24. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Комбінаторна оптимізаційна модель упакування прямокутників з імовірнісними обмеженнями. *Наукові записки НаУКМА*. 2015. Т. 177: Комп'ютерні науки. С. 58–62.
25. Емец О. А., Барболина Т. Н. О задачах оптимизации взаимного расположения прямоугольников в условиях стохастической, интервальной или нечеткой неопределенностию. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2015. Вип. 12. С. 83–100.

The review of last results concerning solving of combinatorial optimization problems on arrangements is presented. The author consider solving of problems both under certainty and under probabilistic uncertainty. Also modeling by deterministic and stochastic problems of combinatorial optimization on arrangements.

Key words: *combinatorial optimization, stochastic optimization, optimization problems on arrangements.*

Одержано 15.02.2017

УДК 519.8

О. А. Березовский, канд. физ.-мат. наук

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

НУЛЕВОЙ РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе рассматривается двойственная оценка (лагранжева релаксация) для квадратичной экстремальной задачи общего вида. Сформулированы условия, при выполнении которых значение глобального экстремума квадратичной экстремальной задачи и значение ее двойственной оценки совпадают.

Ключевые слова: *квадратичная экстремальная задача, двойственная оценка, лагранжева релаксация, неотрицательно определенная матрица, точная оценка (нулевой разрыв двойственности).*

Введение. Многие задачи оптимального управления, планирования, проектирования, моделирования, анализа сетевых структур и т.д., допускают представление в виде квадратичных экстремальных задач, т.е. задач оптимизации, целевая функция и все функции ограничений которых квадратичные (англ. quadratically constrained quadratic programming):

$$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x)\,, \tag{1}$$

где $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}; x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n\}$ — допустимое множество решений задачи (далее будем считать, что оно не пустое); $f_i(x) = x^T A_i x + b^T{}_i x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ — квадратичные функции, определенные в n-мерном пространстве, с симметричной $n \times n$-матрицей A_i, вектором $b_i \in R^n$ и константой $c_i \in R^1$; $m =| I^{LQ} | + | I^{EQ} |$ — общее количество ограничений.

В общем случае квадратичная экстремальная задача относится к классу NP-трудных задач, в связи с чем используют выпуклые релаксации для нахождения оценок ее глобального экстремума. Двойственная оценка задачи (1) определяется как [1]:

$$\psi^* = \sup_{u \in R^m} \left(\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x,u) \right) \le f^* \qquad (2)$$

при ограничениях

$$A(u) \succ= 0,$$

$$u \in U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LQ}, u \in R^m\},$$

где $L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$ — функция Лагранжа для задачи (1), $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$, $b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$, $A \succ= 0$ ($A \succ 0$) обозначает неотрицательно (положительно) определенную матрицу A.

Задачу (2) также называют лагранжевой релаксацией [2; 3] (если быть точным, она является лагранжевой релаксацией квадратичной экстремальной задачи по всем ограничениям с выписанным в явном виде условием, задающим множество двойственных переменных с точностью до граничных точек, при которых решение внутренней задачи не равно $-\infty$). Для нее можно встретить и термин SDP-релаксация Шора [4], что объясняется известным фактом взаимосвязи двойственных оценок и SDP-релаксаций. Например, в случае однородной квадратичной экстремальной задачи (т. е. когда все квадратичные формы задачи (1) не имеют линейных членов — $\forall i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ $b_i = 0$) при нахождении двойственной оценки (2) решение внутренней задачи $\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x,u)$ при u такое, что $A(u) \succ 0$, достигается при $x = 0$. Это позволяет переписать задачу (2) в виде задачи

$$\psi^* = \sup_{u \in R^m} (u, c) \qquad (3)$$

при ограничениях

$$A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i \succ= 0,$$

$$u_i \geq 0\,,\ i \in I^{LQ}\,,$$

которая является двойственной к задаче, получаемой SDP-релаксацией исходной задачи [5], и также относится к задачам полуопределенного программирования.

