УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ПОГАНО ОБУМОВЛЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

У статті запропоновано новий підхід до розв’язання погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Підраховано арифметичні операції СЛАР при чисельній реалізації алгоритму на ЕОМ. Наведено спосіб обчислення числа обумовленості матриці. Проаналізовано обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: *погано обумовлені системи, число обумовленості матриці, обчислювальна стійкість алгоритму, модель Леонтьєва, складність алгоритму.*

Вступ. Успішне розв'язання численних задач економіки стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Особливо часто їх доводиться розв'язувати під час дослідження економічних процесів. Важливими є дослідження методів, пов'язаних із виникненням, аналізом та розв'язуванням погано обумовлених СЛАР [1–3]. Як відомо з теореми Кронекера-Капеллі [4], система лінійних рівнянь може мати єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків або не мати розв'язку взагалі (система несумісна). В останньому випадку задача не позбавлена змісту, бо тоді шукають не розв'язок у звичайному сенсі, а такий набір значень невідомих, після підстановки яких у систему ліві частини «найменше» відхиляються від правих. Слово «найменше» можна інтерпретувати порізному, різним його інтерпретаціям відповідають метод найменших квадратів, метод найменших модулів та ін. [1].

При розв'язуванні СЛАР дуже часто трапляється, що малі похибки правих частин чи заданих коефіцієнтів призводять до великих похибок у розв'язках [5]. Похибки можуть виникати під час вимірювання, обчислення чи заокруглення елементів матриць систем або правих частин. Такі СЛАР називатимемо некоректно поставленими, або погано обумовленими. Така термінологія застосовується ще з часів Ж. Адамара [6], який вважав вивчення некоректно поставлених задач недоцільним, тому що їх завжди можна після уточнення математичної моделі поставити коректно (розумно).

Нехай обчислювальна задача з початковими даними $A(\lambda)$ розв'язується з допомогою деякого точного алгоритму g. Результат K розв'язання задачі запишемо у вигляді $K = g(A(\lambda))$.

При реалізації алгоритму g на ЕОМ всі його операції будуть замінені машинними псевдооперацiями, а сам алгоритм – деяким машинним алгоритмом $K = g_t(A(\lambda))$, результат виконання якого запишемо $X_t(\lambda) = g_t(A(\lambda))$.

Різницю $\Delta = X_t(\lambda) - X(\lambda)$ називають похибкою обчислення на ПЕОМ. Такий метод врахування сумарної похибки заокруглення називають прямим аналізом похибок. Для багатьох числових методів похибки проміжних обчислень у сукупності рівносильні випадку, коли б ті ж методи (в нашому випадку алгоритм g) точно розв'язували б кожен свою задачу, попередньо змінивши вхідні дані (наприклад, на $A_t(\lambda)$): $X_t(\lambda) = g(A_t(\lambda))$.

Різницю $K = X_t(\lambda) - X(\lambda)$ називають еквівалентним збуренням, яке також характеризує похибку розв'язання задачі. Останню рівність запишемо у вигляді $X_t(\lambda) = g(A(\lambda) + K)$, $X_t(\lambda)$ можна розглядати як розв'язок тієї ж задачі зі збуреними на K вхідними даними. Для отримання кількісної оцінки впливу похибок заокруглення використовують так званий зворотний аналіз похибок [5-6].

На практиці часто наштовхуються на такі ситуації: погана обумовленість матриць нормативних коефіцієнтів, велика розмірність задачі, накопичення похибки під час обчислень при знаходженні розв'язків СЛАР у моделі Леонтьєва.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [8, с. 128–135] запропоновано новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць.

Актуальність теми. Застосування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв'язання погано обумовлених систем розглядалися у працях [5]. Однак, лише в окремих з них розглядаються питання щодо розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва [1].

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження моделі Леонтьєва, побудова оптимального способу обчислення числа обумовленості матриці, аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, економіко-математичне моделювання.

Основна частина. При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь виникають похибки, пов'язані з неточністю початкових даних чи похибки заокруглення. Крім того, майже завжди виникають помилки при обчисленні вже у межах самої задачі (внаслідок неточного виконання арифметичних операцій). Помилки цього типу (так звані обчислювальні) в багатьох випадках у сукупності рівносильні точному розв’язку такої ж задачі, але зі зміненими вхідними даними.

