УДК 519.86

А.П. МАХОРТ

ПРО РІВНОВАГУ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ ТА ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЦІН СПОЖИВЧИХ УПОДОБАНЬ

Анотація. *Досліджено відкриту економічну систему, утворену ненасичуваними споживачами. Частина споживачів є водночас і виробниками товарів. Враховано наявність оподаткування суб'єктів економічної системи. Використано принципи рівноваги Вальрасового типу. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про економічну рівновагу у випадку комплексної дії монопольних явищ та впливу цін на формування споживчих уподобань. Наведено обмеження на модельні характеристики, які забезпечують існування рівноваги такої економічної системи. Знайдено стани рівноваги з прийнятними для всіх суб'єктів економічної системи рівнями споживання. Вказано інтервали можливих значень рівноважних характеристик. Відзначено залежність реалізації конкретного стану рівноваги економічної системи від вибору стратегії оподаткування.*

Ключові слова: *рівновага, попит, пропозиція, оподаткування, монополісти, ціноутворення.*

Вступ

Дослідження економічних систем (зокрема національних) дає змогу виявляти чинники, що можуть впливати на подальше функціонування цих систем. Знання чинників впливу має допомогти уникнути реалізації несприятливих сценаріїв.

Є різні напрями економічного моделювання, їх використання обумовлено потребою з'ясування того чи іншого аспекту функціонування економічних систем. Рівноважні підходи ефективні у з'ясуванні причин появи дисбалансів, а також для оцінки можливостей економічного зростання. Один з таких підходів ґрунтується на принципах рівноваги за Л. Вальрасом [1, 2]. Залежно від ситуації на ринку вплив різних чинників на економічну систему може змінюватись. Тому врахування в моделі загальної ринкової рівноваги за Вальрасом додаткових чинників впливу може надати нову інформацію про поведінку економічної системи.

Монополізм істотно впливає на ціноутворення в національних економіках. На ціноутворення впливають і споживчі уподобання. Є й зворотний вплив цін товарів на формування споживчих уподобань [1, 3]. Широкий клас моделей рівноваги пов'язаний з вимогою існування досконалої конкуренції [2], що ставить під сумнів адекватність їх застосування до економічних систем з монополістами. Натомість модель економіки, запропонована у [1], дозволяє це зробити.

Регулювання ринків товарів і послуг здійснюється за допомогою різних важелів впливу, зокрема, кредитуванням, зміною відсоткової ставки. Вплив цих інструментів відображається у кейнсіанських моделях рівноваги, де немає обмеження досконалої конкуренції, але ефекти монополізації економіки враховуються опосередковано. Тоді як у моделі рівноваги Вальрасового типу існує можливість явним чином описати присутність монополістів в економічній системі. Економічні реалії засвідчують, що серед інструментів регулювання діяльності монополістів на перший план виходить стратегія оподаткування. В широкому сенсі до неї можна віднести і такі традиційні засоби впливу на монополістів, як штрафи. Розроблена нами економічна модель у явному вигляді враховує наявність оподаткування.

Водночас розрахунки за цією моделлю стикаються із значними труднощами забезпечення даними, зокрема щодо випуску і споживання кожної позиції товарів і послуг. На національному рівні ситуацію з інформаційним забезпеченням певною мірою рятує практика складання таблиць витрати-випуск, здійснюваного статистичними службами не лише пострадянських країн, але й Німеччини, Великобританії, Японії тощо.

Об’єктом дослідження є національна економічна система, в якій наявні виробники-монополісти. Предметом дослідження – з'ясування умов встановлення рівноваги у такій економічній системі. Метою – виявлення умов усунення негативного впливу явищ монополізму на економічну систему та визначення станів рівноваги, перебування в яких прийнятно для всіх її суб'єктів. Критерієм прийнятності станів рівноваги визначено рівні задоволення потреб суб'єктів економічної системи (отримані зі співвідношення суми всіх запланованих витрат і величини здобутого прибутку для кожного суб'єкта економічної системи). Враховано також вплив цінового фактору на формування споживчих уподобань в національній економічній системі. Цей чинник може змінити характеристики прийнятних станів рівноваги.

1. Опис моделі економічної системи та постановка задачи

Національну економічну систему розглядаємо як сукупність l суб'єктів, кожний з яких прагне здобути певну кількість потрібних йому товарів. Різновидів товарів є n. Частина з l споживачів товарів спроможні виготовляти один з n можливих типів товарів і володіти запасами інших типів товарів. Щоб придбати потрібний їм новий товар, такі суб'єкти економічної системи виставляють на продаж товари (та послуги, які в широкому сенсі також є товарами), виготовлені в процесі свого виробництва, або ж з запасу. В економічній системі є і $l-n$ чистих споживачів, які отримують фінансовий ресурс для придбання потрібних ним товарів виключно із зовнішніх джерел. Засобом утворення зовнішнього фінансування є перерозподіл капіталу, отриманого в результаті оподаткування суб'єктів економічної системи (враховуються всі види оподаткування).

