

ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО ШУМУ НА ПРОЦЕС РЕЛАКСАЦІЇ В БІСТАБІЛЬНИХ ТУНЕЛЬНИХ СИСТЕМАХ

О.О. ПОНЕЖА

УДК 519.246; 538.935
©2010

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03680)

Розглянуто вплив флуктуацій інтенсивності падаючого на двобар'єрну тунельну систему потоку електронів поблизу точки нестабільності. Для опису ефектів шуму в системі, що перебуває поблизу резонансу в умовах когерентності тунелювання, використано спрощене рівняння Ланжевена з мультиплікативним білим шумом. Методом чисельної симуляції цього рівняння отримано залежності середнього часу першого проходження від інтенсивності шуму й відхилення середнього значення інтенсивності падаючого потоку електронів від критичного в детерміністичному випадку. Результати чисельних розрахунків задовільно збіглися з теоретичними розрахунками роботи Коле і ін. Час релаксації був максимальним у відсутності шуму й спадав із ростом інтенсивності шуму. Для тих значень інтенсивності потоку, за яких перехід у детерміністичному випадку був неможливий, введення шуму сприяло переходу.

1. Вступ

Одним з важливих аспектів дослідження нелінійних нерівноважних систем є врахування впливу зовнішніх шумів на динамічну поведінку таких систем. Зовнішній шум може бути зумовлений флуктуаціями навколишнього середовища або з'явитися у результаті дії випадкової сили. Для практичних застосувань важливим є той факт, що параметри зовнішнього шуму можна контролювати.

Дія зовнішніх шумів нетривіально впливає на нерівноважні системи і приводить до динаміки, відмінної від чисто детерміністичного руху [1, 2]. Вона проявляється найсильніше в нестабільних точках, тобто в точках, в яких система переходить із одного стаціонарного стану в інший (в точках біфуркації). Поблизу цих точок зовнішні флуктуації можуть змінити час життя стану, що спостерігається як зсув точки

біфуркації. Така поведінка характерна для бістабільних систем. Вплив шуму на поведінку бістабільних систем в околі нестабільних точок розглядався в літературі на низці фізичних систем, зокрема таких, як оптичні [3–5], лазерні [6, 7, 9, 10], тунельні [8, 21], деякі біологічні системи [11, 12, 14] та ін.

Під час дослідження динамічної поведінки бістабільних систем важливо проаналізувати вплив шуму на процес релаксації від одного стаціонарного стану до іншого. При цьому можна розглядати як еволюцію густини ймовірності якоїсь динамічної змінної [4, 12], так й її часову кореляційну функцію [7, 10, 14] та пов'язаний з нею часом релаксації. Однак найчастіше для дослідження релаксації системи з одного стану в інший використовується час першого проходження (ЧПП), тобто час досягнення випадковим процесом межі, що відокремлює один стабільний стан від іншого. У літературі досліджуються як переходи з нестабільного стану в стабільний для таких, наприклад, систем, як лазери поблизу порога генерації [10, 13], так і переходи, що йдуть через маргінальні точки, прикладом яких служать кінцеві точки гістерезисного циклу [15, 16].

У даній роботі розглянемо, як впливають зовнішні шуми на динаміку системи, що описує резонансне тунелювання електронів у двобар'єрних наноструктурах. Двобар'єрні тунельні структури мають великі перспективи використання в різних електронних твердотільних електронних пристроях [17]. Для них характерна наявність негативної диференціальної провідності й пеглі гістерезису у вольт-амперних характеристиках. Гістерезисна поведінка пояснюється наявністю власної бістабільності, що зумовлена впливом на тунельний струм електростатичного

потенціалу, утвореного електронами, які накопичуються у квантовій ямі. Уперше експериментально така поведінка спостерігалась Голдманом та ін. [18]. Теоретично явище власної бістабільності в резонансних тунельних структурах було проаналізовано у багатьох роботах, зокрема [19, 20, 22].

Для аналізу впливу зовнішнього шуму на тунельний процес використали модель роботи [22], короткий опис якої подано далі в розділі 2. Там же представлено спрощену модель Фоккера–Планка для опису флуктуацій інтенсивності падаючого на систему потоку електронів. У розділі 3 розглянуто вплив шуму на стаціонарну поведінку системи. Динамічну поведінку системи під дією шуму розглянуто в розділі 4. У розділі 5 методом чисельного моделювання обчислено час релаксації залежно від інтенсивності шуму й відхилення інтенсивності падаючого потоку від критичного значення. Результати розрахунків порівняно з теоретичними залежностями, отриманими з використанням результатів роботи Коле та ін. [15].

