It is proposed a differential evolution algorithm adapted for searching approximate solutions of inconsistent overdetermined systems of transcendental equations with using different norms of residual errors.

Key words: *overdetermined system, transcendental equations, norm of residual error, differential evolution.*

Одержано 01.02.2017

УДК 004.021

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
О. І. Махович,** канд. техн. наук

* Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПІДХІД ДО ВИБОРУ ОПОРНИХ ПЕРЕРІЗІВ В ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОМУ МЕТОДІ РЕДУКЦІЇ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аналізується та оцінюється точність методу опорних перерізів та пропонується методика вибору опорних точок. Шляхом обчислювальних експериментів досліджується вплив кількості опорних точок методу опорних перерізів на абсолютне інтегральне відхилення розв'язків. Сформульовано рекомендації щодо ефективного використання методу опорних перерізів.

Ключові слова: *об'єкти із розподіленими параметрами, метод опорних перерізів, вибір вузлів інтерполяції, інтегральне відхилення.*

Вступ. Диференціальні рівняння із частинними похідними в переважній більшості є основою для існуючих методів і засобів, що використовуються для розв'язування задач моделювання об'єктів з розподіленими параметрами [1, 2]. Цей підхід дозволяє забезпечити високий рівень адекватності та ефективне застосування за відсутності специфічних часових і ресурсних вимог. В задачах моделювання процесів оперативної обробки інформації в технічних системах, зокрема обробки вимірювальних даних чи сигналів керування, присутні суттєві особливості, такі як функціонування систем в реальному часі, наявність зворотних зв'язків, необхідність розробки або вибору спеціалізованих обчислювальних алгоритмів для створення вбудованих програмних засобів тощо. При вирішенні оптимізаційних задач, коли потрібна висока швидкість отримання розв'язків, виникає необхідність у розробці універсальних і, водночас, відносно простих методів числової реалізації моделей динаміки нестаціонарних теплових процесів.

Основна частина. Для задач математичного і комп'ютерного моделювання динаміки об'єктів з розподіленими параметрами при наявності обмежених обчислювальних та часових ресурсів доцільне застосування методу опорних перерізів [3, 4] побудови спрощених математичних моделей динамічних об'єктів шляхом певних апроксимаційних та еквівалентних перетворень базової моделі.

Суть методу полягає у наступному: 1) розв'язок задачі апроксимується інтерполяційним поліномом Лагранжа за опорними точками просторової змінної; 2) значення розв'язку на краях інтервалу визначення просторової змінної обчислюється за допомогою граничних умов; 3) значення розв'язку у внутрішніх опорних точках інтервалу обчислюється за допомогою розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь; 4) маючи розв'язки в опорних перерізах, можна за допомогою побудованого інтерполяційного полінома обчислити наближений розв'язок у довільній точці.

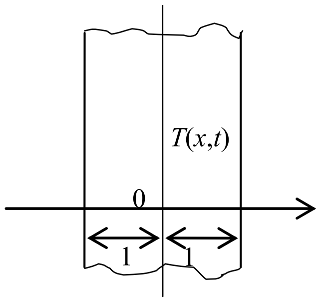

Рис. 1. *Схематичне зображення об'єкта моделювання*

Без обмеження загальності застосування розглянемо метод стосовно широко розповсюджених ОРП теплотехнічного призначення, які описуються рівняннями із частинними похідними параболічного типу. Нехай температура $T(x, t)$ на краях необмеженої пластини (рис. 1) примусово змінюється за законом $F_{гр1}\left(t\right) \equiv T(x,t)\big|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу. Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{ПУ}\left(x\right) \equiv T(x,t)\big|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині. У цьому випадку спрощена модель теплоперенесення описується рівнянням із частинними похідними параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\left(x\right)\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b\left(x\right)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q\left(x\right) f(t),\ -1 \le x \le 1\ , \quad (1)$$

де $b(x) = k'(x)\left[c(x)\rho(x)\right]^{-1}$, $q(x) = \left[c(x)\rho(x)\right]^{-1}$, $a(x) = k(x)\times$ $\times\left[c(x)\rho(x)\right]^{-1}$ — коефіцієнт температуропровідності, $c(x)$ — питома теплоємність, $\rho(x)$ — густина, $k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності, $f(t)$ — внутрішнє джерело тепла, x — просторова координата, t — час. Розв'язок $T(x, t)$ рівняння (1) представляємо як ряд $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ — відомі функції, які мають похідні відповідних порядків по x, а функції $V_n(t)$ — визначаються. Інтерполяційний поліном Лагранжа за трьома точками $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ має вигляд

$$T(x,t) \approx L_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} T(x_i,t) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \; n = 4, \; -1 \le x \le 1, \tag{2}$$

