УДК 517.698.519.6

А.В. КОСТЕНКО

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА И ЕГО ОБОСНОВАНИЕ

Аннотация. Представлен численный метод решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения. Получена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

Ключевые слова: система интегральных уравнений, численный метод, интеграл в смысле конечной части по Адамару, существование и единственность решения, скорость сходимости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении прикладных задач математики, а также в математическом моделировании физических процессов возникают системы интегральных уравнений следующего вида:

$$hu_i(y)\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(t)}{(t-y)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-y|\,u_i(t)\sqrt{1-t^2}\,dt+$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{ik}(t,y)u_i(t)\sqrt{1-t^2}\,dt=f_i(y),\ i=\overline{1,m},\tag{1}$$

где h и a — заданные комплексная и вещественная постоянные соответственно. Обозначим $C^{r,\alpha}_{[-1,1]}$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ функций таких, что r-я производная удовлетворяет на отрезке $[-1,1]$ условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha\le 1$. Предположим, что в системе интегральных уравнений (1) функции $f_i(y)$, $i=\overline{1,m}$, принадлежат множеству $C^{0,\alpha}_{[-1,1]}$, функции $K_{ik}(t,y)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,m}$, — множеству $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$ по каждой переменной равномерно относительно другой, искомые функции $u_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, — множеству $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$. Второе слагаемое в левой части i-го $(i=\overline{1,m})$ уравнения системы (1) понимается в смысле конечной части по Адамару, третье слагаемое — несобственный интеграл.

Данная система уравнений получена автором настоящей статьи при построении математической модели дифракционного рассеяния волн решеткой, состоящей из конечного числа неидеально проводящих лент [1], что подтверждает ее актуальность.

Целью статьи является презентация численного метода решения системы интегральных уравнений (1) и его обоснование, а именно доказательство критерия существования и единственности решения, оценка нормы разности приближенного и точного решений, которая позволяет охарактеризовать скорость сходимости предложенного метода, демонстрация и анализ результатов его применения для решения модельных задач, а также оценка его численной сходимости.

Отметим, что в настоящее время изучаются качественные свойства точных и приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений, осуществляется построение новых методов их решения [2–4].

Пусть Π^{I} и Π^{II} — два экземпляра гильбертова пространства полиномов со следующими скалярными произведениями соответственно:

$$(u(t), v(t))_{\Pi^{\mathrm{I}}} \equiv \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-1}^{1} (u(t)\sqrt{1-t^2})'(v(t)\sqrt{1-t^2})'\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(u(t), v(t))_{\Pi^{\mathrm{II}}} \equiv \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Введем в рассмотрение линейные операторы:

$$(Ru)(y) \equiv hu(y)\sqrt{1-y^2},$$

$$(Au)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{(t-y)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(Bu)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|t-y|\,u(t)\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(K_{ik}u)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{ik}(t,\ y)u(t)\sqrt{1-t^2}\,dt,\ \ i=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,m}.$$

Оператор A переводит полином в полином и сохраняет его степень, оператор B также переводит полином в полином, но повышает его степень на два [5]. Так, операторы A и B определены на пространстве Π^{I} и переводят его в пространство Π^{II}. Операторы R и K переводят полиномы из пространства Π^{I} в функции общего вида.

Пусть $\mathbf{\Pi}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{\Pi}^{\mathrm{II}}$ — гильбертовы пространства вектор-функций, компоненты которых принадлежат соответственно пространствам Π^{I} и Π^{II}. Элементы данных пространств имеют вид $\boldsymbol{u}(t) = (u_i(t))_{i=1}^{m}$, где $u_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, — полином, принадлежащий пространству Π^{I} или Π^{II}. Определим скалярные произведения в пространствах $\mathbf{\Pi}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{\Pi}^{\mathrm{II}}$ соответственно:

$$(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))_{\mathbf{\Pi}^{\mathrm{I}}} \equiv \sum_{k=1}^{m} (u_k(t), v_k(t))_{\Pi^{\mathrm{I}}},$$

$$(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))_{\mathbf{\Pi}^{\mathrm{II}}} \equiv \sum_{k=1}^{m} (u_k(t), v_k(t))_{\Pi^{\mathrm{II}}}.$$

Введем в рассмотрение следующие линейные операторы:

$$(\boldsymbol{Ru})(y) \equiv ((Ru_i)(y))_{i=1}^{m}, \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{Au})(y) \equiv ((Au_i)(y))_{i=1}^{m}, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{Bu})(y) \equiv ((Bu_i)(y))_{i=1}^{m}, \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{Ku})(y) \equiv \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} (K_{ik}u_i)(y) \right)_{i=1}^{m}. \tag{5}$$

Поскольку оператор A переводит полином в полином и сохраняет его степень, оператор $\boldsymbol{A}$, определенный правилом (3), переводит вектор-функцию, состоящую из полиномов, в аналогичную вектор-функцию и сохраняет степень каждой компоненты. Так как оператор B переводит полином в полином и повышает его степень на два, оператор $\boldsymbol{B}$, определенный правилом (4), переводит вектор-функцию, состоящую из полиномов, в аналогичную вектор-функцию, но повышает степень каждой компоненты на два. Таким образом, операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ определены в пространстве $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{I}}$ и переводят его в пространство $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{II}}$. Поскольку операторы R и K_{ik} $(i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,m})$ переводят полином в функцию общего вида, операторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{K}$, определенные правилами (2) и (5) соответственно, переводят вектор-функции, состоящие из полиномов, в вектор-функции, состоящие из функций общего вида.

В операторном представлении система гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода (1) примет следующий вид:

$$(\boldsymbol{Ru})(y)-(\boldsymbol{Au})(y)+a(\boldsymbol{Bu})(y)+(\boldsymbol{Ku})(y)=\boldsymbol{f}(y), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{f}(y)=(f_i(y))_{i=1}^m$. Решение системы уравнений (6) называется точным, а сама система называется системой относительно точного решения.