2. Модель нелінійного резонансного тунелювання

Процес тунелювання електронів крізь двобар'єрну структуру розглянуто у припущенні, що довжина когерентності є більшою від розмірів системи, тобто передбачається, що процес тунелювання є когерентним. Для опису такого процесу використано модель, яку описано в роботі [22]. У цій моделі розглянуто потік електронів, що падає ліворуч на тунельну структуру, яка складається із двох однакових потенціальних бар'єрів шириною a , розділених потенціальною ямою шириною b . Кулонівська взаємодія між вхідною електронною хвилею й електронами, акумульованими в потенціальній ямі, розглянуто в одноелектронному наближенні. Покладалось, що одноелектронні функції залежно від координати й часу в областях поза бар'єрами ($x < 0$, $x > 2a + b$), мають вигляд

$$\Psi_{\text{in}}(x, t) = [D_0(t)e^{ikx} + R(t)e^{-ikx}]e^{-iw_0t},$$

$$\Psi_{\text{out}}(x, t) = D(t)e^{i(kx-w_0t)},$$

де $k = \sqrt{2m^*E/\hbar^2}$ – хвильовий вектор падаючого електрона, E – енергія електрона, m^* – його ефективна маса, а $w_0 = E/\hbar = \hbar k^2/2m^*$, D_0 та $R(t)$ – амплітуди падаючої та відбитої хвильової функції електрона відповідно. Розв'язок для амплітуди $D(t)$ хвильової функції електрона, що вийшов з тунельної системи, було

отримано для найцікавішого випадку – резонансного тунелювання. У цьому наближенні для хвильового вектора k введено малий параметр відхилення від резонансного значення k_r : $\xi = k - k_r$, $|\xi|/k \ll 1$. Для граничних випадків високих і вузьких бар'єрів було отримано таке диференціальне рівняння для комплексної амплітуди вихідної хвилі:

$$\frac{dD}{d\tau} = -D + iL\xi D - iL\kappa|D|^2D + D_0F_0, \quad (1)$$

де L – обернена півширина резонансного рівня в k -просторі ($L = \xi_{1/2}^{-1}$), яка пов'язана з півшириною в енергетичному просторі співвідношенням $\delta E_{1/2} = 2\hbar\nu = \hbar k_r/(m^*L)$, $\kappa = \kappa_0 L/b$ – параметр нелінійності (явний вираз коефіцієнта κ_0 можна знайти в роботі [22]), $F_0 = -\exp[-2ik(a+b)]$, $\tau = \nu t$ – безрозмірний час. Наявність нелінійного члена зумовлена врахуванням електростатичного потенціалу, створеного акумуляцією заряду у квантовій ямі в умовах резонансу. Шляхом подання комплексної амплітуди D через її дійсну амплітуду й фазу, $D = |D(\tau)| \exp[i\eta(\tau) - 2k(a+b)]$, була отримана система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\tau} = 2[\sqrt{TT_0}|\cos\eta| - T], \\ \frac{d\eta}{d\tau} = z - T - \sqrt{T_0/T}\sin\eta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

де для зручності аналізу було уведено такі безрозмірні змінні: $T(\tau) = \kappa L|D(\tau)|^2$, пропорційна інтенсивності електронного потоку, що пройшов через систему; $T_0(\tau) = F_0|D_0(\tau)|^2$, пропорційна інтенсивності електронного потоку, що падає на систему, і $z = L\xi$, пропорційна відхиленню хвильового вектора електрона від резонансного значення. Надалі, для стислості, будемо називати T інтенсивністю вихідного потоку електронів, T_0 – інтенсивністю вхідного або падаючого потоку електронів.

Із рівняння (2) випливає, що у стаціонарному випадку між величинами T й T_0 існує така функціональна залежність:

$$T_0 = T[1 + (z - T)^2] = F(T). \quad (3)$$

Це рівняння має три корені при значеннях параметра $z > \sqrt{3}$. Залежність інтенсивності потоку електронів T , що пройшли через систему, від інтенсивності падаючого потоку T_0 в стаціонарному випадку, яка визначена виразом (3), показана на рис. 1 пунктирною лінією для $z = 3, 5$.

