3. Embrechts P. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims / P. Embrechts, N. Veraverbeke // Insurance: Math. Econ. — 1982. — Vol. 1. — № 1. — P. 55–72.
4. Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику : навчальний посібник / Н. М. Зінченко. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. — 224 с.
5. Леоненко М. М. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. — К. : Інформтехніка, 1995. — 380 с.
6. Білинський А. Я. Ймовірність банкрутства для випадку субекспоненційних роз-поділів витрат / А. Я. Білинський, О. М. Кінаш // Сборник научных трудов SWorld. — Иваново : Маркова А. Д., 2015. — Вип. 1 (38). — Т. 21. — С. 95–100.

The asymptotic behavior of the probability of bankruptcy for large payments.

Key words: *the probability of bankruptcy, «heavy tails», subexponential distributions.*

Отримано: 21.07.2016

УДК 519.21

О. В. Борисенко, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ПІД ДІЄЮ МАЛИХ ВИПАДКОВИХ НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням третього порядку з малими нелінійними періодичними зовнішніми збуреннями типу багатовимірного «білого» шуму, центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Розглянуто нерезонансний випадок.

Ключові слова: *асимптотична поведінка, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, центрована і нецентрована Пуассонівські міри.*

Вступ. Вивчення коливних процесів є дуже важливим у різноманітних галузях механіки, фізики, техніки і економіки. Як приклади коливних систем можна розглядати вібрацію конструкцій і механізмів, електро-магнітні коливання у радіотехніці і оптиці, автоколивання у системах керування, звукові та ультразвукові коливання.

Метод усереднення, запропонований М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим [1], є одним з основних інструментів при вивченні коливних систем під дією малих нелінійних зовнішніх збурень. У роботі М. М. Боголюбова і Ю. О. Митропольського [2] принцип усереднення обґрунтовано, зокрема для неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку, під дією малих детермінованих нелінійних періодичних збурень. У роботі І. І. Гіхмана і А. В. Скорохода [3, с. 286] розглядалась автономна коливна система другого порядку під дією зовнішніх малих випадкових збурень типу «білого шуму» і доведено слабку збіжність амплітуди і фази коливань до граничних значень, які задовольняють усереднену систему стохастичних диференціальних рівнянь. Асимптотична поведінка випадкового процесу на виході нелінійного пристрою, близького до лінійного осцилятора, на вхід якого надходить малий періодичний сигнал та малий випадковий стаціонарний у широкому сенсі процес, і який у процесі роботи зазнає випадкового імпульсного впливу вивчалась у роботі А. М. Самойленка і О. М. Станжицького [4, с. 274]. Автономні і неавтономні коливні системи другого порядку під дією нелінійних малих зовнішніх збурень типу «білого шуму» і центрованого Пуассонівського шуму вивчались у роботах О. В. Борисенко [5; 6]. Вивчення впливу на коливну неавтономну систему третього порядку малих зовнішніх випадкових періодичних збурень типу багатовимірного «білого шуму», центрованого та нецентрованого Пуассонівських шумів є актуальною задачею.

Основні результати. У роботі розглянемо поведінку, при $\varepsilon \to 0$, неавтономної коливної системи третього порядку, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням виду

$$\begin{gathered} x'''(t) + ax''(t) + b^2 x'(t) + ab^2 x(t) = \\ = \varepsilon^{k_0} f_0\left(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)\right) + f_\varepsilon\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right) \end{gathered} \tag{1}$$

з невипадковими початковими умовами $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, $x''(0) = x''_0$, де $\varepsilon > 0$ — це малий параметр, $f_\varepsilon(t, x, x', x'')$ — це випадкова функція, така що

$$\begin{gathered} \int_0^t f_\varepsilon\left(s, x(s), x'(s), x''(s)\right) ds = \\ = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i\left(\mu_i s, x(s), x'(s), x''(s)\right) dw_i(s) + \\ + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_R f_{m+1}\left(\mu_{m+1} s, x(s), x'(s), x''(s), z\right) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_0^t \int_R f_{m+2}\left(\mu_{m+2} s, x(s), x'(s), x''(s), z\right) \nu_2(ds, dz), \end{gathered}$$

$k_i > 0$, $i = \overline{0, m+2}$; f_i — це невипадкові функції, періодичні по $\mu_i t$, $i = \overline{0, m+2}$ з періодом 2π; $w_i(t), i = \overline{1, m}$ — це незалежні одновимірні вінерові процеси; $\tilde{\nu}_1(dt, dz) = \nu_1(dt, dz) - \Pi_1(dz)dt$, $\nu_1(dt, dz)$ і $\nu_2(dt, dz)$ — це незалежні міри Пуассона незалежні від $w_i(t), i = \overline{1, m}$; $E\nu_i(dt, dz) = \Pi_i(dz)dt, i = 1, 2$, $\Pi_i(A), i = 1, 2$ — це скінченні міри на борелевих множинах $A \subset R$; $a > 0, b > 0.$ Будемо вивчати нерезонансний випадок $\mu_i \neq \dfrac{p_i}{q_i} b, i = \overline{0, m+2},$ де p_i і q_i — це взаємно прості цілі числа.

