

ванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. С. Климяк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво : зб. наук. праць. — Рівне : НУВГП, 2009. — Вип. 34. — С. 252–261.

The algorithm for numerical construction of spatial filtration fields in multilayer filters with a piecewise-homogeneous porous loadings, which are doubly connected domains, bounded by two equipotential surfaces and two surfaces of current, separated by some specified equipotential surfaces into few subdomains, which are characterized by different constant coefficients of filtration, is developed. The results of numerical calculations are presented and carried out their analysis.

**Key words:** *filtration field, algorithm, filter, porous loading.*

Отримано: 4.03.2015

УДК 004.94

**Н. Л. Костьян\***, старший преподаватель,

**С. Ю. Протасов\*\***, канд. техн. наук

\*Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев,

\*\*Черкасский государственный технологический университет,  
г. Черкассы

## **АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Рассматриваются задачи идентификации динамических объектов с запаздыванием. Задачи решаются методом моментов, в результате чего определяются параметры передаточной функции объекта. Качество разработанных программных средств, реализующих данный метод, исследуется при помощи вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** *идентификация, моделирование, динамические системы с запаздыванием, Matlab.*

**Введение.** Существует множество динамических объектов практически во всех отраслях науки, техники и промышленности, статические и динамические свойства которых изменяются неконтролируемым образом, а априорные сведения об этих изменениях и о самих физических, математических и расчетных моделях «объект — внешняя среда» только в определенной степени соответствуют действительности. В этих случаях практический результат управления не соответствует моделируемому или является совершенно непригодным. Возникает потребность в методах управления, учитывающих наличие априорной и текущей неопределенности. При этом адаптивные методы и соответствующие технические

средства должны гарантировать желаемое качество процесса управления и инвариантность регулируемых переменных, критериев качества или других характеристик системы управления с учетом объективно существующих неконтролируемых изменений статических и динамических свойств объекта и воздействий внешней среды при априорной неопределенности расчетной модели «объект — внешняя среда».

**Анализ последних исследований и публикаций.** Проблеме идентификации динамических характеристик объектов с запаздыванием посвящен ряд работ [1–5]. Для оценки запаздывания используются поисковые методы [2]. Оценка запаздывания основана на аппроксимации импульсных характеристик системой ортогональных функций [3; 5]. В работе [3] запаздывание аппроксимируется функциями Лагерра. В работах [1; 4; 5] для оценки запаздывания используется метод моментов. Алгоритмы оценки параметров простейших типовых объектов с запаздыванием рассматриваются в работе [4]. На основе метода моментов в работе [5] строится алгоритм определения параметров линейной системы с запаздыванием, когда импульсная характеристика системы может быть точно аппроксимирована функциями Лагерра. Метод оценки параметров нелинейных систем одного класса с запаздыванием предлагается в работе [1].

Приведенный в настоящей работе алгоритм основан на методе моментов, причем в качестве моментных функций используются функции вида  $\varphi_{\alpha k} k(t) = t^k e^{-\alpha t}$ . Метод достаточно прост и, в отличие от метода, предложенного в работе [5], позволяет принципиально точно определить истинное запаздывание. Идея метода основана на результатах работы [1].

**Изложение основного материала.** Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$y(t) = \int_0^{\infty} \omega(u - \tau_{об}) x(t - u + \tau_{об}) du, \quad (1)$$

где  $x(t), y(t)$  — входной и выходной сигналы объекта;  $\omega(t)$  — импульсная характеристика объекта;  $\tau_{об}$  — запаздывание объекта.

Передаточную функцию модели будем искать в виде

$$W_M(p) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} e^{-\tau_M p}, \quad (2)$$

где  $a_k, b_k$  — постоянные коэффициенты передаточной функции;  $\tau_M$  — запаздывание модели.