Обозначим L^{I} и L^{II} пополнения гильбертовых пространств Π^{I} и Π^{II}, а $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ — пополнения гильбертовых пространств $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{II}}$ по соответствующим нормам. Расширения операторов на введенные пространства будем обозначать теми же символами.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Как отмечалось ранее, операторы $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$, определенные правилами (2)–(5) соответственно, действуют на элементы пространства $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{I}}$ по-разному, что затрудняет проведение дискретизации системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода. Во избежание этих трудностей проведена регуляризация операторов $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$. В данном случае под регуляризацией понимается посторенние оператора, который сохраняет степень полинома и близок по норме к регуляризируемому. Термин регуляризация оператора впервые использован в таком смысле в теории интегральных уравнений в [6] (отметим, что эту работу представлял А.Н. Тихонов). Также этот термин встречается в ключевых работах [7–10].

Итак, в результате регуляризации, определены операторы, действующие из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ и близкие по норме к операторам $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$, которые переводят вектор-функцию, состоящую из полиномов, в аналогичную вектор-функцию с сохранением степеней полиномов. Отметим также, что результатом регуляризации является построение системы интегральных уравнений, решение которой близко по норме к решению системы (6), т.е. к точному. Решение регуляризированной системы интегральных уравнений называется приближенным.

Пусть $T_n(t)$ — полином Чебышева первого рода степени n; $U_{n-1}(t)$ — полином Чебышева второго рода степени $(n-1)$; $\{t_{0j}^n\}_{j=1}^{n-1}$ — корни полинома $U_{n-1}(t)$, $t_{0j}^n=\cos\frac{j}{n}\pi$, $j=\overline{1,n-1}$; $u_{n-2}(t)$ — полином степени $(n-2)$. Тогда $u_{n-2}(t)=$ $=\sum_{j=1}^{n-1}u_{n-2}(t_{0j}^n)l_{n-2,j}(t)$ — интерполяционный полином функции $u_{n-2}(t)$ степени $(n-2)$. Здесь $l_{n-2,j}(t)=\dfrac{U_{n-1}(t)}{U'_{n-1}(t_{0j}^n)(t-t_{0j}^n)}$, $j=\overline{1,n-1}$, — базисные полиномы.

Обозначим $\boldsymbol{u}_{n-2}(t)=(u_{i,n_i-2}(t))_{i=1}^{m}$, где $u_{i,n_i-2}(t)$ — полином степени (n_i-2), $i=\overline{1,m}$.

Регуляризацией оператора B является оператор [11], обозначенный B_{n-2} и действующий из пространства Π^{I} в пространство Π^{II}:

$$(B_{n-2}u_{n-2})(y)\equiv(Bu_{n-2})(y)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2T_{n-1}(y)T_{n-1}(t)}{n-1}+\frac{2T_n(y)T_n(t)}{n}\right)u_{n-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt. \quad (7)$$

Имеет место следующее неравенство:

$$\|B_{n-2}-B\|_{L^{\mathrm{II}}}\le\frac{c_B}{n(n-1)}, \quad (8)$$

где $n\ge2$, c_B — константа, не зависящая от числа n.

В качестве регуляризации оператора $\boldsymbol{B}$ выбран оператор $(\boldsymbol{B}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)=((B_{n-2}u_{i,n_i-2})(y))_{i=1}^{m}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$. Он по построению переводит вектор-функцию, состоящую из полиномов степени (n_i-2), в аналогичную вектор-функцию. В силу оценки (8) оператор $\boldsymbol{B}_{n-2}$ близок по норме $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ к оператору $\boldsymbol{B}$. Легко видеть, что имеет место следующее неравенство:

$$\|\boldsymbol{B}_{n-2}-\boldsymbol{B}\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}}\le\frac{mc_B}{N(N-1)}, \quad (9)$$

где N — наименьшее из чисел n_i, $i=\overline{1,m}$, c_B — константа из оценки (8), не зависящая от чисел n_i, $i=\overline{1,m}$.

В качестве регуляризации оператора R предлагается действующий из пространства Π^{I} в пространство Π^{II} оператор, обозначенный R_{n-2}:

$$(R_{n-2}u_{n-2})(y)\equiv h\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-(t_{0k}^n)^2}\,u_{n-2}(t_{0k}^n)l_{n-2,k}(y). \quad (10)$$

Оператор R_{n-2} по построению сохраняет степень полинома и близок по норме L^{II} к оператору R [12]. Имеет место следующее неравенство:

$$\|R_{n-2}-R\|_{L^{\mathrm{II}}}\le\frac{c_R}{\sqrt{n}}, \quad (11)$$

где $n\ge2$, c_R — константа, не зависящая от n.

В качестве регуляризации оператора $\boldsymbol{R}$ выберем оператор $(\boldsymbol{R}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)=((R_{n-2}u_{i,n_i-2})(y))_{i=1}^{m}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$. Он по построению переводит вектор-функцию, состоящую из полиномов степени (n_i-2), в аналогичную вектор-функцию. В силу оценки (11) он близок по норме $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ к оператору $\boldsymbol{R}$. Легко видеть, что имеет место следующее неравенство:

$$\|\boldsymbol{R}_{n-2}-\boldsymbol{R}\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}}\le\frac{mc_R}{\sqrt{N}}, \quad (12)$$

где N — наименьшее из чисел n_i, $i=\overline{1,m}$, c_R — константа из оценки (11), не зависящая от чисел n_i, $i=\overline{1,m}$.

Обозначим $K_{ik,\,n_i-2}(t,\,y)$ интерполяционный полином $K_{ik}(t,\,y)$ с узлами $\{t_{0j}^{n_i}\}_{j=1}^{n_i-1}$ по каждой переменной, $K_{ik,\,n_i-2}(t_{0j}^{n_i},\,t_{0k}^{n_i}) \equiv K_{ik}(t_{0j}^{n_i},\,t_{0k}^{n_i})$, $j=\overline{1,\,n_i-1}$, $k=\overline{1,\,n_i-1}$, $i=\overline{1,\,m}$. В [11] предложено следующее решение задачи регуляризации оператора K_{ik}, обозначим его K_{ik,n_i-2}:

$$(K_{ik,\,n_i-2}u_{n_i-2})(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{ik,\,n_i-2}(t,\,y)u_{n_i-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt, \tag{13}$$

где $u_{n_i-2}(t)$ — полином степени (n_i-2). Оператор $K_{ik,\,n_i-2}$, определенный правилом (13), действует из пространства Π^{I} в пространство Π^{II}, сохраняет степень полинома и близок по норме к оператору K_{ik}:

$$\|\, K_{ik,n_i-2} - K_{ik}\,\|_{L^{\mathrm{II}}} \le \frac{c_K}{n_i^{1+\alpha}}, \tag{14}$$

где $n_i \ge 2$, c_K — константа, не зависящая от n_i.

