4. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навч. посібник, 2-ге вид. перероб. Київ: ВПЦ «Київський університет». 2012. 799 с.
5. Maurer H. First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control. *Math. Programming Study*, 14. 1981. P. 163–177.

This paper summarizes macromodels of V. M. Glushkov on a case of algebraic-integral-differential equations with partial derivatives and develop methods of asymptotic-solve operators for constructing generalized solutions using accelerated interior point algorithms.

Key words: *control processes, optimal control, dynamic development models, solving operators, generalized solutions.*

Одержано 23.02.2017

УДК 621.395.4 (045)

А. Я. Белецкий, д-р техн. наук, профессор

Национальный авиационный университет, г. Киев

УОЛША-ПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ СЕКВЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Предложен алгоритм построения систем дискретных Уолша-подобных (0, 1)-секвентных функций (базисов), в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в классических системах функций Уолша. Обсуждаются области применения систем секвентных функций.

Ключевые слова: *системы секвентных функций, метод направленного перебора.*

Введение. Теория и техника спектрального анализа сигналов ориентирована в основном на сигналы синусоидальных функций. Наряду с ними широкое применение в различных приложениях находят функции (волны) несинусоидальных форм. Типичным примером несинусоидальных волн являются функции Уолша [1], отличительная особенность которых состоит в том, что в пространстве оригиналов на двоично степенном интервале определения от 0 до $N = 2^n$, где n — натуральное число, функции Уолша принимают кусочно-постоянные значения $+1$ или -1, заменой которых соответственно числами 0 и 1 переводят системы в пространство изображений.

Спектральный анализ дискретных сигналов в большинстве случаев строится на основе базисов *дискретных экспоненциальных функций*, образуемых временной дискретизацией комплексно-значных гармонических сигналов. Известно, что к базисам быстрого преобразования Фурье (БПФ), предъявляются ряд требований, важнейшие из которых состоят в том, что, во-первых, формы базисных функций преобразования должны быть максимально близкими к формам анализируемых сигналов. И, во-вторых, базисы должны поддерживать такое быстродействие процессоров БПФ, которое обеспечивает обработку сигналов в реальном времени.

Таким образом, выбор систем базисных функций определяется требованиями удобства вычислений и, в конечном счёте, трудоёмкостью алгоритмов реализации искомого преобразования. Исходя из этих соображений, применение вещественных базисов систем функций Уолша и их расширения — *Уолша-подобных систем секвентных функций*, представляется актуальным и перспективным для цифровой (спектральной) обработки сигналов.

К Уолша-подобным в пространстве изображений будем относить такие $(0, 1)$ — секвентные функции, в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в изображениях функций Уолша (за исключением функции, левая половина которой заполнена исключительно нулями, а правая — единицами).

Изложение основного материала. Сформируем полное множество Ω секвентных функций $s_i \in \Omega$ восьмого порядка, выбранного в качестве примера, включая в состав Ω нулевуюсеквенту s_0 и все те секвенты (байты), которые начинаются с нуля, а в оставшихся младших семи разрядах размещаются четыре единицы и три нуля. Число ненулевых секвент восьмого порядка составляет 35, так как определяется числом сочетаний из 7 по 3 и, следовательно, полный набор элементов Ω содержит 36 секвент s_i, $i = \overline{0, 35}$, (табл. 1).

