УДК 519.21

О. В. Прищепа
Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ПОРОГОВА СТРАТЕГІЯ КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ЧИСЛО СПРОБ ПОЧАТИ ОБСЛУГОВУВАННЯ

У роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку для системи типу $M / M / c / \infty$ з обмеженим числом спроб почати обслуговування. Для даної системи використовується порогова стратегія керування. Знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі.

Ключові слова: *стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, порогова стратегія, оптимізація.*

Вступ. Особливістю класичних систем масового обслуговування є те, що вимоги, які не можуть отримати обслуговування відразу, надходять до черги та обслуговуються відповідно до визначеної дисципліни, або ж залишають систему назавжди. Проте в деяких випадках вимоги залишають чергу та вважаються для системи втраченими. Однак дане припущення про втрату вимог є лише першою апроксимацією реальних ситуацій. Зазвичай такі вимоги після невдалої початкової спроби отримати обслуговування через деякий випадковий проміжок часу повертаються до системи та знову намагаються отримати обслуговування. Класичні системи не беруть до уваги феномен повторних викликів і, таким чином, не можуть використовуватися для розв’язання великої кількості важливих практичних задач, оскільки втрачається точність моделі. Саме тому, слід розглядати системи масового обслуговування з повторними викликами, в яких вимоги, що надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, повертаються після деякого періоду часу, щоб отримати обслуговування. Особливе значення такі системи мають для комп’ютерних та телекомунікаційних мереж. Більш детально порівняльний аналіз класичних систем та систем з повторними викликами проведено в роботах [1–2]. При цьому для систем з повторними викликами покладають, що повторне звернення здійснюються до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних звернень до системи часто буває обмеженим (див. [3]). Дослідження систем з обмеженим числом спроб почати обслуговування є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

Модель. Основна модель, що розглядається у роботі, є двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t)=\left(Q_1(t),Q_2(t)\right)$, $t\geq 0$ у фазовому просторі $S(Q)=\{0,1,...,c\}\times\{0,1,...\}$. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $\left(i,j\right),\left(i',j'\right)\in S(Q)$ ланцюга $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0,1,...,c-1,\ j=0,1,...$, то

$$a_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при}\quad (i',j')=(i+1,j),\\ i\mu, & \text{при}\quad (i',j')=(i-1,j),\\ j\nu, & \text{при}\quad (i',j')=(i+1,j-1),\\ -\left(\lambda_j+i\mu+j\nu\right), & \text{при}\quad (i',j')=(i,j),\\ 0, & \text{в інших випадках;}\end{cases}\tag{1}$$

2) якщо $i=c,\ j=0,1,...$, то

$$a_{(c,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при}\quad (i',j')=(c,j+1),\\ c\mu, & \text{при}\quad (i',j')=(c-1,j),\\ j\nu, & \text{при}\quad (i',j')=(c,j-1),\\ -\left(\lambda_j+c\mu+j\nu\right), & \text{при}\quad (i',j')=(c,j),\\ 0, & \text{в інших випадках}.\end{cases}\tag{2}$$

Даний ланцюг Маркова описує процес обслуговування в наступній системі. На вхід системи ззовні надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування — показниково розподілена випадкова величина з параметром μ. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів та повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром ν. Вимога, яка при повторному зверненні знайшла прилад зайнятим, залишає систему не отримуючи обслуговування. Інтенсивність вхідного потоку визначається параметром λ_j, $j=0,1,...$, що залежить від кількості джерел повторних викликів. Компонента $Q_1(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо позначати як $M/M/c/\infty$. Символ "∞" на останній позиції означає відсутність обмежень на кількість джерел повторних викликів.

У подальших викладках будемо вважати $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, $j = 0,1,...$, що завжди виконується на практиці. При виконанні цієї вимоги будемо казати, що параметри моделі невироджені.

Умови існування стаціонарного розподілу. З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$.

Лема 1. Якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{-1}\lambda_n < \nu$, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \geq 0$ багатоканальної системи масового обслуговування з однією спробою повтору існує стаціонарний режим.

