2. Pereverzev S. V., Prossdorf S. On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation. *J. Integral Equations Appl*. 2000. V. 12, N 2. P. 113–130.
3. Solodky S. G., Semenova E. V. A class of periodic integral equation with numerical solving by a fully discrete projection method. UMV. 2014. V. 11, N 3, P. 400–416.

Розглянуто повністю дискретний проекційний метод у комбінації з принципом рівноваги для розв'язування періодичних інтегральних рівнянь у апостеріорному випадку. Доведена оптимальність та економічність такого підходу.

Ключові слова: *повністю дискретний проекційний метод, принцип нев'язки, періодичні інтегральні рівняння.*

Date received 06.03.2017

УДК 519.8

Н. В. Семенова, д-р фіз.-мат. наук,
Т. Т. Лебєдєва, канд. екон. наук,
Т. І. Сергієнко, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ОПТИМАЛЬНІСТЬ ТА КОРЕКТНІСТЬ У ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Сформульовано умови оптимальності розв'язків векторної задачі дискретної оптимізації на допустимій множині, що описується псевдоопуклими функціями обмежень, отримано достатні умови оптимальності різних видів розв'язків задачі та п'яти типів її стійкості. Встановлено топологічні властивості підмножин простору вхідних даних задачі, на яких зберігається оптимальність її розв'язків.

Ключові слова: *дискретна оптимізація, векторна задача, стійкість, коректність.*

Вступ. Встановлення необхідних і достатніх умов оптимальності та стійкості розв'язків векторних дискретних задач це актуальна проблема, оскільки їх знання дає основу для розробки способів перевірки оптимальності та якості того чи іншого обраного розв'язку, та побудови ефективних методів знаходження множин оптимальних розв'язків, які мають деякі наперед задані властивості інваріантності при можливих збуреннях вхідних даних задачі [1].

У доповіді сформульовано умови оптимальності розв'язків векторної задачі дискретної оптимізації на допустимій множині, яка описується псевдоопуклими функціями обмежень [2], отримано достатні умови оптимальності Парето-оптимальних, слабо та строго ефективних розв'язків задачі, та різних типів стійкості задачі. Досліджено топологічні властивості деяких підмножин простору вхідних даних задачі, на яких зберігається оптимальність її розв'язків.

Постановка задачі. Основні означення. Розглянемо векторну задачу дискретної оптимізації такого вигляду: $Z_P\left(F,X\right):\max\left\{F(x)\,|\,x\in X\right\}$, де $F(x)=(f_1(x),...,f_l(x))$ — векторний критерій; $f_i:R^n\to R^1$, $i\in N_\ell=\left\{1,...,\ell\right\}$, X — непорожня множина в R^n, $X\subset Z^n$, $G=\left\{x\in R^n\mid g_i(x)\le 0,\,i\in N_m\right\}$, $g_i:R^n\to R^1,\,i\in N_m$.

Під розв’язанням задачі $Z_P\left(F,X\right)$ будемо розуміти знаходження елементів множини $P\left(F,X\right)$ — Парето-оптимальних (ефективних) розв’язків [3]. Розглядатимемо також множини: $Sl\left(F,X\right)$ — оптимальних за Слейтером (слабо ефективних) розв’язків, $Sm\left(F,X\right)$ — оптимальних за Смейлом (строго ефективних) розв’язків.

Згідно [1–6] для будь-якого $x\in X$ істинні такі твердження:

$$x\in P\left(F,X\right)\Leftrightarrow\pi\left(y,F,X\right)=\left\{y\in X\mid F\left(y\right)\ge F\left(x\right),F\left(y\right)\ne F\left(x\right)\right\}=\varnothing,$$

$$x\in Sl\left(F,X\right)\Leftrightarrow\sigma\left(y,F,X\right)=\left\{y\in X\mid F\left(y\right)>F\left(x\right)\right\}=\varnothing,\qquad(1)$$

$$x\in Sm\left(F,X\right)\Leftrightarrow\eta\left(y,F,X\right)=\left\{y\in X\mid y\ne x,F\left(y\right)\ge F\left(x\right)\right\}=\varnothing,$$

$$Sm\left(F,X\right)\subset P\left(F,X\right)\subset Sl\left(F,X\right).\qquad(2)$$

Умови оптимальності та стійкості розв’язків задачі $Z_P\left(F,X\right)$. Нехай функції $f_i(x),\ i\in N_\ell$, часткових критеріїв є псевдоугнутими функціями, а $g_i,\ i\in N_m$, — псевдоопуклі функції. Введемо до розгляду неперервну векторну задачу $Z_P(F,G):\ \max\{F(x)\big|\,x\in G\}$, що відповідає задачі $Z_P\left(F,X\right)$.