Навіть за умови, що попередні вимірювання та обчислення проводили з високою точністю і для розв’язання задачі вибрано стійкий метод обчислень, помилки вхідних даних, хоча й малі, але все ж будуть. Ці похибки певною мірою впливають на розв'язок систем. Тому фактично замість узагальненого розв'язку системи Леонтьєва [7]

$$X(\lambda)=A(\lambda)X(\lambda)+y(\lambda),$$

де $A(\lambda)$ — матриця розміру $n\times m$, $X(\lambda)$ — невідомий вектор, $y(\lambda)$ — заданий вектор, ми отримуємо розв'язок якоїсь іншої системи зі збуреними елементами [1]

$$X(\lambda)=\overline{A}(\lambda)X(\lambda)+\overline{y}(\lambda).$$

З огляду на це виникає запитання, як похибки вхідної інформації впливають на якість розв'язку системи. Точної відповіді на це запитання немає, тому спробуємо хоча б оцінити вплив похибок вхідної інформації на розв'язок [6]. Запишемо систему

$$X(\lambda)=A(\lambda)X(\lambda)+y(\lambda), \tag{1}$$

або

$$y(\lambda)=\left(E-A(\lambda)\right)X(\lambda) \tag{2}$$

у вигляді $X(\lambda)=\dfrac{y(\lambda)}{E-A(\lambda)}$, де E — одинична матриця і $E-A(\lambda)\neq 0$.

Вважаючи $A(\lambda)$ і $y(\lambda)$ змінними і продиференціювавши цю рівність, отримаємо $dX\left(\lambda\right)=\left(E-A\left(\lambda\right)\right)^{-1}dy\left(\lambda\right)-y\left(\lambda\right)$.

Систему (1) можна звести згідно з [6] до вигляду

$$\left.\begin{array}{l}
A_0X_0-Y_0z_0=0;\\
A_0X_1+A_1X_0-(Y_0z_1+Y_1z_0)=0;\\
A_0X_2+A_2X_0+(Y_0z_2+Y_1z_1+Y_2z_0)=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum\limits_{j=0}^{l}A_jX_{p-s}-\sum\limits_{j=0}^{l}Y_jz_{p-j}=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{l-1}X_s+A_lX_{s-1}-(Y_{l-1}z_s+Y_lz_{s-1})=0;\\
A_lX_s-Y_lz_s=0.
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Тут $X_0,X_1,...,X_s$ — вектори розмірності $n+m$, а $X_0,X_1,...,X_s$ — скалярні величини. Тоді систему (1) можна записати як числову систему $\left(n+m\right)\left[\left(n+m+1\right)+1\right]$ рівнянь із $\left(n+m+1\right)\left[l\left(n+m\right)+1\right]$ невідомими.

Отриману систему (3) запишемо у матричному вигляді так:

$$\begin{pmatrix}
A_0 & & & & & & & & & & & & & & & & -B_0\\
A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & & & & & -B_1\\
A_2 & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & & & & -B_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & & & & & \ldots\\
A_l & A_{l-1} & A_{l-2} & \ldots & A_0 & & & & & & & & & & & & -B_l\\
 & A_l & A_{l-1} & \ldots & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & \\
 & & A_l & \ldots & A_2 & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & & \\
 & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & \\
 & & & & & & A_l & A_{l-1} & \ldots & A_0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & A_l & A_{l-1} & \ldots & A_0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & A_l & A_{l-1} & \ldots & A_0 & & & -B_0 & \\
 & & & & & & & & & & A_l & \ldots & A_1 & A_0 & -B_0 & -B_1 & \\
 & & & & & & & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
 & & & & & & & & & & & & A_1 & A_{l-1} & -B_{l-1} & -B_l & \\
 & & & & & & & & & & & & & A_l & -B_l & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X_0\\ X_1\\ X_2\\ \ldots\\ X_N\\ X_{N+1}\\ X_{N+2}\\ \ldots\\ X_{Nl+N}\\ \ldots\\ y_0\\ y_1\\ y_2\\ \ldots\\ \ldots\\ y_{Nl+N-1}\\ y_{Nl+N}
\end{pmatrix}=0,$$

де A_{ij} — блоки розмірності $n\times n$.

