tion method of matrix conditioning is suggested. The calculating steadiness of the linear algebraic system equation solution algorithm in the Leontyev's model is analysed. The algorithm complexity and its effectiveness from the computer algebra point of view.

Key words: *badly conditional systems, number of matrix conditioning, the algorithm calculating steadiness, the Leontyev's model, the algorithm complexity.*

Отримано: 25.07.2016

УДК 517.912

М. І. Сєров, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Ю. В. Приставка, аспірант

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Побудовано нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Встановлено максимальну алгебру інваріантності, побудовано ліївські і нелокальні анзаци, проведено редукцію та знайдено точні розв'язки образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Ключові слова: *система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, симетрія, метод Лі, інваріантність, максимальна алгебра інваріантності, нелокальна заміна, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, інваріантний анзац, редукована система.*

Вступ. Більшість математичних моделей фізики, біології, хімії та інших природничих наук, а також економіки, фінансової математики тощо, формулюється з використанням диференціальних рівнянь. Тому невід'ємною складовою частиною розв'язування багатьох практичних задач є дослідження спеціальних класів диференціальних рівнянь і побудова їх точних розв'язків.

Точні розв'язки диференціальних рівнянь відіграють важливу роль в теоретичних і прикладних дослідженнях. Вони є ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей, ефективності наближених методів. Відомо багато методів для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь: метод Пуассона, метод Фур'є, метод оберненої задачі розсіювання. Регулярний метод побудови точних розв'язків є складовою частиною групового аналізу диференціальних рівнянь, створеного Софусом Лі. Відзначимо, що груповий аналіз є основним інструментом при встановленні відносин еквівалентності в різних класах рівнянь, побудові законів збереження, знаходженні точних розв'язків тощо.

Згідно з методом С. Лі диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліівською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок(анзаців). Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними. Але кількість розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними, які вдається побудувати за допомогою класичного алгоритму Лі, обмежена числом операторів ліівської симетрії. У той же час велика кількість диференціальних рівнянь, що є цікавими своїми прикладними застосуваннями, мають бідну ліівську симетрію. Природно, виникає задача знаходження нових(неліівських) симетрій, які дають змогу будувати ширші класи розв'язків рівнянь,що досліджуються. Тому актуальним є узагальнення методу Лі і побудови принципово нових анзаців і точних розв'язків, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі.

Нелокальний підхід широко застосовується для моделювання і дослідження процесів у фізиці високих енергій та у фізиці елементарних частинок. Для побудови теорії квантової електродинаміки в термінах напруженості електромагнітного поля застосовуються також нелокальні симетрії. Цей підхід застосовується, наприклад, для дослідження процесу поширення нерівноважної фонової температури на лазерному збудженні електрон-діркової плазми. Отже, нелокальний підхід для вивчення багатьох фізичних процесів має практичне підґрунтя і може бути використаний при дослідженні рівнянь та систем, які ці процеси описують.

Математичні моделі багатьох фізичних процесів найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. До таких систем відносять систему рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x\left[F(U)U_x + G(U)\right], \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\left(t, x\right)$, t — часова змінна, x — просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\left(U\right)$, $g^a = g^a\left(U\right)$ — коефіцієнти дифузії та конвекції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, $a, b = \overline{1,2}$.

Ця система успішно використовується для моделювання проблем у математичній фізиці, хімії та біології. Вона описує рух рідини у пористому середовищі, перенос енергії в плазмі, розподіл речовин у ґрунті та багато інших фізичних та біохімічних процесів.

У роботі поставимо задачу застосувати нелокальні перетворення еквівалентності для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків системи рівнянь конвекції-дифузії.

Нелокальні перетворення системи рівнянь конвекції-дифузії. Розглянемо сукупність трьох перетворень(див. [1]):

$$t = t,\ x = x, u^a = v_x^a, \tag{2}$$

де $v^a = v^a(t,x)$ — нові невідомі функції,

$$t = x_0,\ x = w^1,\ v^1 = x_1,\ v^2 = w^2, \tag{3}$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a\left(x_0, x_1\right)$ — нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_1,\ w_1^a = z^a, \tag{4}$$

$z^a = z^a\left(x_0, x_1\right)$ — нові залежні змінні.