Рівняння (1) будемо розуміти як систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$
\begin{gathered}
dx(t) = x'(t)dt, \\
dx'(t) = x''(t)dt, \\
dx''(t) = [-ax''(t) - b^2 x'(t) - ab^2 x(t) + \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + \\
+\varepsilon^{k_{m+2}} \int_R f_{m+2}(\mu_{m+2} t, x(t), x'(t), x''(t), z)\Pi_2(dz)]dt + \\
+\sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, x(t), x'(t), x''(t)) dw_i(t) + \\
+\varepsilon^{k_{m+1}} \int_R f_{m+1}(\mu_{m+1} t, x(t), x'(t), x''(t), z)\widetilde{\nu_1}(dt, dz) + \\
+\varepsilon^{k_{m+2}} \int_R f_{m+2}(\mu_{m+2} t, x(t), x'(t), x''(t), z)\widetilde{\nu_2}(dt, dz), \\
x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ x''(0) = x_0''.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

У подальшому будемо використовувати константу $K > 0$ для позначення різних сталих, які не залежать від ε.

Із [7], застосувавши у доведенні очевидні модифікації, одержимо такі результати:

Лема. Нехай для кожного $x \in R^d$ існує $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \int_0^T f(t, x)dt = \bar{f}(x)$. Функція $\bar{f}(x)$ є обмеженою і неперервною, функція $f(t, x)$ є обмеженою і неперервною по x рівномірно відносно (t, x) у кожній області $t \in [0; \infty], |x| \leq K$, випадкові процеси $\xi(t) \in R^d, \eta(t) \in R$ є неперервними, тоді $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_0^t f\left(\dfrac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s)\right)ds = \int_0^t \bar{f}(\xi(s))ds$ майже напевне для $\forall t \in [0; T]$.

Зауваження. Нехай функція $f(t,x,z)$ обмежена і рівномірно неперервна по x відносно $t\in[0;\infty]$ і $z\in R$ у кожній компактній множині $|x|\le K,\ x\in R^d$. Нехай $\Pi(\cdot)$ — це скінченна міра на σ — алгебрі борелевих множин в R і нехай $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x,z)dt=\overline{f}(x,z)$ для кожного $x\in R^d$, $z\in R$, де функція $\overline{f}(x,z)$ обмежена, рівномірно неперервна по x відносно $z\in R$ у кожній компактній множині $|x|\le K$. Тоді для неперервних випадкових процесів $\xi(t)\in R^d$, $\eta(t)\in R$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_R f\left(\frac{s}{\varepsilon}+\eta(s),\xi(s),z\right)\Pi(dz)ds=\int_0^t\int_R \overline{f}\left(\xi(s),z\right)\Pi(dz)ds,$$

майже напевне для $\forall t\in[0;T]$.

Розглянемо наступне представлення процесів $x(t),x'(t),x''(t)$:

$$x(t)=C(t)e^{-at}+A_1(t)\cos(bt)+A_2(t)\sin(bt),$$
$$x'(t)=-aC(t)e^{-at}-bA_1(t)\sin(bt)+bA_2(t)\cos(bt),$$
$$x''(t)=a^2C(t)e^{-at}-b^2A_1(t)\cos(bt)-b^2A_2(t)\sin(bt),$$
$$N(t)=C(t)\exp\{-at\}.$$

Тоді

$$N(t)=\frac{b^2x(t)+x''(t)}{a^2+b^2},$$

$$A_1(t)=\cos\alpha\cos(bt+\alpha)x(t)-\frac{\sin bt}{b}x'(t)-\frac{\sin\alpha\sin(bt+\alpha)}{b^2}x''(t),$$

$$A_2(t)=\cos\alpha\sin(bt+\alpha)x(t)-\frac{\cos bt}{b}x'(t)+\frac{\sin\alpha\cos(bt+\alpha)}{b^2}x''(t),$$

де $\alpha=\operatorname{arctg}(b/a)$.