Доведення. Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму, розглянемо

$$\varphi(i, j) = \varphi(j) = j \text{ , } (i, j) \in S(Q) \text{ ,}$$

в якості тест-функцій Ляпунова. Для них середній перенос, що визначається як

$$y_{ij} = \sum_{(i',j')\neq(i,j)} a_{(i,j)(i',j')}(\varphi(i',j') - \varphi(i,j)) \text{ ,}$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} -j\nu & \text{при } \; i = 0,1,...,c-1 \\ \lambda_j - j\nu, & \text{при } \; i = c. \end{cases}$$

При $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{-1}\lambda_n < \nu$ для y_{ij} виконуються умови теореми Твіді [2, с. 97]. Таким чином процес $Q(t)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом.

Лему доведено.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

В зв'язку з цим розглянемо порогову стратегію, яка задається порогом H. Якщо в момент часу $t \geq 0$, кількість джерел повторних викликів не перевищує H, то система функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку на вході системи дорівнює h_1. В іншому випадку, якщо кількість джерел повторних викликів стає більшою за H, то система переходить у другий режим з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Інші параметри від режиму не залежать.

У подальшому індекс H буде вказувати на те, що відповідні характеристики системи розглядаються при фіксованій пороговій стратегії.

Нехай $S_1(t, H)$ — число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t; $S_2(t, H)$ — число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t,H)$ — число перемикань інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}S_i(t,H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H),\ i=1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$C_1S_1(H)-C_2S_2(H)-C_3S_3(H)\to\max, \tag{3}$$
$$H\in\{0,1,...\},$$

де C_1 — прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 — штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (3) є такий поріг H, який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [5, 7–8].

В умовах існування стаціонарного режиму (див. лему 1) функціонали $S_i\left(H\right),\ i=1,2,3,$ теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності

$$S_1\left(H\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{c} i\mu\,\pi_{ij}(H),\ S_2\left(H\right)=h_1\sum_{j=0}^{H}\pi_{cj}(H)+h_2\sum_{j=H+1}^{\infty}\pi_{cj}(H),$$

$$S_3\left(H\right)=h_1\pi_{cH}(H)+(H+1)\nu\sum_{i=0}^{c}\pi_{iH+1}(H).$$

Таким чином для розв'язання задачі (3) необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу багатоканальної системи з однією спробою повтору.

Алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей. У загальному випадку при довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, виключення становлять лише одноканальні системи [6]. Тому доцільно спочатку розглядати урізану модель даної системи $M/M/c/N$, яка має скінченну кількість місць для повторних викликів N. При умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди.

Процес обслуговування для урізаної моделі визначається двовимірним ланцюгом Маркова $Q^N(t)=(Q_1^N(t),Q_2^N(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S(Q^N)=\{0,1,...,c\}\times\{0,1,...,N\}$. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j')\in S(Q^N)$ ланцюга $Q^N(t)$ збігаються з (1) для $i=0,1,...,c-1,\ j=0,1,...,N$ та з (2) для $i=c,\quad j=0,1,...,N-1$, а у випадку $i=c,\quad j=N$ визначаються наступним чином:

$$a_{(c,N)(i',j')}^{N}=\begin{cases} c\mu, \text{ при } \left(i',j'\right)=\left(c-1,N\right), \\ N\nu, \text{ при } \left(i',j'\right)=\left(c,N-1\right), \\ -\left(c\mu+N\nu\right), \text{ при } \left(i',j'\right)=\left(c,N\right), \\ 0, \text{ в інших випадках}. \end{cases}$$

Оскільки фазовий простір $S(Q^N)$ процесу $Q^N(t)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим. Знайдемо його стаціонарний розподіл π_{ij}^N, $(i,j)\in S(Q^N)$.

Введемо наступні позначення:

$$e_i\left(k\right)=\left(\delta_{i0},\delta_{i1},...,\delta_{ik}\right)^T, \text{ де } \delta_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ при } i=j, \\ 0, \text{ при } i\neq j; \end{cases}$$

$$\overline{1}\left(k\right)=\underbrace{\left(1,1,...,1\right)}_{k}^T;$$

$$F\left(j\right)=\left\|f_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^c, \ j=0,1,\ldots,N-1,$$