Использование двойственных оценок (лагранжевых релаксаций) для решения квадратичных экстремальных задач приводит к необходимости оценки качества получаемых результатов. Если для выпуклых задач двойственный подход позволяет получить как значение, так и точку глобального экстремума, то в невыпуклом случае вопрос точности оценки достаточно сложен. Далее сформулирован ряд условий, при которых значение глобального экстремума квадратичной экстремальной задачи общего вида и значение ее двойственной оценки совпадают (т. е. когда разрыв двойственности равен нулю).

Условия получения точной двойственной оценки (нулевого разрыва двойственности). Наиболее общим и очевидным является следующее необходимое и достаточное условие того, что двойственная оценка ψ^* (2) совпадает с оптимальным значением f^* целевой функции задачи (1).

Теорема 1 [6]. Для того, чтобы двойственная оценка ψ^* (2) для квадратичной экстремальной задачи (1) с $f^* > -\infty$ была точной, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор множителей Лагранжа u^*, при котором функция $L(u^*,x) - f^*$ представима в виде суммы квадратов линейных форм:

$$\exists u^* : L(u^*,x) - f^* = \sum_{j=1}^{k} l_i^2(x)\,,\ k \leq n\,. \ ■$$

С помощью теоремы 2 можно упростить доказательства для некоторых известных частных случаев, а также получать новые результаты. Например, из него прямо следует [6] результат Н.З. Шора (приведенная далее теорема 2) с достаточно объемным доказательством [1] для задачи нахождения глобального минимума ограниченного снизу полинома $P^* = \min\limits_{x \in R^n} P_0(x)$, которой в соответствие поставлена квадритичная задача:

$$P^* = \min_R f_0(R) \tag{4}$$

при ограничениях

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0\,,\ \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}\,,$$

$$0 \leq \alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)})^T \leq s/2\,. \tag{5}$$

Исходная задача сводится к задаче (4)–(5) следующим образом (далее s обозначает вектор старших степеней полинома $P_0(x)$):

1) для всех $\alpha^{(i)} \le \bar{\alpha} = s/2$ вводятся новые переменные $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)})R(\alpha^{(k)})$, $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)},\ldots,\alpha_n^{(r)})^T \le \bar{\alpha}$, в результате чего получаем полный набор переменных, покрывающих все мономы степени $\alpha^{(i)} \le \bar{\alpha}$, а полином $P_0(x)$ представим в виде квадратичной функции $f_0(R)$;
2) к квадратичным ограничениям, определяющим новые переменные, добавляется полное семейство ограничений вида $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$ для всех $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$, т. е. с помощью их линейной комбинации можно получить все представления (степени меньше или равно двух) любого монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$ степени $\alpha^{(r)} \le s$, а значит и полинома $P_0(x)$, в новых переменных.

Теорема 2 [1, с. 141]. Для того, чтобы двойственная оценка ψ^* квадратичной задачи (4)–(5) была точной, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_0(x) - f^*$ был представим в виде суммы квадратов полиномов.

В ряде случаев оказывается более удобным переформулировать общее условие точности для двойственной оценки следующим образом.

Теорема 3 [7]. Для того, чтобы двойственная оценка ψ^* (2) для квадратичной экстремальной задачи (1) была точной, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -f^* \end{pmatrix}$ была представима в виде разности неотрицательно-определенной матрицы и линейной комбинации матриц $\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,m}$, коэффициентами которой являются координаты вектора $u^* \in U^+$.■

Из формулировки необходимого и достаточного условия точности в виде теоремы 3 легко следует, например, следующий результат Н.З. Шора для задачи минимизации квадратичной функции на положительном ортанте.