Розглянемо схеми розв'язання отриманих систем. Схематично матриця числової системи має структуру заповнення [6]:

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & I & & & & \\ \times & \times & & & & I & I & & & \\ \times & \times & \times & & & I & I & I & & \\ \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I & \\ & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & & I & I \\ & & & & \times & & & & & I \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Перестановкою стовпців систему (3) можна перетворити таким чином, щоб її матриця набула заповнення

$$\begin{pmatrix} \times & I & & & & & & & & \\ \times & I & \times & I & & & & & & \\ \times & I & \times & I & \times & I & & & & \\ \times & I & \times & I & \times & I & \times & I & & \\ & & \times & I & \times & I & \times & I & \times & I \\ & & & & \times & I & \times & I & \times & I \\ & & & & & & \times & I & \times & I \\ & & & & & & & & \times & I \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де через «$\times$» позначені квадратні клітки A_l, а через «I» — вектори правих частин B.

Для визначеності будемо вважати, що система (3) складається з $m(l+s+1)$ рівнянь і має $m(l+s+1)+k$ невідомих $(k \geq 1)$.

Нехай $rank\ A_0 = \min\{m, l\}$. Загальна стратегія розв'язання цієї системи залежить від її рангу. Спочатку розглянемо найбільш трудомісткий з обчислювальної точки зору варіант числової системи. Для цього припустимо, що всі основні мінори схематично нарисованої матриці не дорівнюють нулю. Тоді перші $m(l+s+1)$ невідомих можуть бути виражені через k останніх розв'язків системи (5). При зроблених припущеннях про характер матриці (4) підматриця, утворена блоками «$\times$», буде невиродженою.

Таким чином, схематично процес перетворення матриці системи може бути представлений у вигляді

$$\begin{pmatrix} \times & & & & I & & & \\ \times & \times & & & I & I & & \\ \times & \times & \times & & I & I & I & \\ \times & \times & \times & \times & I & I & I & I \\ & \times & \times & \times & \times & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & I & I \\ & & & & \times & & & & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddots & & & & & I & & & & \\ & \ddots & & & & I & I & & & \\ & & \ddots & & & I & I & I & & \\ & & & \ddots & & I & I & I & I & \\ & & & & \ddots & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \end{pmatrix}.$$

Для реалізації алгоритму на ЕОМ потрібно виконати з точністю до основного члена Cm^4l^3 арифметичних операцій, де m і l — кількість рядків та стовпців матриці.

Величина константи C залежить від вибраного алгоритму зведення матриці до діагонального вигляду.

Введемо число обумовленості $\mu(A)$ для матриці вигляду (1)

$$\mu(A) = \max_{x\neq 0,\, \zeta\neq 0}\left[\frac{\|Ax\|}{\|A\zeta\|}\cdot\frac{\|\zeta\|}{\|x\|}\right], \tag{6}$$

яку можна записати у вигляді

$$\mu(A) = \left[\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\Big/\min_{\zeta\neq 0}\frac{\|A\zeta\|}{\|\zeta\|}\right] = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}}, \tag{7}$$

де $\delta_{\max}, \delta_{\min}$ — максимальне та мінімальне власні значення, матриці A^*A, A^* — транспонована матриця до матриці A.

Дослідимо величину $\mu(A)$ в оцінці похибки при збуренні вихідних даних вектора Y і матриці A. Розглянемо з Y вектор $Y+\Delta Y$. Нехай $x, x+\Delta x$ — відповідно розв'язок моделі Леонтьєва $X = \left(E - A(t)\right)^{-1} Y(t)$, а також $X+\Delta X = \left(E - A(t)\right)^{-1}\left(Y(t)+\Delta Y(t)\right)$. Тоді $\Delta X = \left(E - A(t)\right)^{-1}\Delta Y(t)$. Згідно з визначенням $\mu(A)$ із (6) матимемо

$$\mu(A) = \max_{\zeta,\,\Delta\zeta}\left[\frac{\left\|\left(E-A(t)\right)^{-1}\zeta\right\|}{\left\|\left(E-A(t)\right)^{-1}\Delta\zeta\right\|}\cdot\frac{\|\Delta\zeta\|}{\|\zeta\|}\right] \geq \left[\frac{\left\|\left(E-A(t)\right)^{-1}\cdot X\right\|}{\left(E-A(t)\right)^{-1}\Delta X}\cdot\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\right],$$