В качестве регуляризации оператора $\boldsymbol{K}$ выберем оператор, определенный $(\boldsymbol{K}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)=((K_{ik,n_i-2}u_{n_i-2})(y))_{i=1}^{m}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$. Он по построению переводит вектор-функцию, состоящую из полиномов степени (n_i-2), в аналогичную вектор-функцию. В силу оценки (14) этот оператор близок по норме $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ к оператору $\boldsymbol{K}$. Легко видеть, что имеет место следующее неравенство:

$$\|\, \boldsymbol{K}_{n-2} - \boldsymbol{K}\,\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}} \le \frac{mc_K}{N^{1+\alpha}}, \tag{15}$$

где N — наименьшее из чисел n_i, $i=\overline{1,\,m}$, c_K — константа из оценки (14), не зависящая от чисел n_i, $i=\overline{1,\,m}$.

Обозначим $f_{i,\,n_i-2}(y)$ интерполяционный полином степени (n_i-2) функции $f_i(y)$ с узлами $\{t_{0j}^{n_i}\}_{j=1}^{n_i-1}$, $f_{i,\,n_i-2}(t_{0j}^{n_i}) \equiv f_i(t_{0j}^{n_i})$, $j=\overline{1,\,n_i-1}$. Имеет место следующее неравенство:

$$\|\, f_{i,n_i-2} - f_i\,\|_{L^{\mathrm{II}}} \le \frac{c_f}{n_i^{1+\alpha}}, \tag{16}$$

где $n_i \ge 2$, c_f — константа, не зависящая от n_i.

Введем обозначение $\boldsymbol{f}_{n-2}(y)=(f_{i,n_i-2}(y))_{i=1}^{m}$. В силу оценки (16) имеет место неравенство

$$\|\, \boldsymbol{f}_{n-2} - \boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}} \le \frac{mc_f}{N^{1+\alpha}}, \tag{17}$$

где N — наименьшее из чисел n_i, $i=\overline{1,\,m}$, c_f — константа из оценки (16), не зависящая от чисел n_i, $i=\overline{1,\,m}$.

Итак, операторы $\boldsymbol{R}_{n-2}$, $\boldsymbol{B}_{n-2}$ и $\boldsymbol{K}_{n-2}$ определяют регуляризированную систему гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода, которая в операторном представлении имеет вид

$$(\boldsymbol{R}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)-(A\boldsymbol{u}_{n-2})(y)+a(\boldsymbol{B}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)+(\boldsymbol{K}_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2})(y)=\boldsymbol{f}_{n-2}(y). \tag{18}$$

Отметим, что решение системы (18) называется приближенным.

Левая и правая части системы уравнений (18) — векторы, состоящие из полиномов, соответствующие компоненты которых имеют равные степени. Совпадения компонент этих векторов в $\sum_{i=1}^{m}(n_i-2)$ различных точках $\{t_{0j}^{n_i}\}_{j=1}^{n_i-1}$, $i=\overline{1,\,m}$, необходимо и достаточно для их тождественного равенства. Последовательно полагая $y = t_{0j}^{n_i}$, $j = \overline{1, n_i - 1}$, $i = \overline{1, m}$, и применяя квадратурные формулы интерполяционного типа [5], получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно $((u_{i,n_i-2}(t_{0j}^{n_i}))_{j=1}^{n_i-1})_{i=1}^{m}$:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{qj,n_i n_p} u_{i,n_i-2}(t_{0j}^{n_i}) = a_{qp}, \;\; q = \overline{1, n_p - 1}, \;\; p = \overline{1, m}, \tag{19}$$

где $a_{qj,n_i n_p} = a_{qj,n_i n_p}^{(1)} - a_{qj,n_i n_p}^{(2)} + a_{qj,n_i n_p}^{(3)} + a_{qj,n_i n_p}^{(4)}$, $a_{qj,n_i n_p}^{(1)} = h\sqrt{1-(t_{0j}^{n_i})^2}\, l_{n_i-2,j}(t_{0q}^{n_p})$,

$a_{qj,n_i n_p}^{(2)} = \dfrac{(1-(t_{0j}^{n_i})^2)((-1)^{j+q+1}+1)}{n(t_{0q}^{n_p} - t_{0j}^{n_i})^2}$ при $j \neq q$ и $a_{qj,n_i n_p}^{(2)} = -\dfrac{n_i}{2}$ при $j = q$,

$$a_{qj,n_i n_p}^{(3)} = a\,\frac{(t_{0j}^{n_i})^2 - 1}{n_i}\left(\ln 2 + 2\sum_{m=1}^{n_i-1} \frac{T_m(t_{0q}^{n_p}) T_m(t_{0j}^{n_i})}{m} - 2\,\frac{(-1)^{q+j}\, t_{0q}^{n_p} t_{0j}^{n_i}}{n_i - 1} - \frac{(-1)^{q+j}}{n_i} \right),$$

$a_{qj,n_i n_p}^{(4)} = \dfrac{1-(t_{0j}^{n_i})^2}{n_i} K_{ij,n_i-2}(t_{0q}^{n_p}, t_{0j}^{n_i})$, $a_{qp} = f_p(t_{0q}^{n_p})$.

После того, как система линейных алгебраических уравнений (19) решена и компоненты $((u_{i,n_i-2}(t_{0j}^{n_i}))_{j=1}^{n_i-1})_{i=1}^{m}$ найдены, решение системы (18) строится следующим образом: $\boldsymbol{u}_{n-2}(t) = \left(\sum_{j=1}^{n_i-1} u_{i,n_i-2}(t_{0j}^{n_i}) l_{i,n_i-2,j}(t) \right)_{i=1}^{m}$.

РЕГУЛЯРИЗИРОВАННАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Как отмечалось ранее, в операторном представлении система гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода (1) имеет вид (6) и ее решение называется точным. Регуляризированная система интегральных уравнений имеет вид (18) и ее решение называется приближенным.