де $$f_{ik}^j=\begin{cases} \lambda_j+i\mu+j\nu, \quad k=i,\, i=0,1,\ldots,c-1, \\ \lambda_j+c\mu, \ k=c,\, i=c, \\ -\lambda_j, \quad k=i+1,\, i=0,1,\ldots,c-2, \\ -i\mu, \quad k=i-1,\, i=1,2,\ldots,c, \\ -j\nu, \quad k=c,\, i=0,1,\ldots,c-2, \\ -\left(\lambda_j+j\nu\right), \quad k=c,\, i=c-1, \\ 0, \quad \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$B=\left\|b_{ik}\right\|_{i,k=0}^c, \ j=0,1,\ldots,N-1,$$

де $$b_{ik}^j=\begin{cases} 1, \quad k=i+1,\, i=0,1,...,c-1, \\ 1, \quad k=c,\, i=c, \\ 0, \quad \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$D\left(N\right)=\left\|d_{ik}^N\right\|_{i,k=0}^{c-1},$$

де $$d_{ik}^j=\begin{cases} i\mu, \quad k=i,\, i=1,2,\ldots,c-1, \\ -\left(\lambda_N+N\nu\right), \quad k=i-1,\, i=1,\ldots,c-1, \\ -N\nu, \quad k=i-2,i-3,...,i-c+1,\, i=2,3,\ldots,c-1, \\ 0, \quad \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$W(j)=BF^{-1}\left(j\right), \quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Перевіримо, що матриці $F(j),\ j=0,1,\dots,N-1$ та $D(N)$ є невиродженими.

Лема 2. Якщо $\lambda_j,\mu,\nu>0$, то матриці $F(j),\ j=0,1,\dots,N-1$ та $D(N)$ є невиродженими.

Доведення. Для перевірки на невиродженість матриць $F(j)$, $j=0,1,\dots,N-1$ скористаємося послабленими умовами Адамара [4, с. 408]:

$$\left|f_{ii}^{\,j}\right|-\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{c}\left|f_{ik}^{\,j}\right|\geq 0\ ,\ i=0,1,\dots,c\ , \tag{4}$$

Умови (4) визначають, що всі діагональні елементи матриць $F\left(j\right)$ є слабко домінуючими. Враховуючи вигляд вище введеної матриці, маємо

$$\lambda_j+i\mu+j\nu-\lambda_j-i\mu-j\nu=0\ ,i=0,1,\dots,c-1\ ;$$

$$\lambda_j+c\mu-c\mu=\lambda_j>0\ ,i=c\ .$$

Матриця $D\left(N\right)$ є трикутною матрицею і тому $\left|D\left(N\right)\right|=\prod_{i=1}^{c-1}i\mu>0$, що означає невиродженість матриці.

Таким чином, якщо параметри системи $\lambda_j,\mu,\nu>0$, то матриці $F\left(j\right),\ j=0,1,\dots,N-1$ та $D\left(N\right)$ є невиродженими.

Лему доведено.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j,\mu,\nu>0$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)},\left(i,j\right)\in S(Q^N)$ мають наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix}\pi_{1N}^{N}\\ \pi_{2N}^{N}\\ \dots\\ \pi_{c-1N}^{N}\end{pmatrix}=\pi_{0N}^{N}D^{-1}\left(N\right)\left(N\nu\bar{1}\left(c-1\right)+\lambda_Ne_1\left(c-1\right)\right), \tag{5}$$

$$\pi_{cN}^{N}=\frac{\pi_{0N}^{N}}{c\mu}\left(r_{0N}^{N},r_{1N}^{N},\dots,r_{c-1N}^{N}\right)(N\nu\bar{1}(c)+\lambda_Ne_c(c))\ , \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix}\pi_{0j}^{N}\\ \pi_{1j}^{N}\\ \dots\\ \pi_{cj}^{N}\end{pmatrix}=\frac{\pi_{0N}N!\nu^{N-j}}{j!}\left(r_{0N}^{N},r_{1N}^{N},\dots,r_{cN}^{N}\right)W\left(N-1\right)\times\dots\times W\left(j\right), \tag{7}$$

$$j=0,1,\dots,N-1,$$

$$\pi_{0N}^{N} = \left\{ N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} \left(r_{0N}^{N}, r_{1N}^{N}, ..., r_{cN}^{N} \right) W(N-1) \times \ldots \times W(j) \overline{1}(c+1) + \right. $$
$$\left. + \left(r_{0N}^{N}, r_{1N}^{N}, ..., r_{c-1N}^{N} \right) \overline{1}(c) + \frac{1}{c\mu} \left(r_{0N}^{N}, r_{1N}^{N}, ..., r_{c-1N}^{N} \right) (N\nu \overline{1}(c) + \lambda_N e_c(c)) \right\}^{-1}, \tag{8}$$