Таблица 1

Совокупность секвентных функций восьмого порядка

№ s_i	Номер разряда функции								№ s_i	Номер разряда функции							
	7	6	5	4	3	2	1	0		7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	19	0	0	1	1	1	0	0	1
2	0	1	1	1	0	1	0	0	20	0	1	1	0	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	1	0	0	21	0	1	0	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	1	1	0	0	22	0	0	1	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	1	1	0	0	23	0	1	0	0	1	1	0	1
6	0	1	1	1	0	0	1	0	24	0	0	1	0	1	1	0	1
7	0	1	1	0	1	0	1	0	25	0	0	0	1	1	1	0	1
8	0	1	0	1	1	0	1	0	26	0	1	1	0	0	0	1	1

Продолжение таблицы 1

9	0	0	1	1	1	0	1	0	27	0	1	0	1	0	0	1	1
10	0	1	1	0	0	1	1	0	28	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	1	0	29	0	1	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	1	1	0	30	0	0	1	0	1	0	1	1
13	0	1	0	0	1	1	1	0	31	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	1	0	1	1	1	0	32	0	1	0	0	0	1	1	1
15	0	0	0	1	1	1	1	0	33	0	0	1	0	0	1	1	1
16	0	1	1	1	0	0	0	1	34	0	0	0	1	0	1	1	1
17	0	1	1	0	1	0	0	1	35	0	0	0	0	1	1	1	1

Каждую ненулевую секвенту обозначим $\widehat{s}_k$, $k = \overline{1, 35}$, отстоящую от секвенты s_0 на расстоянии Хэмминга $d = N/2$ и для принятого порядка $N = 8$ это расстояние равно четырем. Назовем $\widehat{s}_k$ *образующей секвентой* множества Ω_k. В состав каждого множества Ω_k кроме пары s_0 и $\widehat{s}_k$ входят все те секвенты s_i из табл. 1, которые отстоят от $\widehat{s}_k$ на расстоянии $d(\widehat{s}_k, s_i) = 4$. Неполный набор множеств Ω_k с выделенным затенением элементов $s_i \in \Omega_k$ приведен в табл. 2.

Таблица 2

Компоненты множеств Ω_k

№ s_i	**№ k множеств Ω_k и образующих секвент $\widehat{s}_k$**															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**		**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**
	$\Omega^{[1]}$					$\Omega^{[2]}$				$\Omega^{[9]}$			$\Omega^{[10]}$			
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																

Продолжение таблицы 2

17		■		■	■	■		■				■	■	■		■
18		■	■		■	■	■				■		■		■	■
19		■	■	■		■	■	■		■				■	■	■
20	■			■	■	■	■			■	■				■	■
21	■		■		■	■		■		■		■		■		■
22	■		■	■		■					■	■	■			■
23	■	■			■		■	■			■	■		■	■	
24	■	■		■			■			■		■	■		■	
25	■	■	■					■		■	■		■	■		
26	■	■	■					■				■			■	
27	■	■		■			■				■			■		
28	■	■			■		■	■		■			■			
29	■		■	■		■								■	■	
30	■		■		■	■		■					■		■	
31	■			■	■	■	■						■	■		
32		■	■	■		■	■	■			■	■				
33		■	■		■	■	■			■		■				
34		■		■	■	■		■		■	■					
35			■	■	■		■	■								

Обратим внимание на такие особенности табл. 2. Во-первых, будучи дополненной отсутствующими образующими секвентами $\widehat{s}_k$, табл. 2 становится симметричной относительно главной диагонали. Во-вторых, каждый столбец таблицы кроме образующей секвенты $\widehat{s}_k$ (светлого диагонального элемента, выделенного жирной рамкой) включает 18 секвент s_i, отстоящих от образующего элемента $\widehat{s}_k$ на расстоянии Хэмминга, равном четырем. Нулевая секвента s_0 для компактности из табл. 2 исключена. И, наконец, в-третьих, полная совокупность столбцов табл. 2 (множеств Ω_k) разбито на 10 непересекающихся подмножеств $\Omega^{[l]}$, $l=\overline{1,10}$, причем l-те подмножество включает подряд стоящие столбцы, содержащие одинаковое число n_l секвент, расположенных сверху (или слева), образующей секвенты $\widehat{s}_k$. Например, подмножество $\Omega^{[1]}$ порождается секвентами $\widehat{s}_k$, $k=\overline{1,5}$, при этом $n_1=1$ (единственная секвента, которая находится над (слева) $\widehat{s}_k$, является нулевая секвента s_0); второе подмножество $\Omega^{[2]}$ формируют секвенты $\widehat{s}_k$, $k=\overline{6,9}$, для которых $n_2=4$ и т. д. Сведения о подмножествах $\Omega^{[l]}$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Количественные характеристики подмножеств $\Omega^{[l]}$