Таким образом, для того чтобы найти приближенное решение системы интегральных уравнений, надо решить систему линейных алгебраических уравнений (19). Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Интерполяционный полином, построенный по решению системы линейных алгебраических уравнений (19), является приближенным решением системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Для доказательства данного утверждения необходимы приведенные далее теоремы 2–6.

Теорема 2 [12]. Оператор $(R - A)$, действующий из пространства L^{I} в пространство L^{II}, ограничен $\|(R - A)\|_{L^{\mathrm{II}}} \le 2$ и обратим, т.е. существует оператор $(R - A)^{-1}$, действующий из пространства L^{II} в пространство L^{I} и $\|(R - A)^{-1}\|_{L^{\mathrm{I}}} \le 1$.

Из теоремы 2 получаем следующую теорему.

Теорема 3. Оператор $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, ограничен $\|(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}} \leq 2m$ и обратим, т.е. существует оператор $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ и $\|(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}\|_{\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}} \leq m$.

Теорема 4 [11]. Оператор $aB+K$, действующий из пространства L^{I} в пространство L^{II}, компактен.

Из теоремы 4 получаем следующую теорему.

Теорема 5. Оператор $a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, компактен.

Теорема 6 [13]. Пусть T — компактный оператор, I — единичный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

— $(I-T)x=b$ разрешимо при любой правой части;

— $(I-T)x=0$ не имеет ненулевых решений;

— $(I-T)x=b$ разрешимо при любой правой части, причем единственным образом.

Для доказательства теоремы существования и единственности решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода понадобится также общеизвестное утверждение о компактности композиции компактного и ограниченного операторов [13].

Сформулируем и докажем критерий существования и единственности решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода.

Теорема 7. Решение системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода (1) при любой правой части, принадлежащей пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, принадлежит пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$, существует и единственно тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система интегральных уравнений не имеет ненулевых решений.

Доказательство. Пусть однородная система гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода не имеет ненулевых решений. Докажем, что решение системы (6) существует и единственно. Преобразуем систему (6) следующим образом: применим к обеим частям оператор $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$, существование которого обеспечивает теорема 3. Получим

$$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{u})(y)+(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}((a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{u})(y)=((\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{f})(y).$$

Согласно теореме 5 оператор $a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K}$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, компактен. Тогда оператор $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})^{-1}(a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K})$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$, является компактным как композиция компактного и ограниченного операторов. Так как по предположению система интегральных уравнений не имеет ненулевых решений, согласно теореме 6 она разрешима единственным образом при любой правой части, принадлежащей пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$.

Пусть решение системы (6) существует и единственно, тогда согласно теореме 6 соответствующая однородная система интегральных уравнений не имеет ненулевых решений.

Теорема доказана.

Отметим, что система граничных гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода, возникающая при решении задачи рассеяния и дифракции [1], удовлетворяет приведенному критерию существования и единственности решения, а именно соответствующая однородная система интегральных уравнений не имеет ненулевых решений. Это связанно с тем, что данная система интегральных уравнений выведена эквивалентными преобразованиями из парного интегрального уравнения, основанного на преобразовании Фурье.

Действительно, предположим, что существует функция, не равная тождественно нулю, которая является решением однородной системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода. Как отмечалось ранее, парное интегральное уравнение приводит к тому, что преобразование Фурье искомой функции равно нулю почти всюду, что возможно, только если искомая функция равна нулю почти всюду. А это противоречит предположению. Развернутое доказательство этого утверждения легко построить на основании приведенных ранее рассуждений и выкладок работ [1, 12].

В случае, когда решение системы уравнений (6) ищется в пространстве $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, т.е. когда операторы, порожденные (1), действуют из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, провести доказательство предложенного критерия существования и единственности решения системы интегральных уравнений невозможно. Это связано с тем, что оператор A при действии из пространства L^{II} в пространство L^{II} не ограничен [11]. Однако, тогда, как показано в [14], оператор, обратный оператору A, имеет вид

$$(A^{-1}v)(t) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \ln \left| \frac{t-y}{1-ty-\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-y^2}} \right| v(t)dy$$

и действует из пространства L^{II} в пространство L^{II}. Оператор A^{-1} имеет логарифмическую особенность в ядре и является компактным. Легко видеть, что оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$, определенный как $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v})(t) \equiv ((A^{-1}v_i)(t))_{i=1}^m$ и действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, также компактен.

Кратко обоснуем критерий существования и единственности решения системы интегральных уравнений в том случае, когда решение принадлежит пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$. Применим оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ к системе (6), тогда она преобразуется к виду

$$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{u})(y) + (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})(y) + ((\boldsymbol{A}^{-1}(a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K}))\boldsymbol{u})(y) = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f})(y).$$

Оператор $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{A}^{-1}(a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K})$, действующий из пространства $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ в пространство $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, компактен как сумма композиций компактного оператора и ограниченных операторов.

Таким образом, получаем критерий существования и единственности решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода в пространстве $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$.

Теорема 8. Решение системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода (1) при любой правой части, принадлежащей пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, также принадлежит пространству $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$, существует и единственно тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система интегральных уравнений не имеет ненулевых решений.

Обоснуем разрешимость системы линейных алгебраических уравнений (19). Утверждения теорем 7 и 8 естественным образом распространяются на регуляризированную систему гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода (18). Таким образом, получен критерий существования и единственности решения системы (18) в соответствующих пространствах. Так, предположим, что решение системы гиперсингулярных интегральных уравнений (1) существует и единственно. Тогда решение регуляризированной системы интегральных уравнений (18) также существует и единственно. Как отмечалось ранее, интерполяционный полином, построенный по решению системы (18), является ее точным решением. Если система линейных алгебраических уравнений (19) несовместна или имеет множество решений, то получаем противоречие тому, что решение системы (18) — интерполяционный полином — существует и единственно в силу единственности интерполяционного полинома. Итак, если решение системы интегральных уравнений (1) существует и единственно, то решение системы линейных алгебраических уравнений (19) также существует и единственно.

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ К ТОЧНОМУ

Оценка нормы разности точного и приближенного решений системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода получена с помощью следующей теоремы.