тобто для розв'язку, що має властивість симетрії за просторовими змінними, маємо:

$$\begin{gathered} T(x,t) \approx \left(4x^4 - 5x^2 + 1\right)T(0,t) + 16/3\,x^2\left(1 - x^2\right)T(1/2,t) + \\ + 1/3\,x^2\left(4x^2 - 1\right)F_{\mathit{гр}\boldsymbol{1}}(t), \end{gathered} \tag{3}$$

де $Q_0(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$, $Q_1(x) = 16/3x^2(1 - x^2)$ та $Q_2(x) = 1/3x^2(4x^2 - 1)$ — відомі функції, а $V_0(t) = T(0,t)$ та $V_1(t) = T(1/2,t)$ — невідомі функції, які потрібно визначити. Як функція $V_2(t) = T(0,t) = F_{\mathit{гр}1}(t)$ виступає гранична умова.

Таким чином, розв'язки задачі у двох опорних перерізах $T(0, t)$ та $T(0.5, t)$ дозволяють за виразом (3) знаходити розв'язки у довільних точках.

Для цього апроксимуємо частинні похідні рівняння (1) за просторовою змінною. Продиференціювавши (3) за змінною x, отримуємо вираз для частинної похідної першого порядку

$$\begin{gathered} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \approx 2x\left(8x^2 - 5\right)T(0,t) - 32/3\,x\left(2x^2 - 1\right)T(1/2,t) + \\ + 2/3\,x\left(8x^2 - 1\right)F_{\mathit{гр}1}(t), \end{gathered} \tag{4}$$

звідки отримуємо

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \left(48x^2 - 10\right)T(0,t) - \left(64x^2 - 32/3\right)T(1/2,t) + \\ + \left(16x^2 - 2/3\right)F_{\mathit{гр}1}(t). \end{gathered} \tag{5}$$

Підставивши в (1) отримані вирази, маємо:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \left[48x^2 w_1(x) - 10w_2(x)\right]T(0,t) +$$
$$+\left[-64x^2 w_1(x) + 32/3\, w_2(x)\right]T(1/2,t) + \qquad (6)$$
$$+\left[16x^2 w_1(x) - 2/3\, w_2(x)\right]F_{гр1}(t) + q(x)f(t),$$

де $w_1(x) = a(x) + 1/3\, xb(x)$, $w_2(x) = a(x) + xb(x)$.

Вважаючи в (6) послідовно $x = 0$ та $x = 1/2$, отримаємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення $T(0,t)$ та $T(1/2,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dT(0,t)}{dt} = -10a(0)T(0,t) + 32/3\, a(0)T(1/2,t) - 2/3\, a(0)F_{гр1}(t) + \\ \qquad +q(0)f(t); \\ \dfrac{dT(1/2,t)}{dt} = \left[2a(1/2) - 3b(1/2)\right]T(0,t) - 8/3\left[2a(1/2) - b(1/2)\right]T(1/2,t) + \\ \qquad +1/3\left[10a(1/2) + b(1/2)\right]F_{гр1}(t) + q(1/2)f(t), \end{cases} \qquad (7)$$

де початкові значення $F_{ПУ}(0)$ та $F_{ПУ}(1/2)$ відомі. Розв'язання системи (7), згідно з виразом (3), дає можливість обчислення наближених значень функції $T(x, t)$ в довільній точці x.

Отже, на основі базової моделі (1) отримано спрощену модель у формі задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (7). Розв'язок задачі в довільній точці обчислюється за допомогою виразу (3).

Оцінимо похибку методу, взявши в якості ряду інтерполяційний поліном Лагранжа

$$L_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} T(x_i,t) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \ -1 \le x \le 1.$$

Для цього накладемо наступні умови на функцію $T(x,t)$: будемо вважати, що вона має неперервні похідні за змінною x до порядку n, а похідна n+1 порядку $\dfrac{\partial^{n+1}T(x,t)}{\partial x^{n+1}}$ існує. Тоді відхилення ε функції $T(x,t)$ від $L_n(x,t)$ можна оцінити нерівністю [5]

$$\varepsilon = \left|T(x,t) - L_n(x,t)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\omega(x),$$

де $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\dfrac{\partial^{n+1}T(x,t)}{\partial x^{n+1}}\right|$, а $\omega(x) = \left|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\right|$.

Визначимо умови, за яких це відхилення буде мінімальним. Оскільки величина M_{n+1} залежить лише від властивостей шуканої функції, то змінюючи опорні точки x_i, ми можемо змінювати величину $\omega(x)$, тим самим впливаючи на відхилення ε. Взявши в якості опорних перерізів корені многочлена Чебишева $x_i = \cos\frac{(2i+1)}{2n+2}\pi$, $i=\overline{0,n}$, та беручи до уваги, що многочлен Чебишева має найменше відхилення від нуля, отримаємо

$$\varepsilon = \left|T(x,t) - L_n(x,t)\right| \le \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Тому будь-який інший вибір опорних точок може дати більше значення верхньої границі похибки методу.