Аналіз стабільності системи (2), проведений у роботі [23], показав, що корені її характеристичного рів-

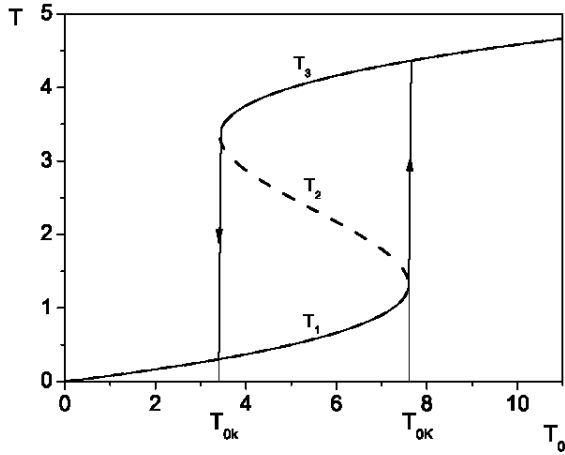


Рис. 1. Залежність T від T_0 у стаціонарному випадку при $z = 3,5$

ння визначаються співвідношенням

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{\partial F(T)}{\partial T}}$$

Таким чином, у тому випадку, коли $\frac{\partial F(T)}{\partial T} < 1$, корені будуть дійсними, але різних знаків, тобто визначатимуть нестабільний стан типу сідла. Ці стани відзначено на рис. 1, як T_2 . При $\frac{\partial F(T)}{\partial T} > 1$ корені будуть комплексними. Їм відповідають стабільні стани типу фокуса, які розташовані на нижній і верхній ділянці кривої (стани T_1 і T_3 відповідно). Стан T_1 відповідає режиму з низькою ефективністю тунелювання, а T_3 – з високою ефективністю.

Будемо вважати, що фаза хвильової функції η не змінюється у процесі тунелювання. У цьому випадку система рівнянь (2) зводиться до такого диференціального рівняння:

$$\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{TT_0} - T. \tag{4}$$

Оскільки розглядаємо динаміку процесу поблизу стаціонарних станів, то можна розкласти вираз у правій частині (4) в ряд Тейлора в околі стаціонарної точки. Обмежуючись двома першими доданками в розкладі з урахуванням виразу (3), одержимо рівняння

$$\frac{dT}{d\tau} = -T + \frac{T_0}{1 + (z - T)^2}. \tag{5}$$

Чисельне рішення рівняння (5), коли значення z дорівнювало 3,5 при послідовній повільній зміні параметра T_0 в прямому й зворотному напрямках, дало гістерезисну залежність T від T_0 , що показана на рис. 1

суцільною кривою. Перехід з нижнього на верхній стаціонарний стан здійснюється при певному значенні падаючої інтенсивності T_{0K} , що відповідає кінцевій точці гістерезисної петлі (так званій маргінальній точці). Цей перехід має місце, коли $\frac{\partial F(T)}{\partial T} = 0$. Корені цього рівняння

$$T_{K,k} = \frac{1}{3}(2z \mp \sqrt{z^2 - 3}) \tag{6}$$

визначають значення вихідного потоку в момент переходу з нижнього стану на верхній й з верхнього на нижній відповідно. При $z = 3,5$ критичне значення параметра T_{0K} , при якому відбувається перехід, дорівнює 7,593. Це значення z буде використано у всіх подальших розрахунках.

Далі розглянемо поведінку даної системи з урахуванням ефектів, зумовлених флуктуаціями. Розглянемо тільки флуктуації інтенсивності падаючого потоку. Для дослідження впливу зовнішнього шуму в тунельній системі використаємо підхід на основі рівняння Фоккера–Планка. Якщо для вибраного набору параметрів різниця в тимчасових масштабах між амплітудними й фазовими флуктуаціями досить велика, то модель Фоккера–Планка для амплітудних флуктуацій є гарним наближенням.

3. Вплив шуму на поведінку системи у стаціонарному випадку

Розглянемо, як впливають на поведінку системи флуктуації падаючої інтенсивності T_0 . Будемо розглядати інтенсивність падаючого потоку T_0 як стохастичну величину: $T_0 = \langle T_0 \rangle + p(\tau)$, де $\langle T_0 \rangle$ – середнє значення інтенсивності, а $p(\tau) = \sqrt{2q}\xi(\tau)$ – шумовий компонент інтенсивності, $\xi(\tau)$ – гаусовий білий шум з нульовим середнім $\langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle = 0$ та інтенсивністю, що дорівнює одиниці, q – інтенсивність шуму. Рівняння (5) з урахуванням флуктуацій падаючої інтенсивності приводить до такого стохастичного диференціального рівняння:

$$\dot{T} = f(T) + g(T)p(\tau), \tag{7}$$

де

$$f(T) = -T + \frac{\langle T_0 \rangle}{1 + (z - T)^2},$$

$$g(T) = \frac{1}{1 + (z - T)^2}.$$

Шумовий доданок у рівнянні (7) має мультиплікативний характер, тобто залежить від стану системи в даний момент часу.