Теорема 1. Перетворення (2)–(4) є перетвореннями еквівалентності системи (1).

Доведення. Застосуємо до системи (1) нелокальну заміну вигляду (2) (див., наприклад, [2]). Підставивши (2) в (1) і проінтегрувавши одержану систему за змінною x, будемо мати

$$U_t = F\left(V_x\right)V_{xx} + G\left(V_x\right), \tag{5}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (5) застосувати перетворення годографа (3), то дана система зведеться до вигляду

$$\begin{gathered}
w_0^1 = \frac{1}{\left(w_1^1\right)^2}\left[\left(f^{11} + w_1^2 f^{12}\right)w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2\right] - w_1^1 g^1, \\
w_0^2 = \frac{1}{\left(w_1^1\right)^3}\left[\left(f^{11} + w_1^2 f^{12}\right)w_1^2 - \left(f^{21} + w_1^2 f^{22}\right)\right]w_{11}^1 + \\
+\frac{1}{\left(w_1^1\right)^2}\left(f^{22} - w_1^2 f^{12}\right)w_{11}^2 - w_1^2 g^1 + g^2,
\end{gathered} \tag{6}$$

де $w_\mu^a = \dfrac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \dfrac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = \overline{0,1}$, причому у формулах (6) $f^{ab} = f^{ab}\left(\dfrac{1}{w_1^1}, \dfrac{w_1^2}{w_1^1}\right)$, $g^a = g^a\left(\dfrac{1}{w_1^1}, \dfrac{w_1^2}{w_1^1}\right)$, $a, b = \overline{1,2}$.

Продиференціювавши систему (6) за змінною x_1 та подіявши перетвореннями (4), одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\Phi(Z) Z_1 + \Psi(Z) \right], \tag{7}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \dfrac{\partial Z}{\partial x_\mu}, \partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z)$,

$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\psi^a = \psi^a(Z)$, $\mu = \overline{0,1}$, причому функції φ^{ab}, ψ^a пов'язані з функціями f^{ab}, g^a наступними співвідношеннями:

$$\varphi^{11} = \left(z^1\right)^{-2} \left(f^{11} + z^2 f^{12}\right), \varphi^{12} = -\left(z^1\right)^{-1} f^{12},$$

$$\varphi^{21} = \left(z^1\right)^{-3} \left[\left(f^{11} + z^2 f^{12}\right) z^2 - \left(f^{21} + z^2 f^{22}\right)\right],$$

$$\varphi^{22} = \left(z^1\right)^{-2} \left(f^{22} - z^2 f^{12}\right), \psi^1 = -z^1 g^1, \psi^2 = -z^2 g^1 + g^2,$$

де $f^{ab} = f^{ab}\left(\dfrac{1}{z^1}, \dfrac{z^2}{z^1}\right), g^a = g^a\left(\dfrac{1}{z^1}, \dfrac{z^2}{z^1}\right)$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок замін (2)–(4) зводить систему (1) до системи рівнянь того ж класу вигляду (7). Не важко переконатися, що система (7) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (1).

Теорема 1 доведена.

Симетрійні властивості образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Розглянемо систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1 u_x^1 + \mu u^2 u_x^2, \\ u_t^2 &= \lambda_2 u_{xx}^2 - u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1, \end{aligned} \tag{8}$$

де $x = \left(x_0, x_1\right)$, $u^a = u^a\left(x\right)$, λ_1 — коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 — коефіцієнт дифузії, μ — коефіцієнт конвекції, $a \in \{1, 2\}$. Ця система входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії. Система рівнянь Ван-дер-Вааальса — це система рівнянь стану, яка описує властивості реального газу. Вона широко застосовується у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин.

У роботі [3] встановлено, що система (8) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$AG_2(1,1) =< \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + \partial_{u^1},$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - I, \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI + x\partial_{u^1} >,$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $\partial_{u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}$, $I = u^1\partial u^1 + u^2\partial u^2$.

Якщо ж провести повний аналіз її симетрійних властивостей, то одержимо наступне твердження.