Застосуємо формулу Іто [8] до випадкового процесу $\xi(t)=$ $=(N(t),\ A_1(t),A_2(t))$ і одержимо для $\xi(t)$ систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dN(t)=-aN(t)dt+\frac{1}{a^2+b^2}dH(t),$$
$$dA_1(t)=-\frac{\sin\alpha\sin(bt+\alpha)}{b^2}dH(t),dA_2(t)=\frac{\sin\alpha\cos(bt+\alpha)}{b^2}dH(t), \tag{3}$$

$$N(0)=\frac{b^2x_0+x_0''}{a^2+b^2}, A_1(0)=\frac{a^2x_0-x_0''}{a^2+b^2},$$
$$A_2(0)=\frac{ax_0''+\left(a^2+b^2\right)x_0'+ab^2x_0}{b\left(a^2+b^2\right)},$$

де

$$dH(t)=[\varepsilon^{k_0}\tilde{f}_0\left(\mu_0 t, N(t), A_1(t), A_2(t), t\right)+$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}}\int_R \tilde{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2}t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z\right)\Pi_2(dz)]dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{k_i}\int_R \tilde{f}_i\left(\mu_i t, N(t), A_1(t), A_2(t), t\right)dw_i(t)+$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}}\int_R \tilde{f}_{m+1}\left(\mu_{m+1}t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z\right)\tilde{\nu}_1(dt, dz)+$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}}\int_R \tilde{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2}t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z\right)\tilde{\nu}_2(dt, dz),$$
$$\tilde{f}_i\left(\mu_i t, N, A_1, A_2, t\right)=f_i(\mu_i t, N+A_1\cos bt+A_2\sin bt, -aN-$$
$$-bA_1\sin bt+bA_2\cos bt, a^2N-b^2A_1\cos bt-b^2A_2\sin bt), i=\overline{0,m},$$
$$\tilde{f}_i\left(\mu_i t, N, A_1, A_2, t, z\right)=f_i(\mu_i t, N+A_1\cos bt+A_2\sin bt, -aN-$$
$$-bA_1\sin bt+bA_2\cos bt,\ a^2N-b^2A_1\cos bt-b^2\sin bt, z), i=m+1, m+2.$$

Теорема. Нехай

$$\Pi_i(R)<\infty, i=1,2,\ t\in\left[0;t_0\right],\quad k=\min(k_0, 2k_1,\ldots,2k_{m+1},k_{m+2}).$$

Припустимо, що функції f_i , $i=\overline{0,m+2}$, обмежені і задовольняють умову Ліпшиця відносно x, x', x''. Якщо задана нижче матриця $\bar{\sigma}^2\left(A_1, A_2\right)$ є невід’ємно визначеною, тоді:

1. При $k_0=2k_i=k_{m+2}$, $i=\overline{1,m+1}$ випадковий процес $\xi_\varepsilon(t)=\xi\left(t/\varepsilon^k\right)$ слабко збігається, при $\varepsilon\to 0$, до випадкового процесу $\bar{\xi}(t)=\left(0,\bar{A}_1(t),\bar{A}_2(t)\right)$, де $\bar{A}(t)=\left(\bar{A}_1(t),\bar{A}_2(t)\right)$ — це розв’язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\bar{A}(t)=\bar{\alpha}\left(\bar{A}(t)\right)dt+\bar{\sigma}\left(\bar{A}(t)\right)d\bar{w}(t),$$
$$\bar{A}(0)=\left(\bar{A}_1(0),\bar{A}_2(0)\right), \tag{4}$$

де $\bar{\alpha}\left(\bar{A}\right)=\left(\bar{\alpha}^{(1)}\left(A_1,A_2\right),\bar{\alpha}^{(2)}\left(A_1,A_2\right)\right)$,

$$\overline{\alpha}^{(1)}\left(A_1,A_2\right)=-\frac{1}{4\pi^2 b\left(a^2+b^2\right)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\widehat{f}_{(1)}\left(\psi,A_1,A_2,t\right)(a\sin\psi+b\cos\psi)dtd\psi,$$

$$\overline{\alpha}^{(2)}\left(A_1,A_2\right)=\frac{1}{4\pi^2 b\left(a^2+b^2\right)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\widehat{f}_{(1)}\left(\psi,A_1,A_2,t\right)(a\cos\psi-b\sin\psi)dtd\psi,$$

$$\overline{\sigma}\left(A_1,A_2\right)=\left\{\overline{B}\left(A_1,A_2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{4\pi^2 b^2\left(a^2+b^2\right)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\widehat{f}_{(2)}\left(\psi,A_1,A_2,t\right)B\left(\psi\right)d\psi dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B\left(\psi\right)=\left(B_{ij}\left(\psi\right),i,j=1,2\right),B_{11}\left(\psi\right)=\left(a\sin\psi+b\cos\psi\right)^2,$$