Процес $T(\tau)$ може бути вивчений за допомогою густини ймовірності $P(T, \tau)$, яка є рішенням наступного рівняння Фоккера–Планка, записаного в представленні Стратоновича [26]:

$$\frac{\partial P(T, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial T} K_1 P(T, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} K_2 P(T, \tau), \quad (8)$$

де

$$K_1 = f(T) + g(T)g'(T)q =$$

$$-T + \frac{\langle T_0 \rangle}{1 + (z - T)^2} + \frac{2(z - T)q}{[1 + (z - T)^2]^2},$$

$$K_2 = qg(T)^2 = \frac{q}{[1 + (z - T)^2]^2},$$

$g'(T)$ – похідна по T . З рівняння (8), прирівнюючи до нуля часову похідну, виходить рівняння для стаціонарного розподілу ймовірності $P_s(T)$, рішення якого [1] є

$$P_s(T) = \frac{N_0}{K_2} \exp \int_0^\infty \frac{K_1}{K_2} dT. \quad (9)$$

Множник нормування N_0 визначають при чисельному інтегруванні $P_s(T)$ в межах від 0 до ∞ , які є природними межами процесу.

На рис. 2,а подано форму стаціонарної ймовірності при малому рівні шуму ($q = 0,04$), коли система перебуває далеко від точки переходу (крива 1), і послідовно наближається до цієї точки (криві 2 й 3). При малій інтенсивності шуму екстремуми густини ймовірності збігаються зі стаціонарними розв'язками (T_1 і T_3). При збільшенні інтенсивності шуму до $q = 0,5$ (див. рис. 2,б) у випадку значної відстані від точки переходу (крива 1) ймовірність розподілу має один пік, що відповідає $T = T_1$.

При наближенні до точки переходу (крива 2) ймовірність розподілу розпадається на два піки в околі значень $T = T_1$ й $T = T_3$. При $\langle T_0 \rangle > T_{0K}$ (крива 3) $P_s(T)$ знову має один пік з максимумом при $T = T_3$. Таким чином, збільшення інтенсивності шуму (див. рис. 2,б) не тільки приводить до розширення піків ймовірності, але й до появи бімодальності в розподілі ймовірності (крива 2).

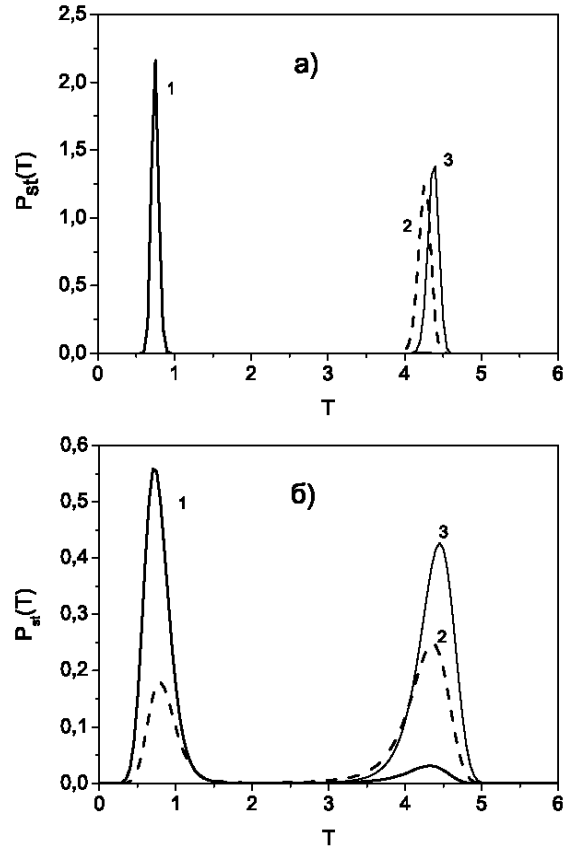


Рис. 2. Форма стаціонарної густини ймовірності при: а – $q = 0,04$; б – $q = 0,5$. Криві 1 отримано при $\langle T_0 \rangle = 6,4$, криві 2 – при $\langle T_0 \rangle = 6,7$, криві 3 – при $\langle T_0 \rangle = 7,7$

4. Часова поведінка системи за наявності шуму

Часову поведінку системи визначають зміною в часі розподілу ймовірності. Для визначення поведінки густини ймовірності залежно від часу чисельно інтегрувалося рівняння Фоккера–Планка (8). Початкову умову вибирали у вигляді дельта-функції $P(T, 0) = \delta(T)$ і апроксимували прямокутною функцією $\varepsilon/[(\pi(T^2 + \varepsilon^2))]$ з $\varepsilon = 0,001$. На рис. 3 зображено часову еволюцію $P(T, \tau)$, коли параметр T_0 є набагато меншим, ніж T_{0K} , а інтенсивність шуму дорівнює $q = 1$. На рисунку добре прослідковуються різні часові масштаби розвитку процесу. Спочатку за короткий відносний час $\tau_1 \approx 2$ система релаксує з початкового стану до стаціонарного стану T_1 . Через інтервал $\tau_2 \approx 7,5$ розподіл ймовірності стає двопіковим. Для здійснення переходу до стану T_3 потрібен відносний час $\tau_3 \approx 12$.

