УДК 519.6

О. В. Ковальчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ОДИН ТРИКРОКОВИЙ МЕТОД З ПАМ'ЯТТЮ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропонований трикроковий метод з пам'яттю на основі методу Ньютона для розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь. Досліджено швидкість збіжності даного методу. Проведено чисельні експерименти на тестових задачах.

Ключові слова: *метод Ньютона, система нелінійних рівнянь, швидкість збіжності.*

Вступ. Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач немає, тому актуальною є проблема побудови нових ефективніших алгоритмів. Пропонується трикроковий метод на основі методу Ньютона для розв'язування систем, у якого швидкість збіжності не менша ніж в методі Ньютона, але чисельні дослідження показують ефективність запропонованого методу.

Постановка задачі. Розглянемо нелінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0\,. \tag{1}$$

Класичним методом для розв'язування (1) є метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \left[P'(x_k)\right]^{-1} P(x_k),\ k = 1,2... \tag{2}$$

Даний метод на кожному кроці вимагає обчислення матриці Якобі функції $P(x)$, що у випадку складності функції є доволі складною операцією.

Розглянемо модифікацію методу Ньютона, для ефективнішого використання матриці Якобі яку отримуємо на попередньому кроці.

$$\begin{gathered}
x_1 = x_0 - \left[P'(x_0)\right]^{-1} P(x_0), \\
u_k = x_k - \left[P'(x_k)\right]^{-1} P(x_k), \\
v_k = x_k - \left[P'(x_{k-1})\right]^{-1} P(x_k), \\
x_{k+1} = \arg\min \left\| P\left(u_k + \gamma_k (v_k - u_k)\right) \right\|,\ k = 1,2...
\end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, що x_1 даного методу співпадає з першим наближенням, отриманим по методу Ньютона. Для обчислення точок v_k використовуються значення оператора похідних, вже відомі з попереднього кроку. Таким чином, метод (3), не вимагає значної кількості додаткових обчислень на кожній ітерації в порівнянні з методом Ньютона.

Дослідження швидкості збіжності. Для послідовності $\{x_n\}$, отриманої за (3) має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай x^* — розв’язок задачі (1). Якщо

1) $P(x)$ — неперервно-диференційована в області $D \subset R^n$;

$$D = \left\{ x \in R^n : \|x - x_0\| \le B\|P(x_0)\| \right\}$$

2) $\forall x \in D \quad \|P^{'}(x)\| \le M_1$,

3) $\forall x, y \in D \quad P^{'}(x)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$\|P^{'}(x) - P^{'}(y)\| \le L\|x - y\|;$$

4) $\forall x \in D$ існує обернений оператор $\left[P^{'}(x)\right]^{-1}$, причому $\left\|\left[P^{'}(x)\right]^{-1}\right\| \le B$;

5) початкове наближення x_0 вибрано так, що $q = B^3 M_1 L\|P(x_0)\| < 1$, тоді послідовність $\{x_k\}$, яка побудована за (3), є коректно визначена, збігається і має місце оцінка

$$\|P(x_k)\| \le \prod_{i=0}^{k-1} \mu_{k-i}^{2^i} q^{2^k - 1} \|P(x_0)\|, \tag{4}$$

де $0 < \mu_k \le 1$.

Доведення. Доведення теореми здійснимо методом математичної індукції.

Оскільки перше наближення обчислюється за методом Ньютона, то можемо записати наступне

$$\|x_1 - x^*\| \le BL\|x_0 - x^*\|^2.$$

Із розкладу $P(x)$ в околі точки x_1 в ряд Тейлора та використовуючи умову теореми отримаємо

$$\|P(x_1)\| \le M_1 BL\|x_0 - x^*\|^2 \le M_1 B^3 L\|P(x_0)\|^2 \le q\|P(x_0)\|$$

Тобто, для $k=0$ оцінка (4) виконується.

Оскільки перше наближення співпадає з методом Ньютона, потрібно переконатися що наступне наближення, яке вже обчислюється за допомогою додаткових обчислень, теж задовольняє (4). Застосуємо метод математичної індукції для послідовності $x_2, x_3, \ldots$. Покажемо виконання (4) для $k=1$.

$$u_1 - x^* = x_1 - x^* - \left[P'(x_1)\right]^{-1} P'(x^* + \tau(x_1 - x^*))(x_1 - x^*) =$$

$$= \left[P'(x_1)\right]^{-1} \left(P'(x_1) - P'(x^* + \tau(x_1 - x^*))\right)(x_1 - x^*).$$

Пронормувавши попередній вираз, та використавши умови теореми 3) і 4) маємо

$$\left\|u_1 - x^*\right\| \le B(1-\tau)L\left\|x_1 - x^*\right\|^2 \le BL\left\|x_1 - x^*\right\|^2.$$

Із розкладу $P(x)$ в околі точки v_1 в ряд Тейлора можемо записати наступне

$$P(u_1) - P(x^*) = P'\left(x^* + \tau\left(u_1 - x^*\right)\right)\left(u_1 - x^*\right),$$

тоді використовуючи умову теореми отримаємо

$$\left\|P(u_1)\right\| \le M_1 \left\|u_1 - x^*\right\|,$$

а також можна записати $\left\|x_1 - x^*\right\| \le B\left\|P(x_1)\right\|$.