де

$$\begin{pmatrix} r_{0N}^{N} \\ r_{1N}^{N} \\ \ldots \\ r_{c-1N}^{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ D^{-1}(N)\left(N\nu \overline{1}(c-1) + \lambda_N e_1(c-1) \right) \end{pmatrix},$$

$$r_{cN} = \frac{1}{c\mu} \left(r_{0N}^{N}, r_{1N}^{N}, ..., r_{c-1N}^{N} \right) (N\nu \overline{1}(c) + \lambda_N e_c(c)),$$

$$W(j) = BF^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Доведення. Для кожного $k = 0, 1, \ldots, c-1$ розіб'ємо $S(Q^N)$ на дві підмножини $E_k = \{(0, N), (1, N), \ldots, (k, N)\}$ та $\overline{E}_k = S(Q^N) \setminus E_k$. В силу рівності потоків ймовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([9], с. 49), будемо мати

$$N\nu\pi_{0N}^{N} + N\nu\pi_{1N}^{N} + \ldots + N\nu\pi_{k-1N}^{N} + (N\nu + \lambda_N)\pi_{kN}^{N} = (k+1)\mu\pi_{k+1N}^{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, c-1. \tag{9}$$

Введемо нову змінну $r_{ij}^{N} = \dfrac{\pi_{ij}^{N}}{\pi_{0N}^{N}}$, $(i, j) \in S(Q^N)$. Тоді перші $(c-1)$ рівняння системи (9) матимуть вигляд

$$\begin{cases} \mu r_{1N}^{N} = N\nu + \lambda_N, \\ -(N\nu + \lambda_N) r_{1N}^{N} + 2\mu r_{2N}^{N} = N\nu, \\ -N\nu r_{1N}^{N} - (N\nu + \lambda_N) r_{2N}^{N} + 3\mu r_{3N}^{N} = N\nu, \\ \ldots \\ -N\nu r_{1N}^{N} - \ldots - N\nu r_{c-3N}^{N} - (N\nu + \lambda_N) r_{c-2N}^{N} + (c-1)\mu r_{c-1N}^{N} = N\nu. \end{cases} \tag{10}$$

Відносно $r_{1N}, \ldots, r_{c-1N}$ розв'язком (10) буде

$$\begin{pmatrix} r_{1N}^{N} \\ r_{2N}^{N} \\ \ldots \\ r_{c-1N}^{N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N)\left(N\nu \overline{1}(c-1) + \lambda_N e_1(c-1) \right). \tag{11}$$

З (9) при $k = c-1$ знаходимо

$$r_{cN} = \frac{1}{c\mu}\left(r_{0N}^{N}, r_{1N}^{N}, ..., r_{c-1N}^{N}\right)(N\nu\bar{1}(c) + \lambda_N e_c(c)). \quad (12)$$

Для кожного $j = 0,1,...,N-1$ побудуємо розбиття фазового простору

$$S(Q^N) = S(Q^N) \cup \overline{S_j}(Q^N),$$

де

$$S_j(Q^N) = \left\{\left(k,m\right) \in S(Q^N) : m \le j\right\}.$$

Знову використовуючи теорему про рівність потоку ймовірностей через границю області $S_j(Q^N)$ в стаціонарному режимі, маємо

$$\lambda_j \pi_{cj}^N = \left(j+1\right)\nu\,\pi_{0j+1}^N + \ldots + \left(j+1\right)\nu\,\pi_{cj+1}^N.$$

Для введеної нової змінної попереднє рівняння матиме вигляд

$$\lambda_j r_{cj}^N = \left(j+1\right)\nu\, r_{0j+1}^N + \ldots + \left(j+1\right)\nu\, r_{cj+1}^N. \quad (13)$$