Теорема 9 [15]. Пусть X и Y — банаховы пространства, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательности их конечномерных подпространств; Q и Q_n — линейные операторы, действующие из X в Y и из X_n в Y_n соответственно. Равенства $Qx = y$ и $Q_n x_n = y_n$ рассматриваются как уравнения. Пусть выполнены следующие условия:

— оператор Q обратим;

— величина $\varepsilon^{(n)} \equiv || Q - Q_n ||_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

— для любого n $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty$;

— величина $\delta^{(n)} \equiv || y - y_n ||_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Тогда при всех n, удовлетворяющих неравенству $p_n \equiv || Q^{-1} ||_X \; || Q - Q_n ||_Y < 1$, уравнение $Q_n x_n = y_n$ имеет единственное решение (обозначим его x_n^*) при любой правой части и $|| x_n^* ||_{X_n} \le || Q^{-1} ||_{X_n} || y_n ||_{Y_n}, || Q^{-1} ||_{X_n} \le \dfrac{|| Q^{-1} ||_X}{(1 - p_n)}$. Скорость сходимости приближенного решения к точному (обозначим его x^*) оценивается $\dfrac{\alpha_n}{|| Q ||_Y} \le || x^* - x_n^* ||_X \le \alpha_n || Q^{-1} ||_X$, где $\alpha_n \equiv || (y - y_n) + (Q_n - Q) x_n^* ||_Y$ и

$$|| x^* - x_n^* ||_X \le \frac{|| Q^{-1} ||_X}{1 - p_n} (|| y - y_n ||_Y + p_n || y ||_Y) = O(\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n)}).$$

Приведенная далее теорема следует из теоремы 9 и оценок (9), (12), (15), (17).

Теорема 10. Пусть N — наименьшее из чисел n_i, $i = \overline{1, m}$. Приближенное решение системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода при достаточно больших значениях N близко к точному решению, и имеет место следующее неравенство:

$$|| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{n-2} ||_{\boldsymbol{L}^1} \le \frac{mc}{\sqrt{N}}, \tag{20}$$

где c — константа, равная наибольшему из чисел c_R, c_B, c_K и c_f.

Отметим, что с помощью неравенства (20) можно оценить скорость сходимости линейных функционалов от приближенного решения к их значениям от точного решения. Потребность в вычислении таких функционалов часто возникает при решении прикладных задач математической физики, которые сводятся к рассмотренной системе граничных гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода.

МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Рассмотрим результаты применения предложенного численного метода для решения модельных задач. Сравнение полученных приближенных решений с точными позволит оценить численную сходимость метода. Все описанные в настоящей статье модельные задачи построены с помощью метода М.В. Келдыша и Л.И. Седова (метод функции Келдыша–Седова) [16], который дает возможность проводить точные вычисления сингулярных интегралов. Построение модельных задач также основано на связи между сингулярным и гиперсингулярным интегралами [11].

Далее представлены решения трех модельных задач — гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода, приведенных в порядке усложнения формы и роста близости к прикладным задачам. Во всех модельных уравнениях есть слагаемые, требующие регуляризации, так как они сильно влияют на сходимость численного метода.

Задача 1. Рассмотрим модельное гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода на отрезке $[-1,1]$:

$$hu(y)\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{(y-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt=$$
$$=h\sin y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}+\sin y\,\mathrm{ch}\sqrt{1-y^2}+\cos y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (21)$$

Функция $u(y)=\dfrac{\sin y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$ — точное решение уравнения (21). Обозначим $u_{n-2}(y)$ приближенное решение уравнения (21). Отметим, что функция $u(y)$ нечетная и вещественная. Функция $u_{n-2}(y)$ также нечетная, $t_{0n-j}^{n}=-t_{0j}^{n}$, $j=\overline{1,n}$.

Обозначим $f_1(y)$ функцию в правой части уравнения (21), $f_1(y)=h\sin y\times$ $\times\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}+\sin y\,\mathrm{ch}\sqrt{1-y^2}+\cos y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}\,\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Тогда в операторном представлении уравнение (21) примет следующий вид:

$$(Ru)(y)+(Au)(y)=f_1(y). \qquad (22)$$

Как отмечалось ранее, оператор R переводит полином в функцию общего вида, а оператор A переводит полином в полином и сохраняет его степень. В настоящей статье в качестве регуляризации оператора R использован оператор R_{n-2} (10), который сохраняет степень полинома и близок по норме пространства L^{II} к оператору R согласно неравенству (11). Таким образом, применение численного метода для решения модельного гиперсингулярного уравнения (22) позволяет проиллюстрировать особенности регуляризации.

В табл. 1 приведены результаты вычислений, которые дают возможность оценить численную сходимость предложенного метода на примере уравнения (21). Вычисления проведены в предположении, что $h=0.1-0.3\,i$. Поскольку функции $u(y)$ и $u_{n-2}(y)$ нечетные, значения j изменяются от единицы до целой части $n/2$.

Данные, представленные в табл. 1, показывают, что при приближении значений аргумента к концу отрезка $[-1,1]$ модуль погрешности численного метода при $n=9$ и $n=16$ составляет приблизительно 0.208. Однако по мере удаления от конца

Таблица 1

n	j	$u(t^n_{0j})$	$u_{n-2}(t^n_{0j})$	$\lvert u(t^n_{0j})-u_{n-2}(t^n_{0j})\rvert$
9	1	0.837359	$1.045342+3.56\cdot10^{-3}i$	0.208
	2	0.794899	$0.809269+1.31\cdot10^{-3}i$	0.015
	3	0.659800	$0.665980+7.69\cdot10^{-4}i$	$6.23\cdot10^{-3}$
	4	0.386976	$0.388816+3.41\cdot10^{-4}i$	$1.87\cdot10^{-3}$
16	1	0.840203	$1.048468+1.36\cdot10^{-3}i$	0.208
	2	0.828962	$0.845430+4.48\cdot10^{-4}i$	0.016
	3	0.800871	$0.808066+7.69\cdot10^{-4}i$	$7.21\cdot10^{-3}$
	4	0.746084	$0.749143+3.21\cdot10^{-4}i$	$3.08\cdot10^{-3}$
	5	0.653504	$0.655318+2.33\cdot10^{-4}i$	$1.83\cdot10^{-3}$
	6	0.515333	$0.516286+1.56\cdot10^{-4}i$	$9.66\cdot10^{-4}$
	7	0.331954	$0.332487+9.10\cdot10^{-5}i$	$5.41\cdot10^{-4}$
	8	0.114833	$0.114974+2.94\cdot10^{-5}i$	$1.44\cdot10^{-4}$

отрезка вещественная часть погрешности наряду с мнимой частью приближается к нулю. Так, приближенное решение имеет три-четыре точных значащих цифры. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений составило 0.098 при $n=9$ и 0.074 при $n=16$. Отметим, что функция $u_{n-2}(y)$ получилась комплексной, это связано с тем, что в уравнении (21) имеется комплексный параметр h, но мнимая часть $u_{n-2}(y)$ близка к нулю, а вещественная — к $u(y)$.