$$B_{12}\left(\psi\right)=B_{21}\left(\psi\right)=-\left(a\sin\psi+b\cos\psi\right)\left(a\cos\psi-b\sin\psi\right),$$

$$B_{22}\left(\psi\right)=\left(a\cos\psi-b\sin\psi\right)^2,$$

$$\widehat{f}_{(1)}\left(\psi,A_1,A_2,t\right)=\tilde{f}_0\left(\psi,0,A_1,A_2,t\right)+\int_R\tilde{f}_{m+2}\left(\psi,0,A_1,A_2,t,z\right)\Pi_2\left(dz\right),$$

$$\widehat{f}_{(2)}\left(\psi,A_1,A_2,t\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\tilde{f}_i^2\left(\psi,0,A_1,A_2,t\right)+\int_R\tilde{f}_{m+1}^2\left(\psi,0,A_1,A_2,t,z\right)\Pi_1\left(dz\right),$$

$\overline{w}\left(t\right)=\left(\overline{w}_i\left(t\right),i=1,2\right)$, $\overline{w}_i\left(t\right),i=1,2$ — це незалежні вінерові процеси.

2. Якщо $k<k_0$, тоді в усередненій системі (4) треба покласти $\tilde{f}_0\equiv 0$; якщо $k<2k_j$ для деякого $1\le j\le m$, тоді в усередненій системі (4) треба покласти $\tilde{f}_j\equiv 0$ для всіх таких j; якщо $k<2k_{m+1}$, тоді в усередненій системі (4) треба покласти $\tilde{f}_{m+1}\equiv 0$; якщо $k<k_{m+2}$, тоді в усередненій системі (4) треба покласти $\tilde{f}_{m+2}\equiv 0$.

Доведення. Зробимо заміну $t\to t/\varepsilon^k$ у системі (3) і одержимо для процесу $\xi_\varepsilon\left(t\right)=\left(N_\varepsilon\left(t\right),A_1^\varepsilon\left(t\right),A_2^\varepsilon\left(t\right)\right)=\left(N\left(t/\varepsilon^k\right),A_1\left(t/\varepsilon^k\right),A_2\left(t/\varepsilon^k\right)\right)$ систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dN_\varepsilon(t) = -\frac{a}{\varepsilon^k} N_\varepsilon(t)\,dt + \frac{1}{a^2+b^2} dH_\varepsilon(t),$$

$$dA_1^\varepsilon(t) = -\frac{\sin\alpha \sin\left(bt/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} dH_\varepsilon(t), \tag{5}$$

$$dA_2^\varepsilon(t) = \frac{\sin\alpha \cos\left(bt/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} dH_\varepsilon(t),$$

$$dH_\varepsilon(t) = [\varepsilon^{k_0-k} \tilde{f}_0\left(\mu_0 t/\varepsilon^k, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k\right) +$$

$$+\varepsilon^{k_{m+2}-k} \int_R \tilde{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2} t/\varepsilon^k, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\Pi_2(dz) +$$

$$+\sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i - k/2} \tilde{f}_i\left(\mu_i t/\varepsilon^k, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k\right) dw_i^\varepsilon(t) +$$

$$+\varepsilon^{k_{m+1}} \int_R \tilde{f}_{m+1}\left(\mu_{m+1} t/\varepsilon^k, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) +$$

$$+\varepsilon^{k_{m+2}} \int_R \tilde{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2} t/\varepsilon^k, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz),$$

$$w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w_i\left(t/\varepsilon^k\right), i = \overline{1,m}, \tilde{\nu}_j^\varepsilon(t, A) = \nu_j\left(t/\varepsilon^k, A\right) - \Pi_j(A)\, t/\varepsilon^k,$$

$j = 1, 2$, де A — це борелева множина у R.

Для довільного $\varepsilon > 0$ процеси $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1,m}$ — це незалежні одновимірні вінерові процеси, а $\tilde{\nu}_j^\varepsilon(t, A), j = 1, 2$ — це незалежні центровані міри Пуассона, незалежні від $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1,m}$.