Рассмотрим две задачи идентификации, связанные с моделью (2). Первая: объект имеет сложную структуру, высокий порядок и большое число неизвестных параметров. Динамические свойства объекта аппроксимируются моделью (2) пониженного порядка с запаздыванием. При такой постановке задачи идентификации структура объекта может быть произвольной, содержать трансцендентные звенья. Вторая: структуры модели и объекта совпадают и имеют вид (2). Задача идентификации заключается в определении порядка передаточной функции объекта  $W_{o\bar{o}}(p)$  и ее параметров.

Обе задачи решаются методом моментов. Суть метода заключается в следующем. По экспериментальным данным входа и выхода объекта вычисляются моменты  $\mu_{\alpha k}^{o\bar{o}}$  импульсной характеристики объекта  $\omega_{o\bar{o}}(t)$ :

$$\mu_{\alpha k}^{o\bar{o}} = \frac{(-1)^k}{K!} \int_0^{\infty} \omega_{o\bar{o}}(t) \varphi_{\alpha k}(t) dt = \frac{1}{K!} \frac{d^k}{dp^k} W_{o\bar{o}}(p)_{\alpha=p}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{\alpha k}(t) = t^k e^{-\alpha t}$  — взвешенные моментные функции. Моменты  $\mu_{\alpha k}^{o\bar{o}}$  являются коэффициентами разложения  $W_{o\bar{o}}(p)$  в ряд Тейлора в точке  $P = \alpha$ :

$$W_{o\bar{o}}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{\alpha k}^{o\bar{o}} (p - \alpha)^k. \quad (4)$$

Аналогичное разложение можно записать и для  $W_M(p)$ :

$$W_M(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{\alpha k}^M (p - \alpha)^k. \quad (5)$$

Параметры модели выбираются так, чтобы некоторые числа моментов модели и объекта были равны между собой:

$$\mu_{\alpha k}^{o\bar{o}} = \mu_{\alpha k}^M, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (6)$$

Это условие обеспечивает близость динамических характеристик объекта и модели и зависит от параметра  $\alpha$ . В дальнейшем вместо  $\mu_{\alpha k}^M$  и  $\mu_{\alpha k}^{o\bar{o}}$  будем писать  $\mu_k$ .

*Уравнения связи моментов с параметрами модели.* Рассмотрим уравнение (5). Переходя к новой переменной  $s = p - \alpha$ , из уравнения (5) получаем:

$$W_M(p) = \frac{B(p)e^{-\tau p}}{A(p)} = \frac{B(s + \alpha)e^{-\alpha\tau} e^{-s\tau}}{A(s + \alpha)}. \quad (7)$$

Преобразуем выражения для  $A(p)$ , используя формулу бинома Ньютона:

$$A(p) = \sum_{l=0}^n a_l (s + \alpha)^l = \sum_{l=0}^n a_l \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} s^i \alpha^{l-i}, \quad (8)$$

где  $\binom{l}{i}$  — число сочетаний из  $l$  по  $i$ . Изменив в выражении (8) порядок суммирования, получим

$$A(s) = \sum_{l=0}^n s^l \sum_{i=l}^n \binom{l}{i} a_l \alpha^{l-i}. \quad (9)$$

Аналогично находим выражение для  $B(s)e^{-\alpha\tau}$ :

$$B(s)e^{-\alpha\tau} = \sum_{l=0}^m s^l e^{-\alpha\tau} \sum_{i=l}^m \binom{l}{i} b_l \alpha^{l-i}. \quad (10)$$

Подставляя уравнения (9), (10) в выражение (7), получаем

$$W_M(s) = \frac{\sum_{i=0}^m d_i s^i}{\sum_{i=0}^n C_i s^i} e^{-\tau s} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k s^k, \quad (11)$$

где

$$C_i = \sum_{l=i}^m \binom{l}{i} a_l \alpha^{l-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

$$d_i = e^{-\alpha\tau} \sum_{l=i}^m \binom{l}{i} b_l \alpha^{l-i}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (12)$$