Теорема 2. Максимальною алгеброю інваріантності системи (8) в залежності від співвідношень між сталими λ_1, λ_2, μ є наступні алгебри

1) $AG_2(1,1)$, при $\lambda_1 \neq \lambda_2, \mu \neq 0$;

2) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2} >$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2, \mu = 0$;

3) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^1} >$ при $\lambda_1 = \lambda_2, \mu \neq 0$;

4) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^1}, u^2\partial_{u^2} >$ при $\lambda_1 = \lambda_2, \mu = 0$.

Теорема доводиться стандартним методом С. Лі (див., наприклад, [4; 5]).

Застосувавши до системи (8) перетворення (2)–(4) отримаємо систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{\left(z^1\right)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2\left(z^1\right)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu\left(z^2\right)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu\left(z^2\right)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (9)$$

Теорема 3. Максимальною алгеброю інваріантності системи (9) є алгебра

1) $A^{bas} < \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} >$, якщо $\mu \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) $A =< A^{bas}, z^2\partial_{z^2} >$, якщо $\mu = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

3) $A =< A^{bas}, z^2\partial_{z^2}, e^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2} >$, якщо $\mu = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_{z^1} = \frac{\partial}{\partial z^1}$, $\partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}$.

Доведення. Симетрію системи (9) будемо досліджувати методом Лі (див., наприклад, [4; 5]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності знаходимо у вигляді

$$X = \xi^\mu\left(x, u^\mu\right)\partial_\mu + \eta^\mu\left(x, u^\mu\right)\partial_{u^\mu}, \quad (10)$$

де $x = \left(x_0, x_1\right)$, $\mu = \overline{0,1}$, ξ^μ, η^μ — шукані функції.

З умови інваріантності системи (9) відносно оператора (10), одержимо систему визначальних рівнянь для координат ξ^{μ} та η^{μ} оператора (10):

$$\begin{gathered}\xi_1^0 = \xi_0^1 = \xi_{z^a}^0 = \xi_{z^a}^1 = \eta_{z^b z^c}^a = 0,\\ \alpha^{12} = \beta^1 = \mu\eta^2 = \mu\eta_0^2 = \alpha_0^{11} = \alpha_1^{22} = 0,\\ 2\alpha^{11} = \xi_1^1 - \xi_0^0,\ \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\beta^2 = 0,\\ \beta^2 = 2\lambda_2\beta_1^2,\ 2\lambda_2\alpha_{11}^{21} = \alpha_1^{21},\end{gathered} \tag{11}$$

де $\eta^a = \alpha^{ab}z^b + \beta^a$.

Розв'язком системи (11) будуть функції

1) $\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = d_1,\ \eta^1 = \kappa z^1,\ \eta^2 = 0$, якщо $\mu \ne 0,\ \lambda_1 \ne \lambda_2$;

2) $\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = d_1,\ \eta^1 = \kappa z^1,\ \eta^2 = c_1 z^2$, якщо $\mu = 0,\ \lambda_1 \ne \lambda_2$;

3) $\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0,\ \xi^1 = d_1,\ \eta^1 = \kappa z^1,\ \eta^2 = c_1 z^2 + c_2 e^{\frac{x_1}{2}}$, якщо $\mu = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Для кожного з випадків стандартним чином (див. [4; 5]) одержуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорема 3 доведена.

Ліївські анзаци системи рівнянь Ван-дер-Ваальса та її образу. У випадку $\mu \ne 0, \lambda_1 \ne \lambda_2$ ліївські симетрії систем (8) та (9) використаємо для побудови інваріантних анзаців. Застосувавши стандартний підхід Лі (див. [6]), одержимо нееквівалентні ліївські анзаци для системи (8)

$$\begin{aligned}u^1 &= \varphi^1(\omega),\\ u^2 &= \varphi^2(\omega),\end{aligned} \quad \omega = kt + mx; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}u^1 &= \varphi^1(\omega) - kt,\\ u^2 &= \varphi^2(\omega),\end{aligned} \quad \omega = \frac{kt^2}{2} + x; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}u^1 &= \mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega),\\ u^2 &= \mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega),\end{aligned} \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \tag{14}$$

$$\begin{aligned}u^1 &= \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega) + t\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}x,\\ u^2 &= \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega),\end{aligned} \quad \omega = \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}x \tag{15}$$