Оскільки ми маємо співвідношення $N_\varepsilon(t) = \exp\left\{-at/\varepsilon^k\right\} C\left(t/\varepsilon^k\right)$ і процес $C_\varepsilon(t) = C\left(t/\varepsilon^k\right)$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$C_\varepsilon(t) = C(0) + \int_0^t \frac{\exp\left\{as/\varepsilon^k\right\}}{a^2+b^2} dH_\varepsilon(s),$$

де $C(0) = \dfrac{b^2 x_0 + x_0''}{a^2+b^2}$, ми можемо одержати оцінку

$$E\left|N_\varepsilon(t)\right|^2 \le K[e^{-2at/\varepsilon^k} + \varepsilon^k\left(1 - e^{-2at/\varepsilon^k}\right) \times$$

$$\times\left(t\left(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}\right) + \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i - k}\right)].$$

Тому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} E\left|N_\varepsilon(t)\right|^2 = 0$, і нам достатньо вивчати поведінку, при $\varepsilon \to 0$, розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$dA_1^\varepsilon(t) = -\frac{\sin\alpha \sin\left(bt/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} d\widehat{H}_\varepsilon(t),$$
$$dA_2^\varepsilon(t) = \frac{\sin\alpha \cos\left(bt/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} d\widehat{H}_\varepsilon(t) \qquad (6)$$

з початковими умовами $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0), A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, де

$$d\widehat{H}_\varepsilon(t) = [\varepsilon^{k_0-k}\widehat{f}_0\left(\mu_0 t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k\right) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}-k}\int_R \widehat{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2}t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\Pi_2(dz)]dt +$$
$$+\sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2}\widehat{f}_i\left(\mu_i t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k\right)dw_i^\varepsilon(t) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}}\int_R \widehat{f}_{m+1}\left(\mu_{m+1}t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}}\int_R \widehat{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2}t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz),$$
$$\widehat{f}_j(\psi, A_1, A_2, t) = \tilde{f}_j(\psi, 0, A_1, A_2, t),\ j = \overline{0, m},$$
$$\widehat{f}_i(\psi, A_1, A_2, t, z) = \tilde{f}_i(\psi, 0, A_1, A_2, t, z),\ i = m+1, m+2.$$

Позначимо $A_\varepsilon(t) = \left(A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right)$. Використавши умови на коефіцієнти рівняння (6) і властивості стохастичних інтегралів, одержимо оцінки

$$E\left\|A_\varepsilon(t)\right\|^2 \le K\left[1 + t^2\left(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}\right) + t\sum_{i=1}^{m+2}\varepsilon^{2k_i-k}\right],$$

$$E\left\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\right\|^2 \le K[|t-s|^2\left(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}\right) + |t-s|\sum_{i=1}^{m+2}\varepsilon^{2k_i-k}].$$

Аналогічно для процесу $\zeta_\varepsilon(t) = \left(\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t)\right)$, де

$$\zeta_1^\varepsilon(t) = -\int_0^t \frac{\sin\alpha\sin\left(bs/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} dM_\varepsilon(s),$$

$$\zeta_2^\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\sin\alpha\cos\left(bs/\varepsilon^k + \alpha\right)}{b^2} dM_\varepsilon(s),$$

$$dM_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2}\widehat{f}_i\left(\mu_i t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k\right)dw_i^\varepsilon(t) +$$

$$+\varepsilon^{k_{m+1}}\int_R \widehat{f}_{m+1}\left(\mu_{m+1}t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt,dz)+$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}}\int_R \widehat{f}_{m+2}\left(\mu_{m+2}t/\varepsilon^k, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), t/\varepsilon^k, z\right)\tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt,dz),$$

одержимо оцінки

$$E\left\|\zeta_\varepsilon(t)\right\|^2 \le K\,t\sum\nolimits_{i=1}^{m+2}\varepsilon^{2k_i-k},$$
$$E\left\|\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)\right\|^2 \le K\left|t-s\right|\sum\nolimits_{i=1}^{m+2}\varepsilon^{2k_i-k}.$$

Тому для випадкового процесу $\eta_\varepsilon(t)=\left(A_\varepsilon(t),\zeta_\varepsilon(t)\right)$ виконуються умови [9, с. 13–17]

$$\lim_{h\downarrow 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{|t-s|<h}P\left\{\left|\eta_\varepsilon(t)-\eta_\varepsilon(s)\right|>\delta\right\}=0$$

для довільного $\delta>0, t,s\in[0,T]$, і

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{t\in[0,T]}P\left\{\left|\eta_\varepsilon(t)\right|>N\right\}=0.$$