Заметим, что при  $\tau = 0$  из выражения (12) следуют равенства  $C_i = a_i, d_i = b_i$ . Разложим  $e^{-s\tau}$  из выражения (11) в ряд Тейлора по степеням  $s$ :

$$\sum_{i=0}^m d_i s^i / \sum_{i=0}^{\infty} s^k (-\tau)^k / K! = \sum_{i=0}^n C_i s^i \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k s^k. \quad (13)$$

Приравнивая в уравнении (13) члены при одинаковых степенях  $s$ , находим связь между моментами  $\mu_k$  и параметрами передаточной функции:

$$\sum_{i=0}^k d_i (-\tau)^{k-i} / (k-i)! = \sum_{i=0}^k C_i \mu_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Уравнения (14) позволяют по известным моментам определить коэффициенты  $C_i, d_i$  по которым из условий (12) легко определяются параметры передаточной функции модели:

$$a_i = \sum_{l=i}^n \binom{l}{i} (-\alpha)^{l-i} C_l, i = \overline{0, n};$$

$$b_i = e^{\alpha\tau} \sum_{l=i}^m \binom{l}{i} (-\alpha)^{l-i} d_l, i = \overline{0, m}. \quad (15)$$

С помощью уравнений (14) по известным параметрам передаточной функции можно вычислить моменты импульсной характеристики:

$$\mu_k = \left( \sum_{i=0}^k C_i \mu_{k-i} + \sum_{i=0}^k d_{k-i} (-\tau)^i / i! \right) C_0, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где  $C_i$ ,  $d_i$  определяются выражениями (12).

Запишем системы (14) и (15) для частного случая:

$$W(p) = \frac{(b_1 p + b_0) e^{-\tau p}}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, m = 1, n = 2; d_0 - \mu_0 C_0 = 0; \quad (17)$$

$$-\tau d_0 + d_1 - \mu_1 C_0 - \mu_0 C_1 = 0;$$

$$\frac{\tau^2}{2!} d_0 - \tau d_1 - \mu_2 C_0 - \mu_1 C_1 - \mu_0 C_2 = 0;$$

$$-\frac{\tau^3}{3!} d_0 + \frac{\tau^2}{2!} d_1 - \mu_3 C_0 - \mu_2 C_1 - \mu_1 C_2 = 0;$$

$$\frac{\tau^4}{4!} d_0 - \frac{\tau^3}{3!} d_1 - \mu_4 C_0 - \mu_3 C_1 - \mu_2 C_2 = 0;$$

$$b_i = e^{\alpha\tau} (d_0 - \alpha d_1), b_1 = d_1;$$

$$a_0 = C_0 - \alpha C_1 + \alpha^2 C_2; a_1 = C_1 - 2\alpha C_2; a_2 = C_2.$$

Рассмотрим алгоритм оценки параметров модели пониженного порядка с запаздыванием. Параметры модели выберем из условия (6). Предполагаем, что моменты объекта определены экспериментально или вычислены по формулам (12), (16) при известной  $W_{об}(p)$ . Зададимся значениями  $m$  и  $n$  модели (2) ( $m \leq n$ ). Тогда для определения неизвестных параметров модели необходимо  $r = m + n + 2$  уравнений системы (14) (принимая  $d_0 = 1$ ).

Запишем систему (14) в матричной форме:

$$(T; M) \begin{pmatrix} \bar{d} \\ C \end{pmatrix} = 0, \quad (18)$$

где

$$T = \left\| \frac{(-\tau)^{i-k}}{(i-k)!} \right\|, i = \overline{1, r}; k = \overline{1, m+1}; k \leq j;$$

$$M = -\mu_{i-k}; i = \overline{1, r}; k = \overline{1, n+1}; k \leq j, \quad (19)$$

$$\overline{d^T} = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}, \quad \overline{C^T} = \{C_0, C_1, \dots, C_n\}.$$

Для того чтобы система (18) имела решение, необходимо равенство нулю ее определителя:

$$\Delta_{n,m} = \|T; M\| = 0. \quad (20)$$

Вскрывая определитель, получаем полином

$$\delta_q \tau^q + \delta_{q-1} \tau^{q-1} + \dots + \delta_1 \tau + \delta_0 = 0, \quad (21)$$

где  $q$  — максимальная степень полинома,  $q = (m+1)(n+1)$ .