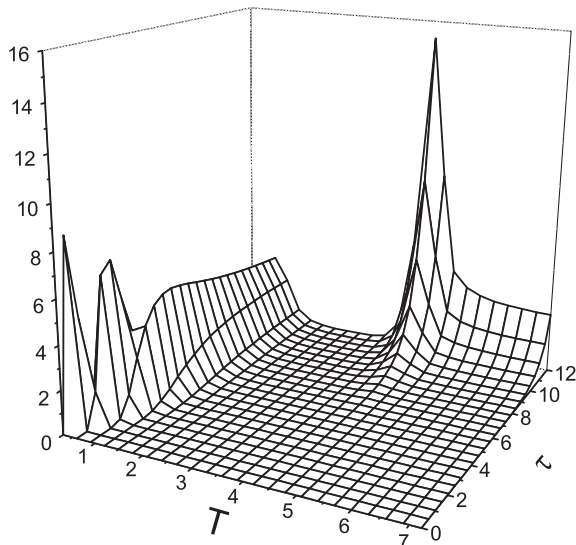


Рис. 3. Часова еволюція $P(T, \tau)$ при $\langle T_0 \rangle = 7,5$ й $q = 1$

У наступному розділі розглянемо, як впливають шумові флуктуації на динаміку релаксаційних процесів поблизу маргінальної точки T_{0K} .

5. Вплив шуму на час релаксації довкола маргінальної точки

Процес переходу зі стану з низькою інтенсивністю тунелювання в стан з високою інтенсивністю відповідає відхиленню інтенсивності потоку електронів T , що вийшов із системи, від початкового значення T_1 до величини, що перевищує граничне значення T_{tr} , за якого система гарантовано переходить у стан T_3 . Введемо параметр малого відхилення $\beta = \langle T_0 \rangle - T_{0K}$ діючого значення інтенсивності падаючого потоку від критичного значення T_{0K} . Відомо [24], що з наближенням до маргінальної точки час релаксації в детерміністичному випадку, який визначається як $\bar{t} = 1/\varphi'(x)$, де $\varphi(x)$ – потенціал системи, нескінченно зростає. Таке явище називається критичним уповільненням. Поза маргінальною зоною динаміка системи підкоряється детерміністичним законам і шум відіграє другорядну роль. Однак довкола маргінальної точки динаміка головним чином визначається шумом, тобто майже вся дія шуму на систему має місце у цій точці. Еволюція йде у двох різних режимах залежно від різниці $\beta = \langle T_0 \rangle - T_{0K}$. Коли $\beta < 0$, перехід можливий лише під дією шуму за рахунок механізму активації переходу через потенціальний бар'єр.

Для визначення часу релаксації при переході системи з нестабільного у стабільний стан найчастіше

використовується метод визначення середнього часу першого проходу (СЧПП). Визначається проміжок часу t_1 , протягом якого стохастичний процес, що стартує з деякого початкового значення x_0 , досягає певного граничного значення x_F . Цей проміжок часу також є стохастичною величиною, середнє значення якої $\langle t_1 \rangle$ є СЧПП.

СЧПП обчислимо за методом, запропонованим у роботі [15] для системи, що перебуває поблизу маргінальної точки. Поблизу цієї точки потенціал, пов'язаний з моделлю, має горизонтальну складову. Це означає, що майже вся дія шуму на систему зосереджена в цій точці. Тоді для дослідження впливу шуму потрібно залишити лише кілька членів у розкладі $f(T)$ поблизу маргінальної точки T_K :

$$f(T) = f(T_K) + f'(T - T_K) + \frac{f''(T_K)}{2!}(T - T_K)^2 + 0(T - T_K)^3. \tag{10}$$

Введемо заміну змінних: $\beta = \langle T_0 \rangle - T_{0K}$ і $x = T - T_K$. Тоді з урахуванням виразів для T_{0K} (3) і T_K (6) одержимо

$$f(x) = -\alpha x^2 - \gamma \beta, \tag{11}$$

де константи α й γ можуть бути оцінені з виразу (10) з використанням співвідношення (6). Таким чином, поблизу маргінальної точки динаміка системи з урахуванням шуму визначається рівнянням Ланжевена:

$$\dot{x} = \varphi'(x) + g(T)p(\tau) \approx \varphi'(x) + \gamma p(\tau), \tag{12}$$

де потенціал системи $\varphi(x) = -\alpha x^3 - \gamma \beta x$, а функція $g(T)$ взята в точці T_K , ($g(T_K) = \gamma$).