Розглянемо тепер $(c+1)\times N$ замкнених контурів, які містять одну точку $\left(i,j\right)$ з області $\tilde{S}(Q^N) = \left\{0,1,\ldots,c\right\}\times\left\{0,1,\ldots,N-1\right\}$. Відповідні рівняння для r_{ij}^N, $(i,j)\in\tilde{S}(Q^N)$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu)r_{0j}^N = \mu r_{1j}^N,\ i = 0, \quad (14)$$

$$(\lambda_j + i\mu + j\nu)r_{ij}^N = \left(j+1\right)\nu r_{i-1j+1}^N + \lambda_j r_{i-1j}^N + \left(i+1\right)\mu\, r_{i+1j}^N, \quad i = 1,2,\ldots,c-2, \quad (15)$$

$$\left(\lambda_j + \left(c-1\right)\mu + j\nu\right)r_{c-1j}^N = \left(j+1\right)\nu\, r_{c-2j+1}^N + \lambda_j r_{c-2j}^N + c\mu r_{cj}^N, \quad i = c-1, \quad (16)$$

$$(\lambda_j + c\mu + j\nu)r_{cj}^N = \lambda_j r_{c-1j}^N + \lambda_{j-1}r_{cj-1}^N + \left(j+1\right)\nu r_{c-1j+1}^N + \left(j+1\right)\nu r_{cj+1}^N, i = c. \quad (17)$$

Покладемо в рівнянні (13) $j = j-1$, тоді перепишемо (17) у наступному вигляді

$$(\lambda + c\mu)r_{cj}^N = (\lambda_j + j\nu)r_{c-1j}^N + \lambda_{j-1}r_{cj-1}^N + \left(j+1\right)\nu r_{c-1j+1}^N +$$
$$+\left(j+1\right)\nu r_{cj+1}^N + j\nu r_{0j}^N + j\nu r_{1j}^N + ... + j\nu r_{c-2j}^N, \quad i = c.$$

Подамо систему (14)–(17) у векторно-матричному вигляді

$$\left(r_{0j}^N, r_{1j}^N, ..., r_{cj}^N\right)F\left(j\right) = (j+1)\nu\left(r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, ..., r_{cj+1}^N\right)B,$$

або

$$\left(r_{0j}^N, r_{1j}^N, ..., r_{cj}^N\right) = (j+1)\nu\left(r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, ..., r_{cj+1}^N\right)BF^{-1}\left(j\right) =$$
$$= (j+1)\nu\left(r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, ..., r_{cj+1}^N\right)W\left(j\right),\ j = 0,1,...,N-1, \quad (18)$$

оскільки за лемою 2 обернені матриці $F^{-1}(j)$ існують.

Розв’язок векторно-матричного рекурентного рівняння (18) можна подати у вигляді

$$\left(r_{0j}^N, r_{1j}^N, ..., r_{cj}^N\right) = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!}\left(r_{0N}^N, r_{1N}^N, ..., r_{cN}^N\right)W\left(N-1\right)\times\ldots\times W\left(j\right), \quad j = 0,1,...,N-1. \tag{19}$$

Умова нормування для стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^{(N)}$, $\left(i,j\right)\in S(Q^N)$, яка виглядає так $\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{N}\pi_{ij}^N = 1$, може бути переписана наступним чином

$$\sum_{i=0}^{c-1} r_{iN}^N + r_{cN}^N + \sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{N-1} r_{ij}^N = \left(\pi_{0N}^N\right)^{-1}.$$

Підставляючи сюди вирази з формул (12), (19), отримуємо

$$\left(\pi_{0N}^N\right)^{-1} = N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}\left(r_{0N}^N, r_{1N}^N, ..., r_{cN}^N\right)W(N-1)\times\ldots\times W(j)\overline{1}(c+1) + \\ + \left(r_{0N}^N, r_{1N}^N, ..., r_{c-1N}^N\right)\overline{1}(c) + \frac{1}{c\mu}\left(r_{0N}^N, r_{1N}^N, ..., r_{c-1N}^N\right)(N\nu\overline{1}(c) + \lambda_N e_c(c)). \tag{20}$$

Співвідношення (5)–(8) є безпосереднім наслідком (11), (12), (19), (20).

Теорему доведено.

Доведена теорема містить у собі ефективну рекурентну процедуру для знаходження стаціонарного розподілу керованої системи $M/M/c/N$ з однією спробою повтору та обмеженою кількістю джерел повторного виклику. Результат теореми застосуємо для пошуку явних формул для стаціонарних ймовірностей керованої системи з одним приладом та доведемо можливість перенесення вказаного результату на систему без обмежень на кількість джерел повторного виклику.