Тоді враховуючи побудову методу

$$\left\|P(x_2)\right\| \le \mu_1 \left\|P(u_1)\right\| \le \mu_1 M_1 \left\|u_1 - x^*\right\| \le \mu_1 M_1 BL \left\|x_1 - x^*\right\|^2 \le$$

$$\le \mu_1 M_1 B^3 L \left\|P(x_1)\right\|^2 \le \mu_1 M_1 B^3 L \left(q\left\|P(x_0)\right\|\right)^2 =$$

$$= \mu_1 M_1 L B^3 q^2 \left\|P(x_0)\right\|^2 \le \mu_1 q q^2 \left\|P(x_0)\right\| = \mu_1 q^3 \left\|P(x_0)\right\|.$$

Таким чином, оцінка (4) виконується для $k=1$.

Нехай $\left\|P(x_k)\right\| \le \prod_{i=0}^{k-1} \mu_{k-i}^{2^i} q^{2^k - 1} \left\|P(x_0)\right\|$ виконується, тоді переконаємося, що для x_{k+1} теж задовольняє (4). Для цього спочатку оцінимо вираз $u_k - x^*$

$$u_k - x^* = x_k - x^* - \left[P'(x_k)\right]^{-1} P'(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) =$$

$$= \left[P'(x_k)\right]^{-1} \left(P'(x_k) - P'(x^* + \tau(x_k - x^*))\right)(x_k - x^*).$$

Пронормувавши попередній вираз, та використавши умови теореми 3) і 4) маємо

$$\left\|u_k - x^*\right\| \le B(1-\tau)L\left\|x_k - x^*\right\|^2 \le BL\left\|x_k - x^*\right\|^2 .$$

Використовуючи умову теореми отримаємо

$$\left\|P(u_k)\right\| \le M_1\left\|u_k - x^*\right\|,$$

а також можна записати $\left\|x_k - x^*\right\| \le B\left\|P\left(x_k\right)\right\|$

Отже враховуючи ідею побудови методу

$$\left\|P\left(x_{k+1}\right)\right\| \le \mu_k\left\|P\left(u_k\right)\right\| \le \mu_k M_1\left\|u_k - x^*\right\| \le \mu_k M_1 BL\left\|x_k - x^*\right\|^2 \le$$

$$\le \mu_k M_1 B^3 L\left\|P\left(x_k\right)\right\|^2 \le \mu_k M_1 B^3 L\left(\prod_{i=0}^{k-1}\mu_{k-i}^{2^i} q^{2^k-1}\left\|P(x_0)\right\|\right)^2 \le$$

$$\le \prod_{i=0}^{k}\mu_{k-i}^{2^i} q^{2^{k+1}-1}\left\|P(x_0)\right\|.$$

Теорема доведена.

Чисельні експерименти. В більшості випадків досить важко підібрати «гарне» початкове наближення, тому використовують демпфований [1, с. 269] множник. Отже, остаточно метод набуде наступного вигляду

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 - \alpha\left[P^{'}(x_0)\right]^{-1}P(x_0), \\ u_k = x_k - \beta_k\left[P^{'}(x_k)\right]^{-1}P(x_k), \\ v_k = x_k - \lambda_k\left[P^{'}(x_{k-1})\right]^{-1}P(x_k), \\ x_{k+1} = \arg\min\left\|P\left(u_k + \gamma_k(v_k - u_k)\right)\right\|,\ k = 1,2... \\ \alpha, \beta_k, \lambda_k \in \left(0;1\right]. \end{gathered} \tag{3'}$$

Тестування методів проведено на наступних прикладах.

Приклад 1. Розширена сингулярна система Пауелла [3, с. 26]

$$P_{4k-3}\left(x\right) = x_{4k-3} + 10x_{4k-2};\ P_{4k-2}\left(x\right) = \sqrt{5}\left(x_{4k-1} - x_{4k}\right);$$

$$P_{4k-1}\left(x\right) = \left(x_{4k-2} - 2x_{4k-1}\right)^2;\ P_{4k}\left(x\right) = \sqrt{10}\left(x_{4k-3} - x_{4k}\right)^2;$$

$$x_0 = \left(3;-1;0;1;...,3;-1;0;1\right);\ 1 \le k \le \frac{n}{4}.$$

Розв'язок $x^* = \left(0;...;0\right)$; $P\left(x^*\right) = 0$.

