3. Гупал А. М., Сергиенко И. В. Симметрия в ДНК. Методы распознавания дискретных последовательностей. К.: Наукова думка, 2016. 228 с.

The symmetric code concerning polarity of amino acids at mutations in nucleotides is constructed of symmetry in DNA. The noise immunity of genetic code against polarity is analyzed. On the basis of databases of genetic diseases it is shown that the symmetric code in most cases corrects violation of polarity at mutations.

Key words: *genetic code, mutations, amino acid, nucleotide.*

Получено 9.03.2017

УДК 517.988

С. В. Денисов, ассистент,
В. В. Семёнов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Киевский национальный университет имени Т. Шевченко, г. Киев

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Предложен модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Доказана слабая сходимость метода без предположения о липшицевости операторов.

Ключевые слова: *вариационное неравенство, монотонный оператор, экстраградиентный метод, слабая сходимость.*

Введение. Многие задачи исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in C : \left(Ax, y - x\right) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где C — непустое выпуклое подмножество гильбертового пространства H, A — монотонный оператор, действующий в H [1, 2]. Решение вариационных неравенств является активно развивающимся направлением прикладного нелинейного анализа. К настоящему времени предложено большое количество методов, в частности, методов проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество C).

Известно, что в случае неоптимизационных постановок (поиск седловой точки или равновесия Нэша) для сходимости наиболее простого проекционного метода (аналога метода проекции градиента) необходимо выполнение усиленных условий монотонности.

Для преодоления этой трудности существует несколько подходов. Один из них состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [3]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных Г. М. Корпелевич [4]. Экстраградиентный алгоритм Корпелевич для липшицевого оператора A имеет вид:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = P_C\left(x_n - \lambda A x_n\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

где $\lambda \in \left(0, 1/L\right)$ — постоянная Липшица оператора A, P_C — оператор метрического проектирования на множество C. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций.

Недавно для вариационных неравенств и задач равновесного программирования были предложены модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [5, 6]. В этих, так называемых, субградиентных экстраградиентных алгоритмах первый этап итерации совпадает с первым этапом итерации в алгоритме Корпелевич, а далее для получения x_{n+1} вместо проектирования точки $x_n - \lambda A y_n$ на допустимое множество C, точку $x_n - \lambda A y_n$ проектируют на некоторое опорное для C полупространство. Субградиентный экстраградиентный алгоритм имеет вид:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C\left(x_n - \lambda A x_n\right), \\ T_n = \left\{ z \in H : \left(x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n\right) \le 0 \right\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

где $\lambda \in \left(0, 1/L\right)$ — постоянная Липшица оператора A. В работах [5, 6] доказана слабая сходимость порожденных этим алгоритмом последовательностей $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$ к некоторому решению вариационного неравенства.

Очевидным недостатком субградиентного экстраградиентного алгоритма, затрудняющим его широкое использование, является предположение о том, что константа Липшица L оператора A известна или допускает простую оценку. Кроме того, во многих задачах операторы могут не удовлетворять условию Липшица. Заметим, что в большинстве работ по алгоритмам решения вариационных неравенств рассматриваются именно липшицевые операторы.

В данной работе предлагается модификация субградиентного экстраградиентного алгоритма с динамической регулировкой величины шага для вариационных неравенств с монотонным нелипшицевым оператором и доказыватся его сходимость.

Исследование выполнено при поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

Постановка задачи и вспомогательные сведения. Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Пусть C — непустое подмножество пространства H, A — оператор, действующий в H. Будем рассматривать вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений вариационного неравенства (1) обозначим $VI(A,C)$. Будем предполагать выполненными следующие условия: множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое; оператор $A: H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные; $VI(A,C) \neq \varnothing$. Пусть P_C — оператор метрического проектирования на множество C, то есть $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством

$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Рассмотрим функцию $t \mapsto \|x - P_C(x - tAx)\|$, ... Она обладает следующим полезным свойством.

Лемма 1. Для $x \in H$ и $\alpha \geq \beta > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{\|x - P_C(x - \alpha Ax)\|}{\alpha} \leq \frac{\|x - P_C(x - \beta Ax)\|}{\beta},$$

$$\|x - P_C(x - \beta Ax)\| \leq \|x - P_C(x - \alpha Ax)\|.$$

Модифицированный экстраградиентный алгоритм. Для решения неравенства (1) предлагаем следующий итерационный алгоритм.

Алгоритм 1.

Инициализация.

Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$ и элемент $x_0 \in H$.

Итерационный шаг.

Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right),$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\left\{ j \ge 0:\ \sigma\tau^j \left\| AP_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - Ax_n \right\| \le \theta \left\| P_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - x_n \right\| \right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Если $y_n = x_n$, то заканчиваем, иначе вычисляем

$$x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda_n A y_n\right),$$

где

$$T_n = \left\{ z \in H : \left(x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n\right) \le 0 \right\}.$$

Имеет место.

Лемма 2. Правило выбора параметра λ_n корректно, то есть

$$j(n) < +\infty.$$

Слабая сходимость алгоритма 1. Имеет место важное неравенство.

Лемма 3. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом, имеет место неравенство

$$\left\| x_{n+1} - z \right\|^2 \le \left\| x_n - z \right\|^2 - \left(1 - \theta^2\right) \left\| x_n - y_n \right\|^2,$$

где $z \in VI(A,C)$.

Из леммы 3 следует фейеровское свойство последовательности (x_n) относительно множества $VI(A,C)$. Это позволяет получить следующий результат относительно сходимости предлагаемого итерационного алгоритма.

Теорема 1. Последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A,C)$.

Выводы. Предложен модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Относительно операторов не предполагается их липшицевость. Основной теоретический результат — теорема о слабой сходимости методов. Сильно сходящийся вариант предложенного метода можно получить, используя метод итеративной регуляризации [3, 7] или гибридный метод из [8, 9].

Список использованной литературы:

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.

2. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
3. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 200 с.
4. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Т. 12, № 4. С. 747–756.
5. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 148. P. 318–335.
6. Ляшко С. И., Семенов В. В., Войтова Т. А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 146–154.
7. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2012. № 1 (107). С. 3–14.
8. Семенов В. В. Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 104–112.
9. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. 279. P. 372–379.

We present a modified extragradient method with dynamic rule for finding the stepsize for solving variational inequalities with monotone operators acting in a Hilbert space. We establish weak convergence of method without any Lipschitzian continuity assumption on operators.

Key words: *variational inequality, monotone operator, extra-gradient method, weak convergence.*

Получено 05.03.2017