Пропозиція товарів в національній економічній системі матиме структуру

$$\Psi_k = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^{1} - e_k + i_k, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

де $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ – обсяги випуску виготовлених в процесі виробництва товарів і послуг, $\{b_{ki}^{1}\}_{k=1}^{n}$ – обсяги запасу товарів у i-го виробника, $\{a_{kj}\}_{k=1}^{n}$ – витрати на виготовлення одиниці випуску j-го товару, $\{b_{kj}\}_{k=1}^{n}$ – частина витрат виробництва, що використовується для його утримання у працездатному стані (тут враховано амортизаційні витрати і витрати, пов'язані з удосконаленням технологій, та інші, що безпосередньо не стосуються виготовлення товарів), $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ – обсяги експорту товарів за межі національної економічної системи, $\{i_i\}_{i=1}^{n}$ – обсяги імпорту товарів.

В результаті своєї діяльності на ринку виробники можуть дістати чистий (за вирахуванням податків) прибуток, величина якого розраховується за формулою

$$\tilde{D}_j(p) = \pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k + \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^1 p_k, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{n}$ – вектор оподаткування виробників (враховано всі види податків), а $p = \{p_i\}_{i=1}^{n}$ – вектор цін товарів. Оподаткування забезпечить утворення капіталу, який дозволить фінансувати чистих споживачів. Рівні їх прибутків $\left\{\tilde{D}_j(p)\right\}_{j=n+1}^{l}$ формуватимуться відповідно до можливостей перерозподілу

$$\sum_{j=n+1}^{l} \tilde{D}_j(p) = \sum_{j=1}^{n} (1-\pi_j) D_j(p).$$

Інтерес до товарів суб'єктів економічної системи, або ж їх споживчі уподобання, формуватимуть попит на товари в економічній системі. Попит залежить від величини прибутку і може бути записаний у вигляді

$$\Phi_k = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{l} \Lambda_{ik}(p) \tilde{D}_i(p), \qquad k = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Величини $\Lambda_{ik}(p)$ описують попит i-го споживача на k-й товар. Нехай елементи матриці $C(p) = \left\| c_{kj}(p) \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\ \ l}$ визначають потреби суб'єктів економічної системи у нових товарах, в залежності від того, яка ціна цих товарів. Тоді, якщо споживачі є ненасичуваними, тобто планують витратити весь свій прибуток на придбання нових товарів, їх остаточний вибір товарів зі списку бажаних буде наступним (відповідно до того, що $c_{si}(p)$ – це кількість s-го товару, який цікавить i-го споживача)

$$\Lambda_{ik}(p) = \frac{c_{ki}(p) p_k}{\sum_{s=1}^{n} c_{si}(p) p_s}, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{4}$$

Наявність банківських послуг та цінних паперів у списку можливих товарів робить припущення про ненасичуваність споживачів таким, що відповідає економічним реаліям. Ненасичуваність не означає необмеженість споживання. Є максимальний набір бажаних товарів, що ними цікавиться i-й споживач $\left\{c_{ki}^0\right\}_{k=1}^n$, $i=\overline{1,l}$. На склад товарів в цьому наборі вже не впливатиме привабливість їх цін. Так само є і мінімальний набір товарів $\left\{c_{ki}^1\right\}_{k=1}^n$, $i=\overline{1,l}$, потреба в яких зберігатиметься незалежно від рівня ціни. Також вважатимемо, що елементи c_{kj}^1 утворюють матрицю $C^1=\left\|c_{kj}^1\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\;\;l}$ без нульових рядків і стовпчиків та має місце обмеження $c_{kj}^1 \le c_{kj}(p) \le c_{kj}^0$. За вартістю спожитих товарів чистий прибуток суб'єктів економічної системи може бути записаний у вигляді

$$\tilde{D}_j(p)=y_j\sum_{s=1}^n c_{sj}\,p_s, \qquad j=\overline{1,l}. \tag{5}$$

Для виробників вираз (5) має дорівнювати виразу (2). Причому $y=\{y_i\}_{i=1}^l$ є вектором ступенів задоволення потреб споживачів. Він відображає, яку частину товарів з бажаного набору дозволяє придбати величина наявного у споживача прибутку, тому компоненти цього вектора набуватимуть значень з інтервалу $(0,1]$.