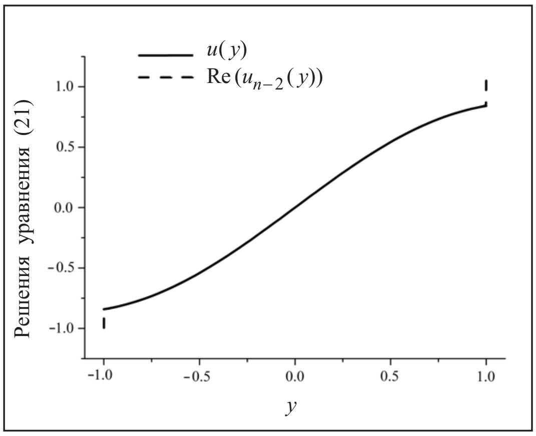

Рис. 1

На рис. 1 представлены графики функций $u(y)$ и $\mathrm{Re}(u_{n-2}(y))$ при $n=100$. Видно, что в центральной части отрезка $[-1,1]$ функции совпадают с графической точностью; количество точных значащих цифр в приближенном решении в этой области изменяется от трех до семи. Однако с приближением к концу отрезка вещественная часть погрешности растет и ее модуль по-прежнему составляет 0.208. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений при $n=100$ составило 0.03.

Таким образом, результаты применения численного метода для решения модельного гиперсиснуглярного интегрального уравнения второго рода (21) позволяют оценить и охарактеризовать сходимость данного метода. Так, сходимость метода средняя и ухудшается с приближением к концам отрезка. Заметим, что при решении прикладных задач математической физики, например задач дифракции и рассеяния волн, которые приводят к таким гиперсингулярным интегральным уравнениям, необходимо строить и вычислять линейные функционалы от решения интегрального уравнения. Это в некоторой мере усредняет приближенные решения и дает среднюю сходимость, которая строго обоснована неравенством (20).

Задача 2. Рассмотрим модельное гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода на отрезке $[-1, 1]$:

$$hu(y)\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{(y-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt=$$

$$=h\,\mathrm{ch}\,y\sin\sqrt{1-y^2}-\mathrm{ch}\,y\cos\sqrt{1-y^2}+\mathrm{sh}\,y\sin\sqrt{1-y^2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (23)$$

Функция $u(y)=\dfrac{\mathrm{ch}\,y\sin\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$ — точное решение уравнения (23). Обозначим $u_{n-2}(y)$ приближенное решение уравнения (23). Отметим, что функция $u(y)$ четная и вещественная. Функция $u_{n-2}(y)$ также четная.

Обозначим $f_2(y)$ функцию в правой части уравнения (23), $f_2(y)=h\,\mathrm{ch}\,y\times \times\sin\sqrt{1-y^2}-\mathrm{ch}\,y\cos\sqrt{1-y^2}+\mathrm{sh}\,y\sin\sqrt{1-y^2}\,\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Тогда в операторном представлении уравнение (23) примет следующий вид:

$$(Ru)(y)+(Au)(y)=f_2(y). \qquad (24)$$

Уравнение (24) по составу близко к уравнению (22) и имеет те же особенности, позволяющие проиллюстрировать связь между точным и приближенным решениями, а также проанализировать свойства предложенной регуляризации. Но точное решение уравнения (24) в отличие от уравнения (22) — четная функция.

В табл. 2 приведены результаты вычислений, которые позволяют оценить численную сходимость предложенного метода решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода на примере уравнения (23). Данные вычисления также проведены в прежнем предположении, что $h=0.1-0.3\,i$. Так как функции $u(y)$ и $u_{n-2}(y)$ четные, значения j, как и ранее, меняются от единицы до целой части $n/2$.

Данные, представленные в табл. 2, показывают, что при приближении значений аргумента к концу отрезка $[-1, 1]$ модуль погрешности численного метода при $n=9$ и $n=16$ составляет приблизительно 0.39. Но по мере удаления от конца отрезка вещественная часть погрешности наряду с мнимой частью приближается к нулю. Так, вещественная часть приближенного решения имеет две-три точных значащих цифры. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений составило 0.186 при $n=9$ и 0.137 при $n=16$. Отме-

Таблица 2

n	j	$u(t_{0j}^n)$	$u_{n-2}(t_{0j}^n)$	$\lvert u(t_{0j}^n)-u_{n-2}(t_{0j}^n)\rvert$
9	1	1.517750	$1.910007+8.54\cdot10^{-3}\,i$	0.392
	2	1.341463	$1.373911+4.15\cdot10^{-3}\,i$	0.033
	3	1.098520	$1.115118+3.40\cdot10^{-3}\,i$	0.017
	4	0.909937	$0.919235+2.96\cdot10^{-3}\,i$	$9.76\cdot10^{-3}$
16	1	1.534979	$1.920150+3.10\cdot10^{-3}\,i$	0.385
	2	1.473000	$1.504554+1.63\cdot10^{-3}\,i$	0.032
	3	1.362944	$1.377551+1.35\cdot10^{-3}\,i$	0.015
	4	1.227572	$1.234642+1.16\cdot10^{-3}\,i$	$7.16\cdot10^{-3}$
	5	1.091299	$1.096182+1.04\cdot10^{-3}\,i$	$4.99\cdot10^{-3}$
	6	0.974387	$0.977888+9.61\cdot10^{-4}\,i$	$3.63\cdot10^{-3}$
	7	0.890459	$0.893420+9.14\cdot10^{-4}\,i$	$3.10\cdot10^{-3}$
	8	0.846971	$0.849645+8.91\cdot10^{-4}\,i$	$2.82\cdot10^{-3}$

тим, что так же, как и в предыдущей задаче, и по тем же причинам функция $u_{n-2}(y)$ получилась комплексной: мнимая часть $u_{n-2}(y)$ близка к нулю, а вещественная — к $u(y)$.