Позначимо $Fr\,B$ — сукупність усіх граничних точок деякої множини B, $\operatorname{int}B=B\setminus Fr\,B$. Для будь-якого розв’язку $y\in Fr\,G$ визначимо такі множини:

$$N(y)=\left\{i\in N_m\,\big|\,g_i(y)=0\right\},$$

$$H(y)=\left\{x\in R^n\,\big|\left\langle\nabla g_i(y),x-y\right\rangle\le 0,\,i\in N(y)\right\},$$

$$G(y)=\left\{x\in R^n\,\big|\,g_i(x)\le 0,i\in N(y)\right\},$$

$$K(y) = \left\{ x \in R^n \left| \left\langle \nabla f_i(y), x - y \right\rangle \geq 0,\ i \in N_\ell \right. \right\},$$

$$K_0(y) = \left\{ x \in R^n \left| \left\langle \nabla f_i(y), x - y \right\rangle = 0,\ i \in N_\ell \right. \right\},$$

де $\nabla f_i(y)$ — градієнт функції $f_i(x)$ у точці y.

Враховуючи висловлювання (1)–(24), справедливі при $X = G$, та очевидні включення $X \subset G \subset G(y) \subset H(y)$, $\sigma(y, F, G) \subset \operatorname{int} K(y)$, $\sigma(y, F, G) \subset \pi(y, F, G) \subset \eta(y, F, G) \subset K(y)$, $\pi(y, F, G) \subset K(y) \setminus K_0(y)$ приходимо до висновку про справедливість теореми.

Теорема 1. Нехай $y \in FrG \bigcap Z^n$. Якщо $g_i(x), i \in N(y)$, і $-f_i(x),\ i \in N_\ell$, — псевдоопуклі функції, то умови

$$\operatorname{int} K(y) \cap H(y) = \varnothing, \tag{3}$$

$$(K(y) \setminus K_0(y)) \cap H(y) = \varnothing, \tag{4}$$

$$K(y) \cap H(y) = \{0\} \tag{5}$$

є достатніми для належностей $y \in Sl(F, X)$, $y \in P(F, X)$, $y \in Sm(F, X)$ відповідно. Якщо $\{\nabla f_i(y) \mid i \in N_\ell\}$ і $\{\nabla g_i(y) \mid i \in N(y)\}$ — системи лінійно незалежних векторів, то співвідношення (3) — необхідна умова для $y \in Sl(F, G)$.

Нехай $u = (u_1, u_2)$ — набір вхідних даних задачі $Z_P(F, G)$, що є елементом деякого простору U вхідних даних задачі. Простір U можна подати як декартовий добуток $U = U_1 \times U_2$ простору U_1 вхідних даних для опису векторного критерія F і простору U_2 вхідних даних, що описують допустиму множину X. Зокрема, якщо векторний критерій представлений квадратичними функціями $f_i(x) = \left\langle x, D_i x \right\rangle + \left\langle c_i, x \right\rangle, i \in N_\ell$, де $D_i \in R^{n \times n}$, $c_i = (c_{i1}, ..., c_{in}) \in R^n$, то покладемо $u_1 = (D, C) \in U_1 = R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, де $D = (D_1, ..., D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $C = \left[c_{ij} \right] \in R^{\ell \times n}$. Якщо $\forall i \in N_\ell:\ g_i(x) = \left\langle x, Q_i x \right\rangle + \left\langle p_i, x \right\rangle + h_i$, $p_i \in R^n$, $h_i \in R$, $Q_i \in R^{n \times n}$ — симетрична невід'ємно визначена матриця, $i \in N_m$, то покладемо $u_2 = (Q, p, h) \in U_2 = R^{n \times n \times m} \times R^{m \times n} \times R^m$, де $Q = (Q_1, ..., Q_m)$, $p = (p_1, ..., p_m) \in R^{m \times n}$, $h = (h_1, ..., h_m) \in R^m$.

Згідно [3–6] наведемо означення п'яти типів стійкості векторної задачі $Z_P(F, X)$, позначивши $F_{u_1(\delta)}$ і $X_{u_2(\delta)}$ відповідно векторний критерій і допустиму область задачі при збуреннях вхідних даних $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Задача $Z_P(F,X)$ T_1-стійка, якщо $\exists\,\delta>0$, таке, що $\forall\,(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$ справедливе співвідношення

$$P(F,X)\bigcap P\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\neq\varnothing\,.$$

Задача $Z_P(F,X)$ T_2-стійка, якщо $\exists\delta>0$ і $\exists x\in P(F,X)$, такі, що $\forall\,(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$ виконується належність $x\in P\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)$.

Задача $Z_P(F,X)$ T_3-стійка, якщо $\exists\,\delta>0$, таке, що $\forall\,(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$ виконується включення

$$P\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subset P(F,X)\,.$$

Задача $Z_P(F,X)$ T_4-стійка, якщо $\exists\delta>0$, таке, що $\forall\,(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$ виконується включення

$$P(F,X)\subset P\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right).$$

Задача $Z_P(F,X)$ T_5-стійка, якщо $\exists\delta>0$, таке, що $\forall\,(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$ справедливе співвідношення

$$P(F,X)=P\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right).$$

Отримані результати стосуються стійкості щодо збурень всіх вхідних даних задачі, так і щодо збурень вхідних даних, що представляють її векторний критерій або обмеження. Виходячи з теореми 1, приходимо до низки тверджень.