Минимальный корень полинома (21), как правило, будет определять запаздывание  $\tau_M$  модели, остальные корни приводят к неустойчивой модели. Если положительных корней нет или минимальный положительный корень приводит к неустойчивой модели, необходимо изменить порядок модели. При известном запаздывании  $\tau_M$  параметры модели  $a_i, b_i$  (определяются решением систем (14), (15)).

Рассмотрим частные случаи формирования расширенного определителя (20).

*Случай 1.*

$$m = 0, \quad n = 1, \quad W_M(p) = \frac{b_0 e^{-\tau_m p}}{a_1 p + a_0},$$

$$\Delta_{1,0} = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_0 & 0 \\ -\tau & -\mu_1 & -\mu_0 \\ \frac{\tau^2}{2} & -\mu_2 & -\mu_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

$$\Delta_{1,0} = \frac{1}{2} \mu_0 \tau^2 + \mu_0 \mu_1 \tau + \mu_1^2 - \mu_0 \mu_2,$$

*Случай 2.*

$$m = 0, \quad n = 2, \quad W_M(p) = \frac{b_0 e^{-\tau_m p}}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$$\Delta_{2,0} = \frac{1}{6} \mu_0^3 \tau^3 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \mu_1 \tau^2 + \mu_0 (\mu_1^2 - \mu_0 \mu_2) \tau + \mu_1^3 - 2 \mu_0 \mu_1 \mu_2 + \mu_0^2 \mu_3. \quad (23)$$

Выражения для  $\Delta_{n,m}$  легко определяются лишь для небольших значений  $m$  и  $n$ . В общем случае эта задача сводится к вычислению полиномиального определителя.

Рассмотрим метод раскрытия определителя (20) с использованием его специфической структуры. В соответствии с теоремой Лапласа разложим определитель (20) по первым  $(m + 1)$  столбцам:

$$\Delta_{n,m} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} -1^{S_i} T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} + M_{\overline{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}}, \quad (24)$$

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = \left\| \alpha_{i_k j_k} \right\| = \left\| \frac{(-\tau)^{i_k - j_k}}{(i_k - j_k)!} \right\|, k, j = \overline{1, m+1}; \quad (25)$$

минор матрицы  $T$ , образованный из строк с номерами  $i_1 i_2 \dots i_{m+1}, i_k \geq j_k$ ,  $M_{\overline{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}}$  — соответствующий дополнительный минор;  $S_i = \sum_{k=1}^{m+1} i_k + k$ ,  $\{i_1 i_2 \dots i_{m+1}\} \in \{1, 2, \dots, m+n+2\}$  — множество сочетаний,  $Q = C_{m+n+2}^{m+1}$  элементов.

По определению минор  $T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}$  можно вычислить следующим образом

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_{m+1}} \varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \alpha_{i_k j_k}, \quad (26)$$

где  $\varepsilon_i$  определяется четностью соответствующей подстановки.

Произведение  $\varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \alpha_{i_k j_k}$  в уравнении (26) или равно нулю, если  $(i_k < j_k)$  хотя бы для одного  $k$ , или определялся выражением

$$\varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \alpha_{i_k j_k} = \varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \frac{(-\tau)^{i_k - j_k}}{(i_k - j_k)!} = \varepsilon_i (-\tau)^{\sum_{k=1}^{m+1} (i_k - j_k)} \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(i_k - j_k)!}, \quad i_k \geq j_k. \quad (27)$$