звідки

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \mu(A)\cdot\frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}, \tag{8}$$

тобто $\mu(A)$ — найменша константа, для якої при всіх $\Delta X, X, \Delta Y, Y$ виконується нерівність (8). Отже, $\mu(A)$ виконує роль множника при зростанні відносної похибки розв'язку. Це означає, що внаслідок зміни вектора в правій частині системи зміни в розв'язку збільшуються в $\mu(A)$ разів. Інакше кажучи, нерівність (8) означає, що $\mu(A)$ обмежує зверху відношення відносної невизначеності вектора X до відносної невизначеності вектора Y. Важливо наголосити, що оцінка (8) точна. Це свідчить про те, що за відповідного підбору векторів Y, ΔY можна досягти рівності. Оцінка (8) досяжна, значить, не можна дати точнішу оцінку, ніж (8), для довільних векторів Y, ΔY незалежно від їхньої величини.

Аналогічний зміст числа обумовленості в загальній ситуації, коли збурюються вектор Y і матриця A:

$$(X+\Delta X)=\left(E-\left(A(t)+\Delta A(t)\right)\right)^{-1}\left(Y(t)+\Delta Y(t)\right).$$

Виходячи з цього, наведемо завершальну оцінку [1]

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\le\frac{\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A(t)\|}+\dfrac{\|\Delta Y(t)\|}{\|Y(t)\|}}{1-\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A\|}\mu(A)}\cdot\mu(A),\tag{9}$$

отриману в припущенні невиродженості матриці A та умови $\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A(t)\|}\mu(A)<1.$

Якщо A — вироджена матриця, то отримаємо випадок $\mu(A)=\infty$, оскільки $\min\dfrac{\|A(t)\cdot\zeta\|}{\|\zeta\|}=0$ і оцінки (8) і (9) втрачають сенс. Якщо A — невироджена матриця, то $\mu(A)=\|A(t)\|\cdot\|A^{-1}(t)\|$, де $A^{-1}(t)$ — обернена до $A(t)$ матриця, тобто матриця, яка задовольняє відношення $A(t)A^{-1}(t)=A^{-1}(t)A(t)=E.$

Отже, з оцінок (8), (9) випливає, що число обумовленості матриці $A(t)$ є характерним, від того, наскільки розв'язок системи $X=\left(E-A(t)\right)^{-1}Y(t)$ стійкий до збурень компонент вектора правих частин $Y(t)$ та матриці коефіцієнтів $A(t)$.

Аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Погано обумовленою може бути не сама задача, а лише алгоритм, вибраний для її розв’язування. Якщо обчислений розв’язок суттєво відрізняється від точного внаслідок виконання числового алгоритму, то такий алгоритм називають нестійким.

При реалізації алгоритму на комп'ютері виникають похибки заокруглення даних, сумарний ефект яких необхідно враховувати при розв’язуванні задач (8), (9).

Розглянемо процес зведення щільно заповнених систем рівнянь з λ — матрицями до звичайних лінійних алгебраїчних систем із числовими елементами. В результаті запропонованих перетворень виникає система стрічкового вигляду несиметричної структури. Порядок N системи дорівнює $n^2\left(l+1\right)$, а максимальна ширина L стрічки становить nl. Застосувавши обчислювальну схему другого методу відсічених систем [6] для розв'язку отриманої стрічкової системи N-го порядку $\left(N=\left(n+m+1\right)\left[l\left(n+m\right)+1\right]\right)$, отримаємо рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} b_{i,k}=\dfrac{a_{i,k}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{i,j}x_j^{(k-1)}}{a_{k,k}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{k,j}x_j^{(k-1)}} & \left(i=k+1,...,N\right), \\ z_k=b_{k+1,k} & \left(k=1,2,...,N-1\right), \\ z_s=b_{k+1,k}-\sum\limits_{i=s+1}^{L}b_{i,s}z_i & \left(s=k-1,\ \ k-2,...,1\right). \end{cases} \tag{10}$$