Для апробації методу вибору опорних перерізів було проведено ряд обчислювальних експериментів. Моделювався процес теплопровідності для необмеженої однорідної ізотропної пластинки, що описується в безрозмірних змінних рівнянням із частинними похідними $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$, $-1 \le x \le 1$, $0 < t \le 1$; граничні і початкові умови: $T(x,t)\big|_{x=\pm1} = 1$, $T(x,t)\big|_{t=0} = 0$. Розв’язок $T_П(x,t)$, отриманий методом опорних перерізів порівнювався із розв’язком $T_P(x,t)$, отриманим методом скінченних різниць для кроків дискретизації просторової та часової змінної 0,005 і 10^{-5} відповідно. Для отриманих розв’язків знаходилось інтегральне відхилення $\int_0^1 \int_{-1}^1 \left|T_П(x,t) - T_P(x,t)\right| dxdt$ при різній кількості та способах вибору опорних точок x_i, $i=\overline{0,n}$, які обиралися трьома способами: корені многочлена Чебишева $x_i = \cos\frac{(2i+1)}{2n+2}\pi$, рівномірний розподіл $x_i = -1 + \frac{2}{n} i$ та точки максимуму многочлена Чебишева $x_i = \cos\frac{i}{n}\pi$. Для моделювання використовувалось від 5 до 15 опорних перерізів. Результати обчислювальних експериментів наведені в таблиці.

Таблиця

Абсолютне інтегральне відхилення розв'язків, отриманих методом опорних перерізів та методом скінченних різниць

Кількість опорних точок	**Корені многочлена Чебишева**	**Точки максимуму многочлена Чебишева**	**Рівномірний розподіл**
5	$9{,}1\cdot10^{-03}$	$7{,}1\cdot10^{-03}$	$1{,}27\cdot10^{-02}$
7	$1{,}7\cdot10^{-03}$	$1{,}7\cdot10^{-03}$	$3{,}5\cdot10^{-03}$
9	$6{,}34\cdot10^{-04}$	$6{,}03\cdot10^{-04}$	$1{,}6\cdot10^{-03}$
11	$3{,}31\cdot10^{-04}$	$3{,}04\cdot10^{-04}$	$9{,}13\cdot10^{-04}$
13	$1{,}49\cdot10^{-04}$	$1{,}98\cdot10^{-04}$	$5{,}79\cdot10^{-04}$
15	Порушення стійкості обчислювального процесу	$1{,}36\cdot10^{-04}$	$4{,}24\cdot10^{-04}$

Аналізуючи результати проведених обчислювальних експериментів, можна помітити, що спеціальний вибір опорних точок (корені, або в деяких випадках точки максимуму многочлена Чебишева) у порівнянні із рівномірним розподілом по області визначення просторової змінної, дозволяє підвищити адекватність математичної моделі. Наприклад, у випадку інтерполяції за 13 опорними точками інтегральне відхилення розв'язків для випадку рівномірного розподілу опорних точок становить $5{,}79\cdot10^{-04}$, а у випадку вибору як опорні точки коренів многочлена Чебишева — $1{,}49\cdot10^{-04}$. Схожа перевага спеціального вибору опорних точок зберігається і для інших випадків.

Результати проведених обчислювальних експериментів показали, що із ростом кількості опорних точок інтегральне відхилення зменшується (рис. 2).

Рис. 2. *Абсолютне інтегральне відхилення розв'язків в залежності від різної кількості опорних точок*

Висновки. Викладений аналіз — основа методу оцінки точності і методики вибору опорних перерізів. Завдяки вдалому вибору опорних точок можна підвищити точність числової реалізації або в деяких випадках знизити порядок інтерполяційного полінома при збереженні необхідної точності моделювання.

Список використаних джерел:

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС. 2003. 784 с.
2. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами: справочное пособие. М.: Наука. 1979. 224 с.
3. Верлань А. А., Махович А. И. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, КПНУ ім. Івана Огієнка; Кам'янець-Подільський: КПНУ ім. Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 42–54.
4. Федорчук В. А., Махович О. І. Дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: технічні науки: зб. наук. праць. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, КПНУ ім. Івана Огієнка; Кам'янець-Подільський: КПНУ ім. Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 182–191.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1. 1966. 632 с.

The accuracy of the method of supporting sections and the technique of selecting control points are analyzed and evaluated. The influence of the number of control points of the method of supporting sections on absolute deviation integral solutions is investigated with the help of computational experiments. Recommendations for the effective use of the method of supporting sections are given.

Key words: *objects with distributed parameters, method of supporting sections, the choice of interpolation nodes, integral deviation.*

Одержано 01.02.2017