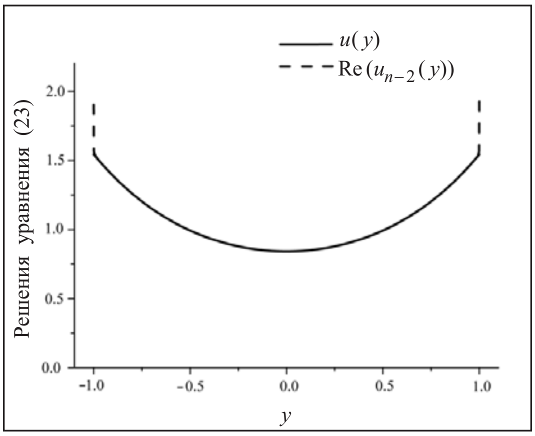

Рис. 2

На рис. 2 представлены графики функций $u(y)$ и $\mathrm{Re}\,(u_{n-2}(y))$ при $n=100$. Видно, что в центральной части отрезка $[-1, 1]$ функции совпадают с графической точностью; количество точных значащих цифр в приближенном решении в этой области изменяется от двух до пяти. С приближением к концу отрезка вещественная часть погрешности растет и ее модуль по-прежнему близок к 0.39. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений при $n=100$ составило 0.054.

Представленные результаты применения численного метода для решения модельного гиперсиснуглярного интегрального уравнения второго рода на отрезке $[-1, 1]$ (23) позволяют оценить численную сходимость метода. Так, сходимость метода средняя и ухудшается с приближением к концам отрезка. Замечание о прикладных задачах и средней сходимости метода, необходимой для оценки линейных функционалов, сохраняется; его обеспечивает неравенство (20).

Задача 3. Рассмотрим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода на отрезке $[-1, 1]$:

$$hu(y)\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{(y-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|y-t|\,u(t)\sqrt{1-t^2}\,dt=$$

$$=h\sin y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}+\sin y\,\mathrm{ch}\sqrt{1-y^2}+$$

$$+\cos y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}+a\int_{0}^{y}\cos\tau\,\mathrm{ch}\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau-a\frac{\pi}{2}y. \qquad (25)$$

Функция $u(y)=\dfrac{\sin y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$ — точное решение уравнения (25); $u(y)$ — вещественная функция. Как и прежде, обозначим $u_{n-2}(y)$ приближенное решение уравнения (25). Отметим, что функции $u(y)$ и $u_{n-2}(y)$ нечетные.

Обозначим $f_3(y)$ функцию в правой части уравнения (25), $f_3(y)=\sin y\times$ $\times\,(h\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}+\mathrm{ch}\sqrt{1-y^2})+\dfrac{y\cos y\,\mathrm{sh}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}+a\left(\int_{0}^{y}\cos\tau\,\mathrm{ch}\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau-\dfrac{\pi}{2}y\right)$. Тогда в операторном представлении уравнение (25) примет следующий вид:

$$(Ru)(y)+(Au)(y)+a(Bu)(y)=f_3(y). \qquad (26)$$

Гиперсингулярное интегральное уравнение (26) выбрано в качестве примера для оценки численной сходимости, так как содержит слагаемое $a(Bu)(y)$,

Т а б л и ц а 3

n	j	$u(t_{0j}^n)$	$u_{n-2}(t_{0j}^n)$	$\lvert u(t_{0j}^n)-u_{n-2}(t_{0j}^n)\rvert$
9	1	0.837359	$0.989596-2.25\cdot10^{-4}i$	0.152
	2	0.793899	$0.802643-1.53\cdot10^{-3}i$	$8.88\cdot10^{-3}$
	3	0.659800	$0.697050-1.69\cdot10^{-3}i$	0.037
	4	0.386976	$0.415860-3.41\cdot10^{-3}i$	0.029
16	1	0.840203	$0.999297+1.46\cdot10^{-3}i$	0.159
	2	0.828962	$0.819616+7.70\cdot10^{-4}i$	$9.38\cdot10^{-3}$
	3	0.800871	$0.805475+1.04\cdot10^{-3}i$	$4.72\cdot10^{-3}$
	4	0.746084	$0.771450+1.58\cdot10^{-3}i$	0.025
	5	0.653504	$0.695674+1.88\cdot10^{-3}i$	0.042
	6	0.515333	$0.560632+1.23\cdot10^{-3}i$	0.045
	7	0.331954	$0.363700-7.62\cdot10^{-4}i$	0.032
	8	0.114833	$0.119018-3.94\cdot10^{-3}i$	$5.75\cdot10^{-3}$

включающее оператор B, который требует регуляризации. Оператор B переводит полином в полином, но повышает его степень на два. В настоящей работе: в качестве регуляризации оператора B использован оператор B_{n-2}, определенный в (7), который сохраняет степень полинома и близок по норме пространства L^{II} к оператору B согласно оценке (8). Отметим, что существуют и другие способы решения задачи регуляризации оператора B, например, в [17] в качестве регуляризации оператора B предлагается использовать интерполяционный полином. Кроме того, интерес к уравнению (26) обусловлен тем, что при решении задач математической теории рассеяния и дифракции волн возникают близкие по составу уравнения.

В табл. 3 приведены результаты вычислений, которые позволяют оценить численную сходимость предложенного метода решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода на примере уравнения (25). Вычисления проведены в предположении, что $h=0.1-0.3i$ и $a=1$. Так как функции $u(y)$ и $u_{n-2}(y)$ нечетные, значения j по-прежнему изменяются от единицы до целой части $n/2$.