Формула (27) преобразуется следующим образом:

$$\varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \alpha_{i_k j_k} = \varepsilon_i (-1)^{d_i} \tau^{d_i} \prod_{k=1}^{m+1} \beta_{i_k j_k}, \quad (28)$$

$$d_i = \sum_{k=1}^{m+1} (i_k - k) = \sum_{k=1}^{m+1} (i_k - j_k),$$

$$\beta_{i_k j_k} = \frac{1}{(i_k - j_k)!}, \quad i_k \geq j_k. \quad (29)$$

Доопределим  $\beta_{i_k j_k}$  следующим образом:

$$\beta_{i_k j_k} = \begin{cases} \frac{1}{(i_k - j_k)!}, & i_k \geq j_k, \\ 0, & i_k < j_k, \end{cases} \quad (30)$$

Тогда из формулы (28) можно найти значение произведения и при наличии нулевых сомножителей ( $\alpha_{i_k j_k} = 0, i_k < j_k$ ). Подставляя теперь выражение (28) в уравнение (26) и вынося  $\tau^{d_i}$  за знак суммы, получаем

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = (-1)^{d_i} \tau^{d_i} \sum_{j_1 j_2 \dots j_{m+1}} \varepsilon_i \prod_{k=1}^{m+1} \beta_{i_k j_k}. \quad (31)$$

Сопоставляя формулы (31) и (26), можно записать, что

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} = (-1)^{d_i} \tau^{d_i} B_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}, \quad (32)$$

где  $B_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}$  — минор с элементами, определяемыми формулой (30). Подставляя выражение (32) в формулу (25) и учитывая, что  $(-1)^s \times (-1)^{d_i} = 1$  получаем

$$\Delta_{n,m} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} \tau^{d_i} B_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} + M_{\overline{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}}. \quad (33)$$

Таким образом, вычисление полиномиального определителя (20) сводится к расчету  $2C_{(m+n+2)}^{(m+1)}$  числовых определителей  $(m + 1)$  и  $(n + 1)$ -го порядков. Окончательное выражение для коэффициентов полинома (33) можно получить после приведения подобных членов.

Рассмотрим алгоритм оценки истинного запаздывания и порядка модели. Считаем, что структуры модели и объекта совпадают и имеют вид (2). Зададимся значениями  $n$  и  $m$  модели так, чтобы  $n > n_{об}$ ,  $m > m_{об}$ . При таких условиях один из корней определителя системы (18) является истинным запаздыванием. Так как система (18) совместна, то должен быть равен нулю и определитель  $\Delta_{n+k, m+k}$  для всех  $k > 0$  и, в частности, для  $k = 1$ :

$$\Delta_{n+k, m+k} = 0. \quad (34)$$

Поэтому истинное запаздывание является общим корнем системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} &= 0, \\ \Delta_{n+1, m+1} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Минимальные значения  $n$  и  $m$ , при которых система (35) имеет общие корни, очевидно, равны значениям  $n_{об}$  и  $m_{об}$  объекта.

Рассмотрим более простой алгоритм оценки запаздывания. Запишем  $m + n + 2$  уравнений системы (14), начиная со второго уравнения:

$$\sum_{i=0}^k d_i (-\tau)^{k-i} / (k-i)! = \sum_{i=0}^k C_i \mu_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots, r+1. \quad (36)$$

При  $n > n_{об}$ ,  $m > m_{об}$  значение для системы (36) равно нулю ее расширенный определитель  $\overline{\Delta}_{n,m}$



$$\bar{\Delta}_{n,m} = |T_1; M_1| = 0, \quad (37)$$

$$T_1 = \frac{(-\tau)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} = \tau \frac{(-\tau)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}, i = \overline{1, r+1}; j = \overline{1, m+1}; i \geq j,$$

$$M_1 = \|\mu_{i-j+1}\|, i = \overline{1, r+1}; j = \overline{1, m+1}; i \geq j.$$