Теорема 4 [1, с. 117]. Для задачи $f^* = \min_{x \in R^n}\{(x^T A_0 x + b_0^T x) : x \ge 0\}$ в случае $f^* > -\infty$ значение двойственной оценки (2) эквивалентной квадратичной задачи

$$\min_{x \in R^n}\{(x^T A_0 x + b_0^T x) : x \ge 0,\, x_i x_j \ge 0,\, i, j = \overline{1,n}\}$$

совпадает с f^* тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & r \end{pmatrix}$ для некоторого $r>0$ представима в виде суммы неотрицательной и неотрицательно определенной матрицы. ■

Приведенные в виде теорем 1 и 3 условия нахождения точных оценок трудно проверить на практике, что обусловило определение достаточного условия нулевого разрыва двойственности.

Обозначим Γ^+ — множество граничных точек множества $\{u : A(u) \succ= 0, u \in R^m\}$, удовлетворяющих условию $u_i \ge 0$, $i \in I^{LQ}$. Определим для каждого $u \in \Gamma^+$ множество

$$J(u) = \{j : \lambda_j(u) = 0, j \in \{1,...,n\}\},$$

где $\lambda_j(u)$, $j \in \{1,...,n\}$ — собственные числа матрицы $A(u)$. И пусть $\xi_j(u)$ — собственные вектора, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$.

Теорема 5 [8]. Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \Gamma^+ \;\; \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \ne 0, \qquad (6)$$

то двойственная оценка ψ^* (2) для квадратичной экстремальной задачи (1) точная. Причем, если условие (6) выполняется при $p = 0$, то вектор $x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$ решения задачи (2) является и решением задачи (1). ■

С помощью теоремы 5 были получены легко проверяемые частные случаи задачи построения шара минимального объема с заданным центром, описанного вокруг пересечения одинаково ориентированных эллипсоидов, для которых разрыв двойственности равен нулю [9]. Пример применения этой теоремы также можно найти в [8] при решении одной специальной задачи невыпуклой оптимизации, которая встречается при синтезе управления, минимизирующего область локализации инвариантного множества семейства нелинейных систем. Для решения этой задачи использовалась эквивалентная ей квадратичная постановка задачи, для нахождения нижней оценки оптимального значения целевой функции которой был применен двойственный подход. Используя теорему 5, сформулировано достаточное условие того, что данный подход дает оптимальное значение целевой функции и точку глобального экстремума исходной задачи.

Выводы. Использование релаксаций для решения квадратичных экстремальных задач приводит к необходимости оценки качества получаемых оценок. В данной работе сформулирован ряд условий, при которых оптимальное значение целевой функции квадратичной экстремальной задачи и значение ее двойственной оценки (лагранжевой релаксации) совпадают; приводятся примеры их применения.

Список использованной литературы:

1. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. К.: Наук. думка, 1989. 208 с.
2. Anstreicher K., Wolkowicz H. On Lagrangian relaxation of quadratic matrix constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2000. 22 (1). С. 41–55.
3. Lemaréchal C. Lagrangian relaxation. *Computational combinatorial optimization*. 2001. С. 112–156.
4. Kim S., Kojima M., Waki H. Exploiting sparsity in SDP relaxation for sensor network localization. *SIAM Journal on Optimization*. 2009. Т. 20. № 1. С. 192–215.
5. Vanderberghe L., Boyd S. Semidefinite programming. *Siam Review*. 1996. № 38. P. 49–95.
6. Березовский О. А. О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 1. С. 3–39.
7. Березовский О. А. Условие точности двойственных квадратичных оценок в матричном виде. *Теорія оптимальних рішень*. К.: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2015. С. 41–45.
8. Березовский О. А. О решении одной специальной оптимизационной задачи, связанной с определением инвариантных множеств динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3. С. 33–40.
9. Березовский О. А., Шулинок И. Э. Использование двойственного подхода для решения одной геометрической задачи. *Компьютерная математика*. К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 2016. № 2. С. 94–99.

This paper discusses the dual bound (Lagrangian relaxation) for quadratically constrained quadratic programming problem in general case. The conditions are formulated under which the value of a global extremum of quadratically constrained quadratic programming problem and the value of its dual bound coincide.

Key words: *quadratically constrained quadratic programming problem, dual bound, Lagrangian relaxation, non-negative definite matrix, exact bound (zero duality gap).*

Получено 15.02.2017