Стохастичне рівняння (12) може бути перетворене в рівняння Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}[\varphi'(x)P] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma P), \tag{13}$$

де $\sigma = \gamma q$, стаціонарний розв'язок якого є

$$P_{st}(x) = N \exp\left[-\frac{\varphi(x)}{\sigma}\right]. \tag{14}$$

Зі стандартної теорії стохастичних процесів [26] впливає, що середній час 1-го проходу $\langle t_1 \rangle$ задовольняє рівняння

$$-1 = -\frac{d\varphi(x)}{dx} \frac{d\langle t_1 \rangle}{dx} + \sigma \frac{d^2\langle t_1 \rangle}{dx^2}. \tag{15}$$

Розв'язавши (15) відносно $\langle t_1 \rangle$, одержимо

$$\langle t_1 \rangle = \frac{1}{\sigma} \int_{x_0}^{x_F} dx_1 e^{\varphi(x_1)/\sigma} \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 e^{-\varphi(x_2)/\sigma}, \quad (16)$$

де x_0 – початкове значення, x_F – кінцеве значення.

У роботі [15] при асимптотичному обчисленні виразу (16) було отримано апроксимовану формулу для визначення СЧПП поблизу маргінальної точки при переході від $\beta < 0$ до $\beta > 0$:

$$\langle t_1 \rangle = \Phi(k)(\alpha^2 \sigma)^{-1/3} + C(x_0, R) + 0(\sigma/\alpha R^3, \beta/\alpha x_0^2), \quad (17)$$

де $C(x_0, R)$ – детерміністичний час, $R = x_F - x_0$,

$$\Phi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-k)^n, \quad (18)$$

$$B_n = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} 2^{\frac{2n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{6}\right),$$

$$k = (\beta/\alpha)(\alpha/\sigma)^{2/3}.$$

Структура рядів (18) пояснює різне поведіння $\langle t_1 \rangle$ при $\beta < 0$ й $\beta > 0$. При $\beta < 0$ всі члени в розкладі є позитивними, що приводить до великих значень $\langle t_1 \rangle$. При $\beta > 0$ доданки в (18) змінюють знак і тому $\langle t_1 \rangle$ невелике.

З використанням цієї формули було обчислено залежності СЧПП від величин β та σ . Вони наведені на рис. 4, а, б суцільними лініями. При розрахунках покладено $x_0 = -2$, $x_F = 2$, $R = 4$. Константи α й γ було вибрано рівними $\alpha = 0,02$, а $\gamma = 0,174$, щоб розраховані криві збіглися з результатами чисельної симуляції.

Результати теоретичних розрахунків порівнювали з даними, отриманими в результаті чисельного моделювання рівняння (7). З метою визначення часу релаксації з нижнього на верхній стан використовували процедуру, описану в [25]. Покладалося, що біфуркація має місце у той момент часу, коли $T(\tau)$ уперше перевищить граничне значення $T_{tr} = 3,5$, що гарантує перехід на верхній стан. Щоб визначити середній час, обчислювали велику кількість траєкторій (як правило 3000) для кожного набору параметрів із різною реалізацією шуму. Результати чисельних розрахунків залежно від параметра β при різних інтенсивностях шуму наведено на рис. 4, а пунктирними лініями.

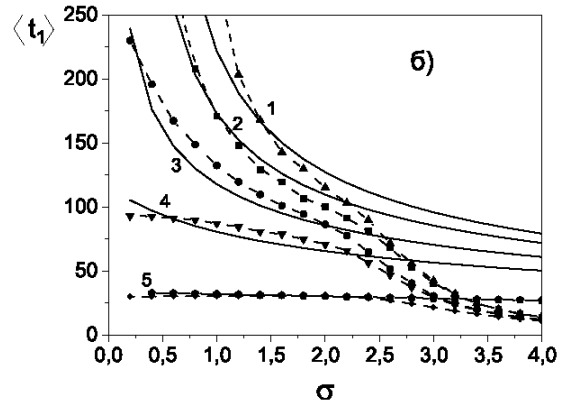
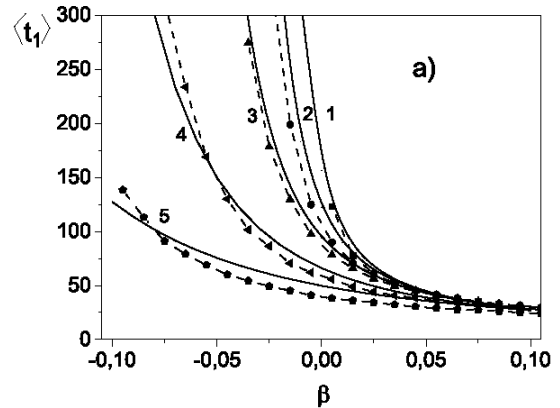