Тогда истинное запаздывание будет являться общим корнем системы

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} &= 0, \\ \bar{\Delta}_{n,m} &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что уравнения системы (38) имеют одинаковый порядок, что упрощает решение. Например, для  $r = 1, m = 0$

$$\bar{\Delta}_{n,m} = \begin{vmatrix} -\tau & -\mu_1 & -\mu_0 \\ \frac{\tau^2}{2} & -\mu_2 & -\mu_1 \\ -\frac{\tau^3}{6} & -\mu_3 & -\mu_2 \end{vmatrix} = \tau \begin{vmatrix} -1 & -\mu_1 & -\mu_0 \\ \frac{\tau^2}{2} & -\mu_2 & -\mu_1 \\ -\frac{\tau^3}{6} & -\mu_3 & -\mu_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Так как предполагалось, что  $\tau \neq 0$ , то из выражения (39) следует

$$\bar{\Delta}_{n,m} = -\frac{1}{6}(\mu_1^2 - \mu_1\mu_0)\tau^2 - \frac{1}{2}(\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_3)\tau - \mu_2^2 + \mu_1\mu_3 = 0. \quad (40)$$

Выражение  $\Delta_{n,m}$  было получено ранее из (24):

$$\Delta_{n,m} = \frac{1}{2}\mu_0^2\tau^2 + \mu_0\mu_1\tau + \mu_1^2 - \mu_0\mu_2 = 0. \quad (41)$$

Определив общий корень уравнений (40), (41), получим истинное запаздывание модели.

На основе предложенных алгоритмов в среде Matlab разработана программа, позволяющая по известным моментам объекта определять параметры моделей с запаздыванием в зависимости от решаемой задачи в программе используются моменты  $\mu_k$  объектов, найденные экспериментально или рассчитанные по формулам (12), (16).

Рассмотрим примеры определения параметров моделей с запаздыванием.

*Пример 1.*

$$W_{об}(p) = \frac{e^{-p}}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} = \frac{e^{-p}}{(p+1)^3}. \quad (42)$$

При  $\alpha = 0$  находим  $\mu_0 = 1, \mu_1 = -4, \mu_2 = 19/2$ . Рассмотрим модель 1-го порядка ( $m = 0, n = 1$ ), тогда  $\Delta_{1,0} = \tau^2 - 8\tau + 13 = 0; \tau_1 = 5,71; \tau_2 = 2,29$ .

Корень  $\tau_M = \tau_2 = 2,29$  дає іскомое рішення:

$$W_M(p) = \frac{e^{-2,29p}}{1,71p+1}. \quad (43)$$

При  $\tau_M = \tau_1$ , модель неустойчива. АФХ моделі і об'єкта приведені на рис. 1.

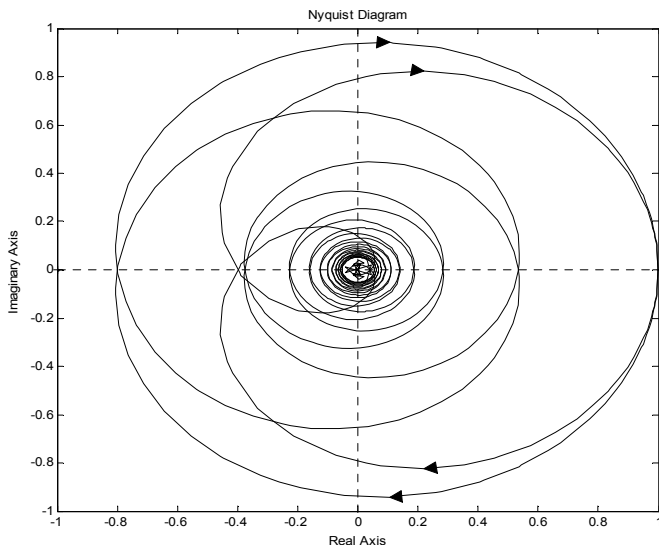


Рис. 1. АФХ моделі при  $\tau_M = \tau_1 = 5,71$

Сопоставление АФХ об'єкта і моделі для об'єкта 3-го (а, б) і 2-го (в) порядков:

$$a - W_{об}(P) = \frac{e^{-P}}{(P+3)^3};$$

$$W_M(P) = \frac{e^{-2,29P}}{1,71P+1};$$

$$b - W_{об}(P) = \frac{(2P+1)e^{-P}}{(P+3)^3};$$

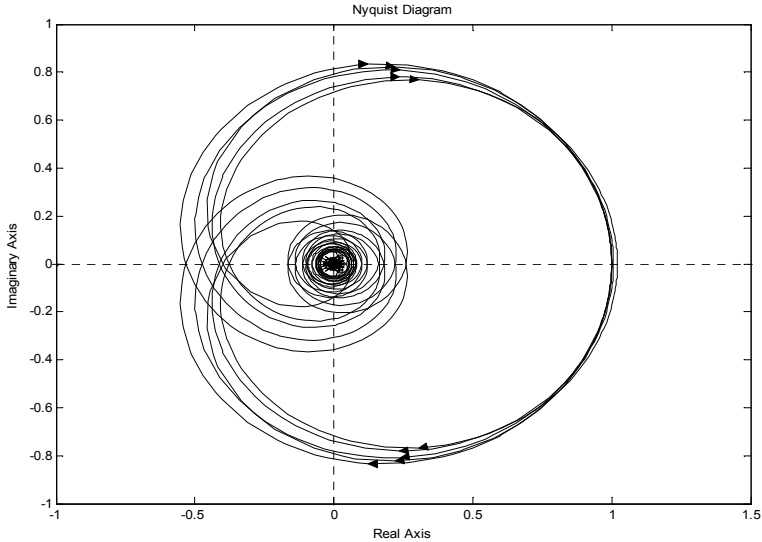
$$W_M(P) = \frac{(1,857P+1)e^{-1,36P}}{1,89P^2+2,49P+1};$$

$$в - W_{об}(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+2p+1};$$

$$W_M(P) = \frac{e^{-1,58P}}{1,41P+1}, \alpha = 0;$$

$$W_M(P) = \frac{1,54e^{-1,45P}}{2,48P+1,53}, \alpha = 0,3;$$

$$W_M(P) = \frac{2e^{-1,39P}}{3,5P+1,96}, \alpha = 0,5.$$



**Рис. 2.** Сопоставление АФХ объекта и модели

Пример 2.

$$W_{об}(p) = \frac{e^{-p}(2p+1)}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} = \frac{e^{-p}(2p+1)}{(p+1)^3}. \quad (44)$$

При  $\alpha = 0$  находим  $\mu_0 = 1, \mu_1 = -2, \mu_2 = 3/2, \mu_3 = 4/3$ . Для модели 2-го порядка ( $m = 1, n = 2$ ), из выражения (27) находим

$$\Delta_{2,1} = -0,006\tau^6 + 0,083\tau^5 - 0,437\tau^4 + 1,55\tau^3 - 2,27\tau^2 - 1,75\tau + 3,83 = 0,$$

$$\tau_1 = 6,17; \tau_{2,3} = 1,27 \pm j4,25; \tau_4 = 3,04; \tau_5 = 1,36; \tau_6 = -1,11.$$

Решением задачи является корень  $\tau_M = \tau_5 = 1,36$ .

$$W_M(p) = \frac{(1,857p+1)e^{-1,36p}}{31,89p^2 + 2,49p + 1}, \quad (45)$$

АФХ объекта и модели приведены на рис. 3.