Отже для довільної послідовності $\varepsilon_n\to 0,\ n=1,2,\dots$ існує підпослідовність $\varepsilon_l=\varepsilon_{n(l)}\to 0,\ l=1,2,\dots$, імовірнісний простір і визначені на ньому випадкові процеси $\overline{A}_{\varepsilon_l}(t)=\left(\overline{A}_1^{\varepsilon_l}(t),\overline{A}_2^{\varepsilon_l}(t)\right)$, $\overline{\zeta}_{\varepsilon_l}(t)$, $\overline{A}(t)=\left(\overline{A}_1(t),\overline{A}_2(t)\right)$, $\overline{\zeta}(t)$ такі, що $\overline{A}_{\varepsilon_l}(t)\to\overline{A}(t)$, $\overline{\zeta}_{\varepsilon_l}(t)\to\overline{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_l\to 0$, і скінченновимірні розподіли процесів $\overline{A}_{\varepsilon_l}(t)$, $\overline{\zeta}_{\varepsilon_l}(t)$ співпадають із скінченновимірними розподілами процесів $A_{\varepsilon_l}(t),\zeta_{\varepsilon_l}(t)$. Оскільки ми цікавимось граничною поведінкою розподілів, то будемо розглядати процеси $A_{\varepsilon_l}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_l}(t)$ замість процесів $\overline{A}_{\varepsilon_l}(t)$, $\overline{\zeta}_{\varepsilon_l}(t)$. Із (6) одержимо рівняння

$$A_{\varepsilon_l}(t)=A(0)+\int_0^t\alpha_{\varepsilon_l}\left(s,A_{\varepsilon_l}(s)\right)ds+\zeta_{\varepsilon_l}(t), \tag{7}$$
$$A(0)=\left(A_1(0),A_2(0)\right),$$

де $\alpha_\varepsilon(s,A)=\left(\alpha_\varepsilon^{(1)}(t,A_1,A_2),\alpha_\varepsilon^{(2)}(t,A_1,A_2)\right)$,

$$\alpha_\varepsilon^{(1)}(t,A_1,A_2)=-\frac{\sin\alpha\sin\left(bt/\varepsilon^k+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{(1)}^\varepsilon\left(t/\varepsilon^k, A_1, A_2\right),$$
$$\alpha_\varepsilon^{(2)}(t,A_1,A_2)=\frac{\sin\alpha\cos\left(bt/\varepsilon^k+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{(1)}^\varepsilon\left(t/\varepsilon^k, A_1, A_2\right),$$

$$\widehat{f}_{(1)}^{\varepsilon}\left(t,A_1,A_2\right)=\varepsilon^{k_0-k}\widehat{f}_0(\mu_0 t,A_1,A_2,t)+$$
$$+\varepsilon^{k_{m+2}-k}\int_R \widehat{f}_{m+2}(\mu_{m+2}t,A_1,A_2,t,z)\Pi_2\left(dz\right).$$

Зауважимо, що процес $\zeta_{\varepsilon}\left(t\right)$ є векторно-значним квадратично інтегровним мартингалом із матричною характеристикою

$$\left\langle \zeta_{\varepsilon}^{(l)},\zeta_{\varepsilon}^{(n)}\right\rangle(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\sigma_{\varepsilon}^{(l,j)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s)\right)\sigma_{\varepsilon}^{(n,j)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s)\right)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^k}\int_0^t\int_R\gamma_{\varepsilon}^{(l)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s),z\right)\gamma_{\varepsilon}^{(n)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s),z\right)\Pi_1\left(dz\right)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^k}\int_0^t\int_R\delta_{\varepsilon}^{(l)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s),z\right)\delta_{\varepsilon}^{(n)}\left(s,A_1^{\varepsilon}(s),A_2^{\varepsilon}(s),z\right)\Pi_2\left(dz\right)ds,$$
$$l,n=1,2,$$

де

$$\sigma_{\varepsilon}^{(1,j)}\left(s,A_1,A_2\right)=-\varepsilon^{k_j-\frac{k}{2}}\frac{\sin\alpha\sin\left(bs/\varepsilon^k+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_j\left(\frac{\mu_j s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k}\right),$$

$$\sigma_{\varepsilon}^{(2,j)}\left(s,A_1,A_2\right)=\varepsilon^{k_j-\frac{k}{2}}\frac{\sin\alpha\cos\left(bs/\varepsilon^k+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_j\left(\frac{\mu_j s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k}\right),$$

$$\gamma_{\varepsilon}^{(1)}\left(s,A_1,A_2,z\right)=-\varepsilon^{k_{m+1}}\frac{\sin\alpha\sin\left(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1}s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k},z\right),$$

$$\gamma_{\varepsilon}^{(2)}\left(s,A_1,A_2,z\right)=\varepsilon^{k_{m+1}}\frac{\sin\alpha\cos\left(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1}s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k},z\right),$$

$$\delta_{\varepsilon}^{(1)}\left(s,A_1,A_2,z\right)=-\varepsilon^{k_{m+2}}\frac{\sin\alpha\sin\left(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2}s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k},z\right),$$

$$\delta_{\varepsilon}^{(2)}\left(s,A_1,A_2,z\right)=\varepsilon^{k_{m+2}}\frac{\sin\alpha\cos\left(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha\right)}{b^2}\widehat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2}s}{\varepsilon^k},A_1,A_2,\frac{s}{\varepsilon^k},z\right).$$

