками функціоналу J . Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале-Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k .

Теорема 3. Нехай $x_{n,m} > 0$ і $\omega \in (a;\, b)$. Тоді якщо $b \neq +\infty$, то рівняння (6) має нетривіальний розв'язок $u \in E$. Якщо ж $b = +\infty$, то рівняння (6) нетривіальних розв'язків не має.

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \left(u_{n,m}^{(k)}\right) \in E_k$ нетривіальний kN -періодичний розв'язок рівняння (6), який існує за теоремою 2. Для початку відмітимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $(n_k,\, m_k) \in \mathbb{Z}^2$ такі, що

$$\left|u_{n_k, m_k}^{(k)}\right| \geq \delta_0 \tag{11}$$

Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \to 0$ в l^∞, а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \to 0$ в l^∞ . За теоремою 2 $\left\|v^{(k)}\right\|_{l^2} = \left\|u^{(k)}\right\|_k$ обмежена. Далі оскільки $\|v\|_{l^p}^p \leq \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2$, $p > 2$, то $v^{(k)} \to 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^p} \to 0$ для всіх $p > 2$. Тоді, як на початку доведення леми 3, для відповідного критичного значення $c^k = J_k\left(u^{(k)}\right)$ маємо

$$0 < c^k = \frac{1}{4} \sum_{n,m \in Q_k} x_{n,m} \left(u_{n,m}^{(k)}\right)^4 \leq \frac{\overline{m}}{4} \left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^4}^4 \to 0, \text{ що суперечить лемі 4.}$$

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\left(u_{n+N,m+N}^{(k)}\right)$ є також розв'язком рівняння (6). Тому можна вважати, що $0 \leq n_k$, $m_k \leq N - 1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$ і $m_k = m_0$.

В силу обмеженості $u^{(k)}$, переходячи до підпослідовності, яку як і раніше будемо позначати $u^{(k)}$, маємо $u_{n,m}^{(k)} \to u_{n,m}$ при $k \to \infty$

(для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$). Крім того, за нерівністю (11) $\left|u_{n_0,m_0}\right| \geq \delta_0$, а отже, $u = \left(u_{n,m}\right)$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що $u = \left(u_{n,m}\right)$ є розв'язком рівняння (6).

Покажемо, що $u = \left(u_{n,m}\right) \in l^2$. Справді, оскільки для будь-яких фіксованих $a, b \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k: $\sum_{n=-a}^{a}\sum_{m=-b}^{b}\left|u_{n,m}^{(k)}\right|^2 \leq \left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \leq C^2$, то переходячи до границі при $k \to \infty$, одержуємо $\sum_{n=-a}^{a}\sum_{m=-b}^{b}\left|u_{n,m}\right|^2 \leq C^2$. В силу довільності a і b, маємо, що $u \in l^2$.

Якщо ж $b = +\infty$, то за лемою 2 рівняння (6) має тільки тривіальний розв'язок. □

Висновки. Таким чином, у цій статті одержано результат про існування періодичних і локалізованих стоячих хвиль для рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, № 2. — С. 140–153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, №2. — С. 154–175.
3. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, №4. — С. 435–444.
4. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 1. — С. 76–88.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, № 1. — С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.

8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 45–52.
10. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 60. — Вып. 11. — С. 815–821.
11. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 217, №2 (August). — P. 187–197.
12. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — Vol. 3, № 1. — P. 19–26.
13. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
14. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1 (February). — P. 105–114.
15. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. — 2000. — № 211. — P. 439–464.
16. Kreiner C.-F. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Discrete and continuous dynamical systems. — 2009. — Vol. 25, № 3 (November). — P. 1–17.
17. Kreiner C.-F. Travelling wave solutions for the discrete sine-Gordon equation with nonlinear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Nonlin. Analysis: Theory Methods and Appl. — 2009. — Vol. 70. — P. 3146–3158.
18. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. — London ; Singapore : Imperial College Press, 2005. — 196 p.
19. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations / A. Pankov // Nonlinearity. — 2006. — № 19. — P. 27–40.
20. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. — 2008. — 464. — P. 3219–3236.
21. Rabinowitz P. Minimax methods in criticls point theory with applications to differential equations / P. Rabinowitz. — Providence : Amer. Math. Soc., 1986. — 100 p.
22. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices / G. Teschl. — Providence : Amer. Math. Soc., 2000. — 251 p.
23. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. — Boston : Birkhäuser, 1996. — 162 p.

The article deals with discrete nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity on 2D-lattice. It is obtained result on existence of standing waves.

Key words: *discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, linking theorem.*

Отримано: 21.06.2017