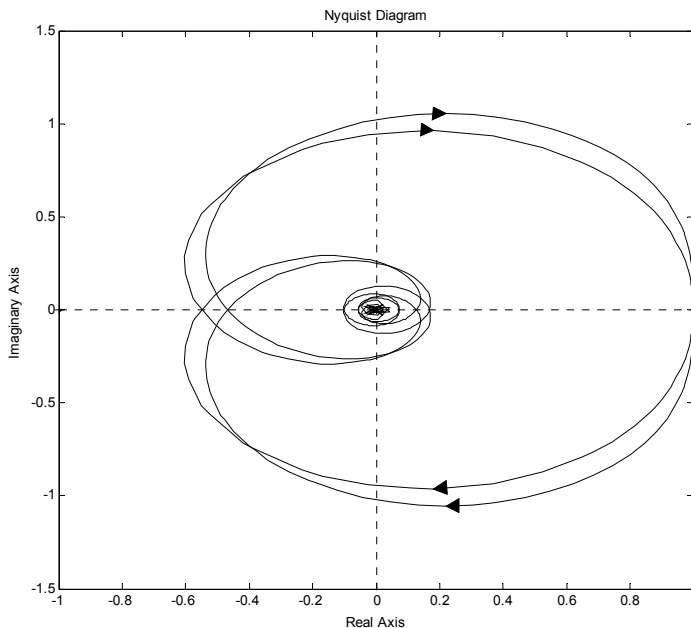


Рис. 3. АФХ объекта и модели для примера 2

**Выводы.** Рассмотренные примеры подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов. Погрешности, возникающие при экспериментальном определении моментов, могут повлиять на точность определения истинного запаздывания и порядка объекта, что является предметом специального исследования. Разработанный метод идентификации позволяет оценивать параметры линейных моделей с запаздыванием, а также порядок передаточной функции объекта и его истинное запаздывание. Метод может быть использован при идентификации динамических характеристик объектов с транспортным запаздыванием и для аппроксимации динамических характеристик сложных объектов моделями с запаздыванием.

#### Список использованной литературы:

1. Карташов В. Я. Структурно-параметрическая идентификация дискретных моделей объектов с запаздыванием для настройки регуляторов Смита / В. Я. Карташов, Д. Ю. Сахнин // Изв. Томского политехн. ин-та. — 2007. — Т. 311. — № 5. — С. 19–23.
2. Учебник в пяти томах. / под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. — М. : Изд-во МГТУ, 2004. — Т. 2. — 639 с.
3. Аржанов В. А. Применение ортогональных полиномов для аппроксимации передаточных функций полосовых линий задержки / В. А. Аржанов // Омский научный вестник. — 2010. — № 3–93. — С. 283–286.

4. Ким Д. П. Теория автоматического управления : учеб. пособие / Д. П. Ким. — М. : Физматлит, 2004. —Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — 464 с.
5. Пыркин А. А. Методы адаптивного и робастного управления в условиях запаздывания и возмущающих воздействий : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / А. А. Пыркин. — СПб., 2010. — 151 с.

The problems of identification of dynamic objects with delay are examined. The tasks are solved by the method of moments, whereby the parameters of the transfer function of the object are determined. The quality of the developed software tools that implement this method is studied by means of computational experiments.

**Key words:** *identification, modelling, dynamic systems with delay, Matlab.*

Отримано: 9.04.2015

УДК 517.44

**О. І. Махович**, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗІ СКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Розглянуто метод інтегральних перетворень зі скінченними межами та його застосування на прикладі рівняння теплопровідності. Наведено вирази для ідентифікації ядра інтегрального перетворення та позаінтегрального доданку в залежності від різного роду граничних умов. Виведена формула знаходження оригінала за відомим зображенням.

**Ключові слова:** *інтегральне перетворення, зображення функції, ядро інтегрального перетворення.*

**Вступ.** Для інтегральних перетворень Лапласа, Лапласа-Карсона, Фур'є, Мелліна з нескінченними межами, які алгебраїзують диференціальні рівняння, незважаючи на те, що для них є досить детальні таблиці прямих і зворотних перетворень, проте перехід від зображення до оригіналу в багатьох випадках є неможливим, оскільки така задача відноситься до класу некоректних [1]. Вказаного недоліку позбавлений метод інтегрального перетворення зі скінченними межами, в якому перехід від зображення до оригіналу завжди можливий.

**Основна частина.** Розглянемо пряме інтегральне перетворення [2], застосоване до деякої функції-оригінала  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  за однією із змінних  $x_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). В результаті отримуємо зображення цієї функції за змінною  $x_k$ :