Твердження 1. Якщо існує точка $y\in FrG\bigcap Z^n$, для якої виконується умова (5), то задача $Z_P(F,X)$ T_2-стійка за векторним критерієм.

Твердження 2. Якщо існує точка $y\in FrG\bigcap Z^n$, яка задовольняє умові (4) і не є строго ефективним розв'язком задачі $Z_P(F,X)$, то ця задача не є T_4- і T_5-стійкою.

Твердження 3. Якщо існує точка $y\in FrG\bigcap Z^n$, яка задовольняє умові (3) і не є Парето-оптимальним розв'язком задачі $Z_P(F,X)$, то ця задача не є T_3- і T_5-стійкою.

Встановлено топологічні властивості ряду підмножин простору вхідних даних задачі $Z(F,X)$, при яких зберігається оптимальність її розв'язків.

Теорема 2. Для будь-якого розв'язку $x\in Sm(F_{u_1},X)$ підмножина $U^1_{Sm}(x)=\left\{u_1\in U_1\,\middle|\,x\in Sm(F_{u_1},X)\right\}$ простору U_1 вхідних даних задачі $Z_P(F,X)$ є відкритим конусом.

Теорема 3. Для будь-якого розв'язку $x \in S\ell(F_{u_1}, X)$ підмножина $U^1_{S\ell}(x) = \left\{ u_1 \in U_1 \,\middle|\, x \in S\ell(F_{u_1}, X) \right\}$ простору U_1 початкових даних задачі — замкнений конус.

Теорема 4. Для будь-якого розв'язку $x \in \operatorname{int} X_{u_2}$ множини

$$U^2_{Sm}(x) = \left\{ u_2 \in U_2 \,\middle|\, x \in Sm\left(F, X_{u_2}\right) \right\},$$

$$U^2_{Sl}(x) = \left\{ u_2 \in U_2 \,\middle|\, x \in S\ell\left(F, X_{u_2}\right) \right\},$$

$$U^2_{P}(x) = \left\{ u_2 \in U_2 \,\middle|\, x \in P\left(F, X_{u_2}\right) \right\},$$

$$U_{Sm}(x) = \left\{ u = (u_1, u_2) \in U \,\middle|\, x \in Sm\left(F_{u_1}, X_{u_2}\right) \right\}$$

— відкриті конуси.

Висновки. Встановлено умови оптимальності різних видів розв'язків векторної задачі дискретної оптимізації на допустимій множині, що описується псевдоопуклими функціями обмежень, отримано достатні умови п'яти типів стійкості зазначеної задачі. Встановлено топологічні властивості підмножин простору вхідних даних задачі, на яких зберігається оптимальність її розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
2. Семенова Н. В. Умови ефективності та стійкості розв'язків у векторних задачах дискретної оптимізації. *Теорія оптимальних рішень*. 2015. С. 160–164.
3. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
4. Лебєдєва Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною. Доповіді НАН України. 2003. № 10. С. 80–85
5. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. № 4. С. 90–100.
6. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Качественные характеристики устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 2. С. 75–82.

The conditions of optimality of different types of solutions of vector problem of discrete optimization on a feasible set which the is described of psevdo-convex functions of restrictions are set, the sufficient conditions of five types of stability of the noted problem are got. Topological properties of of subsets of space of input data problems which the optimality of its solutions is saved on, are set.

Key words: *discrete optimization, vector problem, stability, well-posedness.*

Одержано 05.03.2017

УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ВІДСІЧЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

Запропоновано новий підхід до розв’язання методу відсічених систем. Показано рекурентні співвідношення для розв'язання числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Охарактеризована система лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами. Проведено порівняльну характеристику СЛАР з числовими елементами та описано тестування процедур лінійної алгебри в середовищі MatLab.

Ключові слова: *відсічені системи, системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами, процедури лінійної алгебри.*

Вступ. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. За умови використання таких методів розв'язок математичної задачі отримується у вигляді числового результату. Досліджуючи ті чи інші процеси або явища, проектуючи зразки нової техніки з використанням математичних методів і ЕОМ, спочатку складають математичну модель досліджуваного об'єкта. Тоді побудовану математичну модель перетворюють до такого вигляду, щоб розв'язок можна було знайти (звичайно з певною похибкою) у вигляді числового результату за допомогою арифметичних і логічних операцій. Таке перетворення виконують, застосовуючи числові методи.

Постановка проблеми. При розв’язанні широкого кола прикладних задач більшість сучасних вчених, інженерів і техніків, як правило, використовують пакети комп’ютерної алгебри. Розв’язання математичних задач з допомогою системи MatLab заслуговує особливої уваги. Зорієнтована на роботу з реальними даними, ця система виконує всі обчислення в арифметиці з плаваючою комою на відміну від