Та

$$\begin{cases} b_{k,i}=\dfrac{a_{k,i}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{j,i}z_j^{(k-1)}}{a_{k,k}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{j,k}x_j^{(k-1)}} & \left(i=k+1,...,N+1\right), \\ x_k=b_{k,k+1} & \left(k=1,2,...,N\right), \\ x_s=b_{s,k+1}-\sum\limits_{i=s+1}^{L}b_{s,i}x_s & \left(s=k-1,\ \ k-2,...,1\right). \end{cases} \tag{11}$$

З точки зору обчислювальної стійкості дана схема практично не відрізняється від звичайного методу відсічених систем. Тому для еквівалентних збурень елементів чисельної матриці A, що відповідають реалізації алгоритму на комп'ютері, запишемо

$$\left\|\alpha_{i,j}\right\| \le 3,05 \cdot \left\|A\right\| \xi^{-l+1}, \ \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n+1}\right), \qquad (12)$$

Таким чином, обчислювальний процес для даного випадку володіє виключно високою чисельною стійкістю.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Підраховано кількість арифметичних операцій при чисельній реалізації алгоритму СЛАР на електронно-обчислювальні машині. Наведено спосіб обчислення числа обумовленості матриці. Проаналізовано обчислювальну стійкість алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва.

Запропонований алгоритм можна ефективно використовувати в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних задач і прикладних задач механіки.

На основі запропонованого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Вони підтверджують ефективність алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Заборовець М. О. Сучасні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь / М. О. Заборовець, Ф. А. Левченко, М. Г. Охріменко. — К. : КНЕУ, 2006. — 76 с.
2. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Г. Цегелик. — Л. : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 408 с.
3. Воеводин В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — СПб. : Лань, 2008. — 416 с.
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
5. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений / Д. Уоткинс. — М. : Бином. Лаборатория знаний, 2006. — 664 с.
6. Недашковський М. О. Обчислення з λ-матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наукова думка, 2007. — 294 с.
7. Григорків В. С. Моделювання економіки. Ч. 2 : навч. посібник / В. С. Григорків. — Чернівці : Рута, 2006. — 100 с.
8. Семчишин Л. М. Розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами / Л. М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2007. — Вип. 6. — С. 128–135.

In the work new approach to the badly conditional systems of linear algebraic equation in the Leontyev's model solution is suggested. Arithmetical operation of the linear algebraic system equation calculation under the algorithm numerical realisation on the ECM is conducted. The calculation method of matrix conditioning is suggested. The calculating steadiness of the linear algebraic system equation solution algorithm in the Leontyev's model is analysed. The algorithm complexity and its effectiveness from the computer algebra point of view.

Key words: *badly conditional systems, number of matrix conditioning, the algorithm calculating steadiness, the Leontyev's model, the algorithm complexity.*

Отримано: 25.07.2016

УДК 517.912

М. І. Сєров, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Ю. В. Приставка, аспірант

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Побудовано нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Встановлено максимальну алгебру інваріантності, побудовано ліївські і нелокальні анзаци, проведено редукцію та знайдено точні розв'язки образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.

Ключові слова: *система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, симетрія, метод Лі, інваріантність, максимальна алгебра інваріантності, нелокальна заміна, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, інваріантний анзац, редукована система.*

Вступ. Більшість математичних моделей фізики, біології, хімії та інших природничих наук, а також економіки, фінансової математики тощо, формулюється з використанням диференціальних рівнянь. Тому невід'ємною складовою частиною розв'язування багатьох практичних задач є дослідження спеціальних класів диференціальних рівнянь і побудова їх точних розв'язків.

Точні розв'язки диференціальних рівнянь відіграють важливу роль в теоретичних і прикладних дослідженнях. Вони є ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей, ефективності наближених методів. Відомо багато методів для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь: метод Пуассона, метод Фур'є, метод оберненої задачі розсіювання. Регулярний метод побудови точних розв'язків є складовою частиною групового аналізу диференціальних рівнянь, створеного Софусом Лі. Відзначимо, що гру-