та для системи (9)

$$\begin{aligned} z^1 &= \varphi^1(\omega), \\ z^2 &= \varphi^2(\omega), \end{aligned} \quad \omega = kx_0 + mx_1; \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \\ u^2 &= \varphi^2(\omega), \end{aligned} \quad \omega = x_1 + k\ln x_0. \tag{17}$$

Нелокальні анзаци образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Подіємо композицією нелокальних перетворень (2)–(4) на анзаци (12), (14). У результаті отримаємо, що ліївські анзаци (12), (14) набудуть вигляду (16), (17), а анзаци (13), (15) перейдуть в нелокальні анзаци для системи (9)

$$\begin{aligned} \left(z^1\right)^{-1} &= \varphi^1(\omega) - kx_0, \\ z^2 &= z^1\varphi^2(\omega), \end{aligned} \quad \omega = \tau + \frac{1}{2}kx_0^2,\ \tau_1 = z^1; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{\left(x_0^2+1\right)\varphi^1}{\sqrt{x_0^2+1} + \tau x_0\varphi^1}, \\ z^2 &= \frac{\left(x_0^2+1\right)\varphi^2}{\sqrt{x_0^2+1} + \tau x_0\varphi^1}, \end{aligned} \quad \omega = -\frac{1}{2}\frac{\tau^2 x_0}{x_0^2+1},\ \tau_1 = z^1. \tag{19}$$

Редукція та розв'язки образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Підставивши анзаци (18), (19) у систему (8), одержимо наступні редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 + k = 0, \\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 - \omega = 0, \\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Одним із розв’язків редукованої системи (21) при $\mu > 0$ (див. [4; 7; 8]) є

$$\varphi^1(\omega) = -\frac{\lambda_2}{\omega},$$

$$\varphi^2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\omega + \frac{\sqrt{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\omega}\right).$$

Використавши анзац (19), знаходимо розв’язок системи (9), записаний в параметричному вигляді:

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_0 \tau^2}{x_0^2 + 1} - \lambda_2 \ln \tau,$$

$$z^1 = \frac{(x_0^2 + 1)\tau}{x_0 \tau^2 - \lambda_2 (x_0^2 + 1)},$$

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\tau^2 + \sqrt{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(x_0^2 + 1 \right)}{x_0 \tau^2 - \lambda_2 \left(x_0^2 + 1 \right)}.$$

Висновки. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії (1), які пов'язують між собою різні системи даного класу. Ці перетворення можуть бути використані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків даної системи. У даній роботі це було проілюстровано на прикладі образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Список використаних джерел:

1. Сєров М. І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису : монографія / М. І. Сєров, О. М. Омелян. — Полтава : ПолтНТУ, 2011. — 236 с.
2. King J. R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation / J. R. King // Journal of Mathematical Phisics. — 1990. — Vol. 23. — P. 5441–5464.
3. Сєрова М. М. Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса / М. М. Сєрова, О. М. Омелян // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 254–261.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л. В. Овсянников // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 125. — С. 492–495.
5. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 581 с.
6. Фущич В. И. О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Сєров, Т. К. Амеров. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.
7. Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, М. И. Сєров // Докл. АН УССР. — 1990. — № 11 — С. 15–18.
8. System of reaction-convection-diffusion equation invariant under Galilean algebras / M. I Serov, T. O. Karpaliuk, O. G. Pliukhin, I. V. Rassokha // Jornal of Mathematical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 422. — P. 155–211.

Non-local transformations of equivalence of system convection-diffusion equations constructed. For the Van der Waals system-image of equations maximal invariance algebra was established, Li's and non-local anzatze were constructed, a reduction was carried and exact solutions were found.

Key words: *system of convection-diffusion equations, non-local transformations of equivalence, symmetry, the method of Lie, invariance ,maximal invariance algebra, local change, the Van der Waals system of equations, invariant anzatz, reduced system.*

Отримано: 07.07.2016