Приклад 2. Розширена проблема Грага і Леві [2, с. 58]

$$P_{4k-3}(x) = \left(e^{x_{4k-3}} - x_{4k-2}\right)^2; \;\; P_{4k-2}(x) = 10\left(x_{4k-2} - x_{4k-1}\right)^3;$$

$$P_{4k-1}(x) = tg^2\left(x_{4k-1} - x_{4k}\right); \;\; P_{4k}(x) = x_{4k} - 1,$$

$$x_0 = \left(1;2;...;1;2\right); \; 1 \le k \le \frac{n}{4}$$

Розв'язок $x^* = (0;1;1;1;...;0;1;1;1)$. $P\left(x^*\right) = 0$

Приклад 3. Сингулярна Функція Бройдена [2, с. 14]

$$P_k(x) = \left(\left(3 - 2x_k\right)x_k - 2x_{k+1} + 1\right)^2 \quad , k = 1,$$

$$P_k(x) = \left(\left(3 - 2x_k\right)x_k - x_{k-1} - 2x_{k+1} + 1\right)^2, \; 1 < k < n,$$

$$P_k(x) = \left(\left(3 - 2x_k\right)x_k - x_{k-1} + 1\right)^2, \quad k = n,$$

$$x^0 = (-1;....-1).$$

Розв'язок $P\left(x^*\right) = 0$.

Приклад 4. Розширена функція Фредейнштейна і Руфа [2, с. 9]

$$P_{2k-1} = x_{2k-1} + \left(\left(5 - x_{2k}\right)x_{2k} - 2\right)x_{2k} - 13,$$

$$P_{2k} = x_{2k-1} + \left(\left(x_{2k} + 1\right)x_{2k} - 14\right)x_{2k} - 29,$$

$$x_0 = (90,60,...,90,60); \; 1 \le k \le \frac{n}{2}.$$

Розв'язок $x^* = \left(5;4;...;5;4\right)$; $P\left(x^*\right) = 0$.

У таблиці подано результати роботи методу для прикладів, де N — розмірність задачі, i — кількість ітерацій затрачених на пошук наближення до розв'язку задачі, k — кількість обчислень вектор-функцію $P(x)$. Обчислення проводились до виконання умови $\left\|x_k - x_{k-1}\right\| \le 10^{-8}$.

Таблиця 1

Номер прикладу	**Метод\N**		**16**	**40**	**60**	**80**	**100**
1	(2)	i	29	30	30	31	31
		k	523	1261	1861	2543	3163
	(3')	i	8	8	9	9	9
		k	235	427	658	838	1018
2	(2)	i	47	48	48	49	49
		k	847	2017	2977	4019	4999
	(3')	i	15	16	16	16	16
		k	455	866	1186	1506	1826

Продовження таблиці 1

3	(2)	i	28	29	29	29	29
		k	505	1219	1799	2379	2959
	(3')	i	8	8	8	8	8
		k	227	427	587	747	907
4	(2)	i	13	13	13	13	13
		k	235	547	807	1067	1327
	(3')	i	8	8	8	8	8
		k	201	393	553	713	873

Висновки. Отже, на підставі виконаних розрахунків та порівнянні отриманих результатів бачимо, що запропонований метод (3) за кількістю ітерацій та за кількістю обчислення вектор функції, збігається швидше та здійснює меншу кількість обчислень ніж метод (2). Практичні дослідження підтверджують теоретичні обґрунтування методу (3).

Наведені результати числових розрахунків дають змогу стверджувати, що швидкість збіжності методу (3) є вищою ніж 2.

Список використаних джерел:

1. Дэннис Дж. мл. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис мл.,. Р. Шнабель. — М. : Мир, 1988. — 434 с.
2. Lukšan L. Test problems for unconstrained optimization / L. Lukšan, J. Vlček // Techn. Rep. V-897. Inst. Comput. Sci. Acad. Sci. Czech Rep. — 2003. — 26 p.
3. Moré J. J. Testing unconstrained optimization software / J. J. Moré, B. S. Garbow, K. E. Hillstrom // ACM Trans. Math. Software. — 1981. — Vol. 7, № 1. — P. 17–41.

In this paper we suggest and analyse tree-step iterative method for solving the system of nonlinear equations. The method is used the idea of building of three-step methods and is based on Newton's method. The theoretical research of the method is proved its convergence and set the rate of convergence. In the practical application the algorithm shows his efficiency, in terms of computation before its basin method on different types of tasks.

Key words: *Newton's method, system of nonlinear equations, rate of convergence.*

Отримано: 27.04.2016