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ $\widehat{s}_k$	1-5	6-9	10-12	13-15	16-19	20-22	23-25	26-28	29-31	32-35
n_l	1	4	6	10	10	12	13	16	17	19

Как показали результаты анализа, все 35 множеств Ω_k, каждое из которых содержит 20 секвент s_i, образуют по шесть полных групп $G_{k,j}$, $j=\overline{1,6}$, в состав которых входят по восемь эквидистантных секвент s_i и в их числе — нулевая s_0 и образующая секвента $\widehat{s}_k$. Введем для совокупностей (множеств) этих шестерок групп восьмого порядка обозначение SF_k (***S****equence* ***F****ull*), полагая

$$SF_k = \bigcup_{j=1}^{6} G_{k,j}.$$

В табл. 4 показаны выделенные затенением секвенты s_i, которые входят в полные группы $G_{k,j}$, $k=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,6}$, множеств SF_k подмножества $\Omega^{[1]}$.

30 групп $G_{k,j}$, $k=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,6}$, табл. 4 составляют *полный набор* групп секвентных эквидистантных байт-функций. Это означает, в частности, что группа функций, образуемая какой угодно секвентой $\widehat{s}_m$, $6 \le m \le 35$, поглощается одной из групп $G_{k,j}$ подмножества $\Omega^{[1]}$.

В приложениях зачастую интересными могут оказаться не сами по себе полные системы (группы) эквидистантных секвентных функций $G_{k,j}$, а их некоторые упорядочения, такие, например, как системы функций Уолша, образующие симметричные базисы, используемые для спектрального представления сигналов или решения других задач обработки дискретных сигналов.

Далее обсуждается задача построения (синтеза) симметричных базисов на основе полной совокупности эквидистантных секвент s_i, образующих группы $G_{k,j}$, исходная последовательность которых (секвент s_i) совсем не обязательно представима в виде симметричной матрицы.

Таблица 4

Состав групп $G_{k,j}$, формируемых образующими секвентами подмножества $\Omega^{[1]}$

Груп-па	Секвенты групп																			
$G_{1,j}$	0	1	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$G_{2,j}$	0	2	7	8	9	13	14	15	17	18	19	23	24	25	26	27	28	32	33	34
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$G_{3,j}$	0	3	6	8	9	11	12	15	16	18	19	21	22	25	26	29	30	32	33	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$G_{4,j}$	0	4	6	7	9	10	12	14	16	17	19	20	22	24	27	29	31	32	34	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$G_{5,j}$	0	5	6	7	8	10	11	13	16	17	18	20	21	23	28	30	31	33	34	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				

Возможны различные подходы к решению поставленной задачи. Конструктивным способом синтеза симметричных базисов является *метод направленного перебора* [2], суть которого кратко поясним на примере синтеза симметричных систем (матриц) секвентных функций восьмого порядка, выбрав из табл. 4 в качестве исходного набора секвент полную группу

$$G_{1,1} = \{s_0, \widehat{s}_1, s_{10}, s_{15}, s_{21}, s_{24}, s_{28}, s_{29}\} . \qquad (1)$$

В любом симметричном базисе (матрице) секвентных функций в пространстве изображений, обозначим ее (матрицу) S_i, $i = 1, 2, \dots$, верхняя строчка матрицы преобразования (базиса) состоит из одних нулей и не может быть переставлена ни на какую другую строчку, так как это приводит к потере симметричности матриц S_i. В следующей (первой) строке матрицы S_i может находиться любая из оставшихся базисных функций. Пусть в качестве базисной функция первого порядка выбрана секвента $\widehat{s}_1$, в результате чего получим первые две строчки и два столбца матрицы S_i. Возможности выбора очередной (второй) строки ограничены условием сохранения симметричности матрицы S_i. Для того чтобы это условие соблюсти, из оставшихся базисных функций (1) нужно выбрать только такие, начальные элементы которых совпадают с начальными элементами второй строки, образованной двумя левыми столбцами матрицы S_i.