Рис. 4. Залежність $\langle t_1 \rangle$ від параметра β при різних інтенсивностях шуму (а): 1 – $\sigma = 0,01$, 2 – $\sigma = 0,15$, 3 – $\sigma = 0,4$, 4 – $\sigma = 1,0$, 5 – $\sigma = 2,5$. Залежність $\langle t_1 \rangle$ від інтенсивності шуму σ при різних β (б): 1 – $\beta = -0,007$, 2 – $\beta = -0,002$, 3 – $\beta = 0$, 4 – $\beta = 0,01$, 5 – $\beta = 0,1$

За відсутності шуму при наближенні до точки переходу час, який потрібен системі, щоб досягти стаціонарного стану, зростає (див. криву 1). У підпороговій області $\beta < 0$ час релаксації збільшується зі збільшенням відхилення контрольного параметра $\langle T_0 \rangle$ від критичного значення. При рівних значеннях відхилення час релаксації зі збільшенням інтенсивності шуму зменшується. В області за порогом $\beta > 0$ час релаксації зменшується зі збільшенням відхилення, виходячи на стаціонарне, дуже мале значення, порівняно з часом при $\beta = 0$.

З рис. 4, а видно, що має місце задовільний збіг теоретичних обчислень по наближеній формулі (17) з результатами чисельного моделювання рівняння (7). Менш задовільним є результат порівняння чисельного моделювання з теоретичними розрахунками при розгляді залежностей СЧПП від інтенсивності шуму σ (див. рис. 4, б), хоча основна закономірність, а саме, зменшення часу першого проходу зі збільшенням

інтенсивності шуму, зберігається. Відмінність кривих зумовлена, найбільш правдоподібно, мультиплікативним характером шуму в рівнянні (7), яке використовувалося для проведення чисельних розрахунків, у той час як шум у рівнянні Ланжевена (12), яке використовувалося для одержання аналітичного виразу, мав адитивний характер. Таке припущення ґрунтується на результатах робіт [7, 14], де було проведено порівняння впливу мультиплікативного й адитивного шумів на час релаксації флуктуацій в лазерних та біологічних системах відповідно. Було показано, що у випадку мультиплікативного шуму час релаксації при малих σ спочатку збільшується зі збільшенням σ , проходить через максимум, а потім спадає при великих σ . У випадку адитивного шуму поведінка була відмінною, а саме: час релаксації прямував до нескінченності при $\sigma \rightarrow 0$ та спадав із ростом σ .

6. Висновки

У роботі розглянуто спрощену стохастичну модель тунельного процесу, що дозволила одержати основні закономірності впливу на цей процес флуктуацій інтенсивності падаючого потоку електронів, які моделювалися білим шумом. Зокрема, виявлено, що збільшення інтенсивності шуму приводить не тільки до розширення піків імовірності, але й до появи бімодальності в розподілі ймовірності, яка була відсутня при малих рівнях шуму і тих же умовах.

Чисельно та з використанням теоретичної моделі роботи [15] було отримано залежності середнього часу першого проходу (СЧПП) від інтенсивності шуму. Показано, що у підпороговій області $\beta < 0$, СЧПП збільшується зі збільшенням відхилення β контрольного параметра $\langle T_0 \rangle$ від критичного значення. Збільшення часу першого проходу до значень, що перевищують величину критичного уповільнення в детерміністичному випадку, практично означає, що процес переходу не відбувається. При рівних значеннях відхилень СЧПП зі збільшенням інтенсивності шуму зменшується. З отриманих результатів випливає, що зі збільшенням відхилення β в підпороговій області для здійснення переходу потрібно підвищити інтенсивність шуму, тобто шум сприяє здійсненню переходу при тих значеннях $\langle T_0 \rangle$, за яких у детерміністичному випадку перехід неможливий. Цей висновок відрізняється від висновку робіт [12, 28], у яких стверджувалося, що зі збільшенням шуму точка біфуркації

зсувається у бік збільшення контрольного параметра.

З отриманих нами результатів видно, що для запропонованої моделі процес переходу в околі критичної точки визначається, в основному, адитивним шумом. Такий висновок підтверджує результат роботи [27] про те, що у визначенні часу першого проходу роль мультиплікативного шуму є мінімальною.

1. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1987).
2. H. Risken, *The Fokker-Planck equation, Methods of Solution and Applications* (Springer, Berlin, 1984).
3. R. Bonifacio and L.A. Lugiato, Phys. Rev. A **18**, 1129 (1978).
4. G. Broggi, L.A. Lugiato, and A. Colombo, Phys. Rev. A **32**, 2803 (1985).
5. P. Hanggi, A.R. Bulsara, and R. Janda, Phys. Rev. A **22**, 671 (1980).
6. S. Zhu, A. Yu, and R. Roy, Phys. Rev. A **34**, 4333 (1986).
7. A. Hernandez-Machado, M. San Miguel, and J.M. Sancho, Phys. Rev. A **29**, 3388 (1984).
8. V.H. Nguyen, V.L. Nguyen, and T.A. Pham, Phys. Rev. B **76**, 235326 (2007).
9. F. de Pasquale, J.M. Sancho, M. San Miguel, and P. Tartaglia, Phys. Rev. Lett. **56**, 2473 (1986).
10. P. Jung and H. Risken, Z. Phys. B.: Condens. Matt. **59**, 469 (1985).
11. J. de la Rubia and M.G. Velarde, Phys. Lett. A **69**, 304 (1978).
12. G.V. Welland and F. Moss, Phys. Lett. A **89**, 273 (1982).
13. J.M. Sancho, R. Mannella, P.V. McClintock, and F. Moss, Phys. Rev. A **32**, 3639 (1985).
14. Can-Jun Wang, Qun Wei, and Dong-Cheng Mei, Phys. Lett. A **372**, 2176 (2008).
15. P. Colet, M. San Miguel, J. Casademunt, and J.M. Sancho, Phys. Rev. A **39**, 149 (1989).
16. L. Ramirez-Piscina and J.M. Sancho, Phys. Rev. A **40**, 3381 (1989).
17. V.V. Mitin, V.A. Kochelap, and M.A. Strosio, *Introduction to Nanoelectronics. Science, Nanotechnology, Engineering, and Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008).
18. V.J. Goldman, D.C. Tsui, and J.E. Cunningham, Phys. Rev. Lett. **58**, 1256 (1987).
19. N.C. Kluksdahl, A.M. Krیمان, and D.K. Ferry, Phys. Rev. B **39**, 7720 (1989).
20. B.A. Biegel and J.D. Plummer, Phys. Rev. B **54**, 8070 (1996).

21. O.A. Tretiakov and K.A. Matveev, *Phys. Rev. B* **71**, 165326 (2005).
22. A.S. Davydov and V.N. Ermakov, *Physica D* **28**, 168 (1987).
23. В.М. Єрмаков, О.О. Понежа, *УФЖ* **48**, 681 (2003).
24. G.S. Agarval and S.R. Shenoy, *Phys. Rev. A* **23**, 2719 (1981).
25. R. Mannella and V. Palleschi, *Phys. Rev. A* **43**, 663 (1991).
26. R.L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach, New York, 1963).
27. M.R. Young and S. Singh, *Phys. Rev. A* **38**, 238 (1988).
28. R. Graham and A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **26**, 1676 (1982).

Одержано 07.04.09

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ШУМА НА ПРОЦЕСС РЕЛАКСАЦИИ В БИСТАБИЛЬНЫХ ТУННЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

*Е.А. Понежа***Резюме**

Рассмотрено влияние флуктуаций интенсивности падающего на двухбарьерную туннельную систему потока электронов вблизи точки неустойчивости. Для описания эффектов шума в системе, находящейся вблизи резонанса в условиях когерентности туннелирования, использовано упрощенное уравнение Ланжевена с мультипликативным белым шумом. Методом численного моделирования этого уравнения получены зависимости среднего времени первого прохода от интенсивности шума и

отклонения среднего значения интенсивности падающего электронного потока от критического в детерминистическом случае. Результаты численных расчетов удовлетворительно совпали с теоретическими расчетами работы Коле и др. Время релаксации было максимальным в отсутствие шума и уменьшалось с ростом интенсивности шума. Для тех значений интенсивности потока, при которых переход в детерминистическом случае был невозможен, введение шума способствовало переходу.

EFFECT OF EXTERNAL NOISE ON THE RELAXATION PROCESS IN BISTABLE TUNNELING SYSTEMS

E.A. Ponezha

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine)

S u m m a r y

We consider the effects of intensity fluctuations of an incident electron flow incoming a double-barrier tunneling structure near an instability point. A simplified Langevin equation with multiplicative Gaussian white noise is used to describe noise effects in the system near a resonance under conditions of coherent tunneling. Numerically simulating this equation, we obtained the dependences of the mean first passage time on the noise intensity and a deviation of the average intensity of the incident electron flow from the critical value in the deterministic case. The numerical results satisfactorily agree with the theoretical results of Colet et al. The relaxation time has a maximum value in the absence of noise and decreases with increase in the noise intensity. Noise favors transitions at those incident intensities, for which the transition in the deterministic case was impossible.