Данные, представленные в табл. 3, показывают, что при приближении значений аргумента к концу отрезка $[-1,1]$ модуль погрешности численного метода при $n=9$ и $n=16$ составляет приблизительно 0.15–0.16. По мере удаления от конца отрезка вещественная часть погрешности наряду с мнимой частью постепенно, но немонотонно, приближается к нулю. Так, вещественная часть приближенного решения имеет две-три точные значащие цифры. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений составило 0.1 при $n=9$ и 0.073 при $n=16$. Так же, как и в предыдущих задачах, и по тем же причинам функция $u_{n-2}(y)$ получилась комплексной; мнимая часть функции $u_{n-2}(y)$ естественно и по-прежнему близка к нулю, а вещественная — к $u(y)$.

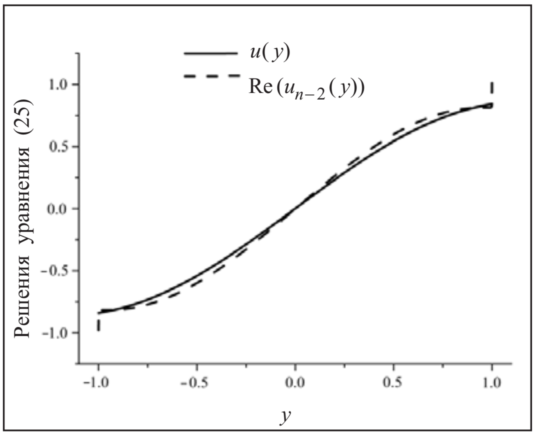

Рис. 3

На рис. 3 представлены графики функций $u(y)$ и $\mathrm{Re}\,(u_{n-2}(y))$, $n=100$. Видно, что в центральной части отрезка $[-1, 1]$ функции графически совпадают, но при отдалении от центра этот эффект ослабевает. Приближенное решение имеет от двух до четырех точных значащих цифр. Так же, как и в предыдущих примерах, с приближением к концу отрезка вещественная часть погрешности растет и ее модуль по-прежнему составляет 0.15–0.16. Среднеквадратическое отклонение модуля разности приближенного и точного решений при $n = 100$ составило 0.043.

Представленные результаты применения численного метода для решения модельного гиперсиснуглярного интегрального уравнения второго рода (25) позволяют оценить численную сходимость метода как среднюю. Замечание о прикладных задачах и средней сходимости метода, необходимой для оценки линейных функционалов, по-прежнему сохраняется; его обеспечивает неравенство (20).

Результаты применения предложенного численного метода для решения модельных задач показывают, что в окрестностях концов отрезка $[-1, 1]$ точное решение и вещественная часть приближенного отличаются на десятые доли единицы. Но по мере приближения к центру отрезка точность возрастает: количество значащих цифр вещественной части приближенного решения увеличивается, а мнимая часть стремится к нулю. На рис. 1 и 2 функции $u(y)$ и $\mathrm{Re}\,(u_{n-2}(y))$ при $n = 100$ графически совпадают всюду, кроме окрестностей концов отрезка, а на рис. 3 видно различие между точным решением и вещественной частью приближенного. Более высокую точность приближенного решения можно получить, увеличивая значение n, однако, как показывают решения задач 1–3, это не позволяет полностью устранить неточности, возникающие вблизи концов отрезка.

В заключение отметим: в статье предложен новый численный метод решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода и дано его обоснование. Проведено доказательство критерия существования и единственности решения данной системы интегральных уравнений. Представлена оценка нормы разности приближенного и точного решений, а также результаты применения предложенного численного метода для решения модельных задач, которые иллюстрируют численную сходимость метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костенко А.В. Математическая модель рассеяния волн импедансной решеткой // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — **51**, № 3. — С. 25–43.
2. Whye-Teong A. Hypersingular integral equations in fracture analysis. — Oxford: Woodhead Publishing House, 2013. — 212 p.
3. Blanchet L., Faye G. Hadamard regularization // Journal of Mathematical Physics. — 2000. — **41**, N 11. — P. 7675–7714.
4. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. — М.: Аргамак-Медиа, 2014. — 256 с.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Учеб. пособие. — Харьков: Изд-во Харьков. нац. ун-та им. В.Н. Каразина, 2001. — 92 с.
6. Лифанов И.К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода // Доклады Академии наук СССР. — 1980. — **255**, № 5. — С. 1046–1050.
7. Хапаев (мл.) М.М. О некоторых методах регуляризации и численного решения интегральных уравнений I-го рода // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1983. — № 7 (254). — С. 81–85.
8. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. — Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 1994. — 288 с.

9. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1995. — **61**, N 5. — P. 345–360.

10. Гандель Ю.В., Кононенко А.С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — **42**, № 9. — С. 1256–1262.

11. Гандель Ю.В., Ерёменко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Часть II. — Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та имени М. Горького, 1992. — 145 с.

12. Костенко А.В. Численный метод решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода // Украинский математический журнал. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1228–1236.

13. Кадец В.М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета. — Харьков: Изд-во Харьков. нац. ун-та им. В.Н. Каразина, 2006. — 607 с.

14. Лифанов И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения: Учеб. пособие. — М.: Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики Московского гос. ун-та им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2006. — 70 с.

15. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации линейных задач. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980. — 231 с.

16. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. — Новосибирск: Наука, 1980. — 121 с.

17. Панасюк В.В, Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.

Надійшла до редакції 06.04.2015

О.В. Костенко

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ ТА ЙОГО ОБҐРУНТУВАННЯ

Анотація. Наведено чисельний метод розв'язування системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь другого роду. Доведено теорему існування та єдиності розв'язку. Отримано оцінку швидкості збіжності наближеного розв'язку до точного.

Ключові слова: система інтегральних рівнянь, чисельний метод, інтеграл у сенсі скінченної частини за Адамаром, існування та єдиність розв'язку, швидкість збіжності.

O.V. Kostenko

A NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF A SYSTEM OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF SECOND KIND

Abstract. A numerical method of solution of a system of hypersingular integral equations of second kind is presented. The existence and uniqueness theorems are proved. The rate of convergence of the approximate solution to the exact one was obtained.

Keywords: system of integral equations, numerical method, integral in sense of Hadamard finite part, existence and uniqueness of solution, convergence rate.

Костенко Алексей Владимирович,
младший научный сотрудник Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, e-mail: alexvladkost@gmail.com, kostenko@ilt.kharkov.ua.