Для процесів $A_{\varepsilon}\left(t\right)$ і $\zeta_{\varepsilon}\left(t\right)$ мають місце наступні оцінки

$$E\left\|A_{\varepsilon}(t)-A_{\varepsilon}(s)\right\|^4\le$$
$$\le K[\left|t-s\right|^4\left(\varepsilon^{4(k_0-k)}+\varepsilon^{4(k_{m+2}-k)}\right)+E\left\|\zeta_{\varepsilon}(t)-\zeta_{\varepsilon}(s)\right\|^4], \tag{8}$$

$$E\left\|\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)\right\|^4 \le \sum_{j=1}^{m+2}\varepsilon^{4k_j-2k}|t-s|^2+\varepsilon^{4k_{m+1}-3k/2}|t-s|^{3/2}+ \tag{9}$$
$$+\varepsilon^{4k_{m+1}-k}|t-s|+\varepsilon^{4k_{m+2}-3k/2}|t-s|^{3/2}+\varepsilon^{4k_{m+2}-k}|t-s|$$

$$E\left\|A_\varepsilon(t)-A_\varepsilon(s)\right\|^8 \le K,\ E\left\|\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)\right\|^8 \le K. \tag{10}$$

Оскільки $A_{\varepsilon_l}(t)\to\overline{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_l}(t)\to\overline{\zeta}(t)$ за ймовірністю, при $\varepsilon_l\to 0$, то, використавши (10), із (8) і (9), одержимо оцінки

$$E\left\|\overline{A}(t)-\overline{A}(s)\right\|^4\le K(|t-s|^4+|t-s|^2),\ \ E\left\|\overline{\zeta}(t)-\overline{\zeta}(s)\right\|^4\le K|t-s|^2.$$

Таким чином, процеси $\overline{A}(t)$ і $\overline{\zeta}(t)$ задовольняють умову неперервності Колмогорова [10, с. 235].

Розглянемо випадок $k_0=2k_j=k_{m+2},\ j=\overline{1,m+1}$. При цій умові маємо для $l,n=1,2$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\alpha_\varepsilon^{(l)}(s,A_1,A_2)ds=\overline{\alpha}^{(l)}(A_1,A_2),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t[\sum\nolimits_{j=1}^m\sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s,A_1,A_2)\sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s,A_1,A_2)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^k}\int_R\gamma_\varepsilon^{(l)}(s,A_1,A_2,z)\gamma_\varepsilon^{(n)}(s,A_1,A_2,z)\Pi_1(dz)+ \tag{11}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^k}\int_R\delta_\varepsilon^{(l)}(s,A_1,A_2,z)\delta_\varepsilon^{(n)}(s,A_1,A_2,z)\Pi_2(dz)=\overline{B}_{\ln}(A_1,A_2),$$

де функції $\overline{\alpha}^{(i)}(A_1,A_2)$ і $\overline{B}(A_1,A_2)=\left\{\overline{B}_{ij}(A_1,A_2),i,j=1,2\right\}$ визначені в умовах теореми. Так як процеси $\overline{A}(t)$ і $\overline{\zeta}(t)$ є неперервними, то із Леми і співвідношень (7), (11) маємо

$$\overline{A}(t)=A(0)+\int_0^t\overline{\alpha}\left(\overline{A}_1(s),\overline{A}_2(s)\right)ds+\overline{\zeta}(t), \tag{12}$$

де $\overline{\zeta}(t)$ — це неперервний векторно-значний мартингал з матричною характеристикою $\left\langle\overline{\zeta}^{(i)},\overline{\zeta}^{(j)}\right\rangle(t)=\int_0^t\overline{B}_{ij}\left(\overline{A}_1(s),\overline{A}_2(s)\right)ds,\ i,j=1,2.$

Тому [3, с. 114] існує вінерів процес $\overline{w}(t)=\left(\overline{w}_i(t),i=1,2\right)$ такий, що

$$\overline{\zeta}(t)=\int_0^t\overline{\sigma}\left(\overline{A}_1(s),\overline{A}_2(s)\right)d\overline{w}(s) \tag{13}$$