Выполняя указанным способом процедуру синтеза, приходим (как и для классических систем функций Уолша) к полному набору, состоящему из 28 перестановок секвент s_i группы $G_{1,1}$ (табл. 5), каждая из которых (перестановок базисных функций) порождает симметричную систему (базис) секвентных функций.

Таблица 5

Перестановки секвент множества $SF_{1,1}$,
порождающие симметричные базисы

Номер базиса	Номер секвенты								Номер базиса	Номер секвенты							
1	0	1	10	21	29	28	24	15	15	0	21	24	29	28	10	15	1
2	0	1	10	29	21	24	28	15	16	0	21	28	1	15	29	24	10
3	0	1	21	10	29	28	15	24	17	0	24	1	28	10	29	15	21
4	0	1	29	21	10	15	24	28	18	0	24	10	15	21	1	28	29
5	0	10	1	24	28	21	29	15	19	0	24	21	28	29	10	15	1
6	0	10	1	28	24	29	21	15	20	0	24	29	15	1	21	28	10
7	0	10	21	24	15	1	29	28	21	0	28	1	10	24	15	21	29
8	0	10	29	15	28	21	1	24	22	0	28	10	29	15	24	1	21
9	0	15	24	21	10	1	29	28	23	0	28	21	1	15	24	29	10
10	0	15	24	29	1	10	21	28	24	0	28	29	21	24	15	10	1
11	0	15	28	1	21	29	10	24	25	0	29	15	24	1	28	10	21
12	0	15	28	10	29	21	1	24	26	0	29	15	28	10	24	1	21
13	0	21	15	1	28	10	24	29	27	0	29	24	15	1	28	21	10
14	0	21	15	10	24	1	28	29	28	0	29	28	24	21	15	10	1

Выводы. Простота технологии синтеза Уолша-подобных симметричных систем (базисов) секвентных функций, высокие скорости спектральной обработки сигналов, обеспечиваемые предлагаемыми базисами, открывают разрабатываемым системам секвентных функций широкую перспективу применения в различных направлениях науки и техники как для целей спектрального анализа дискретных сигналов, так и криптографической защиты информации.

Список использованной литературы:

1. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
2. Білецький А. Я., Білецький О. А., Кучер О. Г. Синтез симетричних матриць Уолша по методу спрямованої перестановки базисних функцій. *Вісник НАУ*. Київ. 2001. № 3. С. 141–146.

An algorithm for constructing discrete Walsh-like (0, 1)-sequention functions, in which the number of ones and zeros in each half of the interval determination is not necessarily the same, as is the case in conventional systems Walsh functions. We discuss the application of the system of sequention functions.

Key words: *systems of sequention function, directed search.*

Получено 30.01.2017

УДК 519.615:004.023

Л. П. Вакал*, канд. техн. наук,
Є. С. Вакал,** канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ,
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНОЇ СИСТЕМИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Представлено алгоритм диференціальної еволюції, адаптований для знаходження наближених розв'язків несумісних перевизначених систем трансцендентних рівнянь з використанням різних норм нев'язок.

Ключові слова: *перевизначена система, трансцендентні рівняння, норма нев'язки, диференціальна еволюція.*

Вступ. При розв'язанні широкого кола задач, пов'язаних з обробкою даних вимірювань, наприклад в радіофізиці, радіоастрономії, сейсморозвідці тощо, потрібно знайти розв'язок перевизначеної системи m трансцендентних рівнянь з n невідомими ($m > n$)