Введемо позначення

$$A_i\left(j\right) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1}\dfrac{\lambda_{k+1} + (k+1)\nu + \mu}{\lambda_k(\lambda_k + k\nu)}, & i < j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{21}$$

Наслідок 1. Якщо для $M/M/1/\infty$ системи з однією спробою повтору виконуються умови леми 1, то для неї існує стаціонарний режим стаціонарні ймовірності дорівнюють

$$\pi_{0j} = \frac{P_j}{j!\nu^j}, \tag{22}$$

$$\pi_{1j} = \frac{P_j(\lambda_j + j\nu)}{j!\mu\nu^j}, \tag{23}$$

$$P_j = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{\left(\lambda_i + i\nu + \mu\right) A_i(j)}{i!\mu\nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\lambda_i + i\nu + \mu}{i!\mu\nu^i A_j(i)} \right\}^{-1}. \tag{24}$$

Доведення. Факт існування стаціонарного розподілу випливає з леми 1. Для пошуку стаціонарних ймовірностей розглянемо спочатку систему типу $M/M/1/N$. Для такої системи застосуємо результати теореми 1. У випадку $c=1$ маємо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } F(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu & -(\lambda_j + j\nu) \\ -\mu & \lambda_j + \mu \end{pmatrix}.$$

Оскільки $F^{-1}(j) = \dfrac{1}{\lambda_j(\lambda_j + j\nu)} \begin{pmatrix} \lambda_j + \mu & \lambda_j + j\nu \\ \mu & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$, то матриця $W(j)$ буде мати вигляд

$$W(j) = BF^{-1}(j) = \frac{1}{\lambda_j(\lambda_j + j\nu)} \begin{pmatrix} \mu & \lambda_j + j\nu \\ \mu & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Тоді з формул (5)–(7) після відповідних перетворень маємо

$$\pi_{0j} = \pi_{0N} \frac{N!\nu^{N-j}}{j!} A_j(N), \tag{25}$$

$$\pi_{1j} = \pi_{0N} \frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_k + j\nu)}{j!\mu} A_j(N), \tag{26}$$

$$\pi_{1N} = \pi_{0N} \frac{1}{\mu}(N\nu + \lambda_N), \tag{27}$$

$$\pi_{0N} = \left\{ N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} A_j(N) \frac{\lambda_j + j\nu + \mu}{\mu} + \frac{1}{\mu}(\lambda_N + N\nu + \mu) \right\}^{-1}. \tag{28}$$

Переходячи у формулах (25)–(28) до границі при $N \to \infty$, отримаємо подання (22)–(24).

Наслідок доведено.

Висновки. В даній роботі досліджується стохастична багатоканальна система з однією спробою повтору, для якої розглянуто проблему оптимального керування. Для процесу обслуговування вимог досліджено стаціонарний режим. Знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі.

Список використаних джерел:

1. Artalejo J. R. Retrial Queueing Systems A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. — Springer, 2008. — 317 p.
2. Falin G. I. Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Templeton. — London : Chapman and Hall, 1997. — 317 p.
3. Shin Y. W. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations / Y. W. Shin, D. H. Moon // In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08). — 2008. — P. 237–247.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. —576 с.
5. Дудин А. Н. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети / А. Н.Дудин, В. И. Клименок // Автоматика и вычислительная техника. — 1991. — № 2. — С. 25–31.
6. Лебєдєв Є. О. Стохастичні системи з повторними викликами та нетерплячими вимогами / Є. О. Лебєдєв, О. В. Прищепа // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичних наук. — 2007. — Вип. 2. — С. 169–173.
7. Лебєдєв Є. О. Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог / Є. О. Лебєдєв, В. Д. Пономарьов // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2008. — № 2. — С. 91–97.
8. Пономарьов В. Д. Оптимізація керування режимом роботи системи з повторними викликами і скінченним числом користувачів / В. Д. Пономарьов // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2008. — № 4. — С. 161–168.
9. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания / Дж. Уолрэнд. — М. : Мир, 1993. — 336 с.

In this paper, an optimal control problem of rate of the input flow for $M / M / c / \infty$ — type a retrial queue with limited number of retrials is considered. Threshold strategy for this system is used. The effective algorithm for stationary probabilities and explicit form of quality functional in the stationary regime are found.

Key words: *retrial queue, service process, stationary probabilities, threshold strategy, optimization.*

Отримано: 07.04.2016