де $\overline{\sigma}(A_1,A_2)=\overline{B}^{1/2}(A_1,A_2)$. Співвідношення (12), (13) означають, що процес $\overline{A}(t)$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (4). При виконанні умов теореми рівняння (4) має єдиний розв'язок. Тому процес $\overline{A}(t)$ не залежить від вибору підпослідовності $\varepsilon_l \to 0$, і скінченновимірні розподіли процесу $A_{\varepsilon_l}(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\overline{A}(t)$. Оскільки процеси $A_{\varepsilon_l}(t)$ і $\overline{A}(t)$ є процесами Маркова, то використавши умови слабкої збіжності процесів Маркова [10, с. 508], одержимо доведення першого твердження теореми.

Розглянемо випадки $k < k_0$ або $k < k_{m+2}$. Тоді відповідні члени у коефіцієнтах $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t, A_1, A_2), i = 1,2$ рівняння (7) прямують до нуля, при $\varepsilon \to 0$. У випадку $k < 2k_j$ для деяких $j = \overline{1,m}$, в (11) маємо для таких j

$$\sigma_\varepsilon^{(l,j)}(t, A_1, A_2)\sigma_\varepsilon^{(n,j)}(t, A_1, A_2) = O\left(\varepsilon^{2k_j - k}\right), l, n = 1,2.$$

Якщо $k < 2k_{m+1}$, тоді у (11) одержимо

$$\frac{1}{\varepsilon^k}\int_R \gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2, z)\gamma_\varepsilon^{(n)}(s, A_1, A_2, z)\Pi_1(dz) = O\left(\varepsilon^{2k_{m+1} - k}\right).$$

Зауважимо, що у всіх випадках $k < 2k_{m+2}$, тому

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\varepsilon^k}\int_R \delta_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2, z)\delta_\varepsilon^{(n)}(s, A_1, A_2, z)\Pi_2(dz) = 0.$$

Повторивши з відповідними змінами доведення першого твердження теореми, одержимо доведення твердження 2).

Висновки. У роботі ми одержали явний вигляд коефіцієнтів усередненої системи у нерезонансному випадку для коливної системи третього порядку. При цьому було проведено дослідження впливу кожного типу випадкового збурення на вигляд коефіцієнтів в залежності від порядку малості цих збурень. Запропонований метод дослідження в подальшому буде використано для дослідження резонансного випадку і вивчення граничної поведінки коливних систем вищих порядків.

Список використаних джерел:

1. Крилов Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, М. М. Боголюбов. — К. : Изд. АН УССР, 1937. — 366 с.
2. Боголюбов М. М. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / М. М. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974. — 408 с.
3. Гихман И. И. Теория случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1973. — Т. 3. — 496 с.
4. Самойленко А. М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями / А. М. Самойленко, О. М. Станжицький. — К. : Наукова думка, 2009. — 336 с.
5. Борисенко О. В. Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка / О. В. Борисенко // Украинский математический журнал. — 1992. — Т. 44, № 1. — С. 11–17.
6. Борисенко О. В. Поведение неавтономной колебательной системы под действием малых случайных возмущений в резонансном случае /

О. В. Борисенко // Украинский математический журнал. — 1992. — Т. 44, № 12. — С. 1645–1651.
7. Borysenko O. D. The limit behavior of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter / O. D. Borysenko, I. G. Malyshev // Theory of Stochastic Processes. — 2001. — Vol. 7(23), № 1–2. — P. 30–36.
8. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1968. — 356 с.
9. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход. — К. : Изд. Киевского университета, 1961. — 216 с.
10. Гихман И. И. Теория случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1975. — Т. 1. — 664 с.

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillator system given by third order differential equation with small non-linear periodical external disturbances of multidimensional white noise type, centered and non-centered Poisson noises types is studied. The non-resonance case is considered.

Key words: *asymptotic behavior, non-autonomous oscillator system, stochastic differential equation, centered and non-centered Poisson measures.*

Отримано: 23.08.2016

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ХАУСДОРФОВОЇ ВІДСТАНІ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ У МНОЖИНІ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З КОМПАКТНИМИ ОПУКЛИМИ ОБРАЗАМИ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації фіксованого відображення з множини неперервних відображень з компактними опуклими образами підмножиною цієї множини.

Отримано низку допоміжних результатів, які становлять і самостійний інтерес.

Ключові слова: *найкраща у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірна апроксимація, відображення з опуклими образами, необхідні, достатні умови, критерій екстремальності елемента.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації фіксованого відображення з множини неперервних відображень з компактними опуклими