Вважатимемо, що економічна система функціонує протягом певного періоду часу. В цьому періоді частина характеристик економічної системи буде заданою, тому що споживачі визначилися зі своїми уподобаннями (їх описують елементи матриць $\left\|c_{kj}^1\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,l}$, $\left\|c_{kj}^0\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,l}$), відомі запаси товарів у виробників $\left\|b_{kj}^1\right\|_{k,\,j=1}^{n}$ та технології виробництва їх товарів, які складаються з виробничих витрат $\left\|a_{kj}\right\|_{k,\,j=1}^{n}$ та амортизаційних і інших витрат $\left\|b_{kj}\right\|_{k,\,j=1}^{n}$. Відомими є і вектори $\{e_i\}_{i=1}^n$ й $\{i_i\}_{i=1}^n$, які описують структуру зовнішньоекономічних зв'язків. Кожен виробник вибудовує свою стратегію поведінки. Серед виробників в економічній системі можуть бути і монополісти (нехай їх кількість $n-t$). Вибрані стратегії поведінки повинні надати виробникам можливість здобути прибуток в результаті своєї діяльності. Монополісти мають змогу впливати на рівень цін своїх товарів. Вважатимемо, що вони будують свої стратегії з огляду на це. Решта виробників такої переваги позбавлені. Їх поведінка ґрунтується на регулюванні обсягів випуску товарів. Тому до заданих характеристик слід додати ще й ціни на товари монополістів $\left(p_{t+1}^0,\ldots,p_n^0\right)$ і обсяги випусків товарів решти виробників $\left(x_1^0,\ldots,x_t^0\right)$. Крім того, рівні оподаткування прибутків $\left(\pi_1^0,\ldots,\pi_t^0\right)$ мають бути відомими суб'єктам економічної системи. Що ж до стратегії оподаткування монополістів, то її розглядатимемо як важіль впливу на монополістів. Решта характеристик економічної системи може змінювати свої значення, відповідно до зміни стану економічної системи.

Для визначення поточного стану економічної системи необхідно, щоб встановилась рівновага, або баланс між попитом і пропозицією. Тоді всі економічні характеристики набувають певних рівноважних значень. Згідно з принципами рівноваги за Вальрасом [1, 2], слід дотримуватися рівності попиту і пропозиції в економічній системі, щоб досягти станів із прибутковим виробництвом для всіх її суб'єктів [1]. Відповідно до виразів (1), (3), (4) і (5) запишемо

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj}(p) y_j = x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^1 - e_k + i_k, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Необхідно також, щоб чистий прибуток виробників компенсував вартість їх витрат

$$\pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} p_k + \pi_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^1 p_k = y_j \sum_{s=1}^{n} c_{sj}(p) p_s, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Поточний стан економічної системи описуватимуть рівні задоволення потреб суб'єктів економічної системи $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, ціни $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, обсяги випусків $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$, рівні оподаткування монополістів $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$, відносно яких і розв'язуватимемо систему рівнянь (6), (7). Серед імовірних станів рівноваги економічної системи визначимо лише ті, перебування в яких буде прийнятним з огляду на рівень задоволення потреб усіх її суб'єктів.

2. Оптимальний стан рівноваги

Наведемо алгоритм визначення рівноважних характеристик. Припустимо, що матриця $A = \left\| a_{kj} \right\|_{k,j=1}^{n}$ нерозкладна, зі спектральним радіусом меншим за одиницю. Введемо матрицю $\left\| d_{kj}(p) \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,l}$ і величини $\{b_i\}_{i=1}^{n}$

$$d_{kj}(p) = \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} c_{sj}(p), \qquad b_k = x_k - \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{si} - \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^1 + e_s - i_s \right].$$

За таких умов рівняння (7) можна подати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{l} d_{kj}(p) y_j = b_k, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Зауважимо, що у виразі (8) частина величин $\left(b_1^0, \ldots, b_t^0\right)$ є заданими. Вважатимемо їх додатними. Тоді припущення щодо структури і властивостей матриць A і $C(p)$ гарантуватиме те, що матричні елементи $d_{kj}(p)$ теж набуватимуть лише додатних значень.

Вимоги щодо матриці A дають змогу трансформувати і вираз (8), який запишемо у формі операторного рівняння

$$p_k = P_k(p), \qquad k=\overline{1,t}, \tag{9}$$

$$P_k(p)=\sum_{j=1}^{t}(E-A)^{-1}_{jk}\left[\sum_{s=t+1}^{n}a_{sj}p_s^0+\frac{y_j}{\pi_j x_j}\sum_{s=1}^{n}c_{sj}(p)p_s+\frac{1}{x_j}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{si}^1)p_s\right], \qquad k=\overline{1,t}.$$

Великі обсяги запасу товарів можуть поставити під сумнів потребу у виробництві таких типів товарів. Щоб запобігти цьому, вважатимемо, що елементи матриці запасу товарів задовольняють нерівностям

$$\frac{y^m}{\pi_j}c_{sj}^1+b_{sj}-b_{sj}^1\ge 0, \qquad j=\overline{1,t}, \quad s=\overline{1,t}.$$

де y^m – найнижчий (заданий) прийнятний для всіх споживачів в економічній системі рівень задоволення потреб.

Припустимо, що рівноважні значення компонентів вектора ступенів задоволення потреб споживачів $(y_1,\dots,y_t)$ описуються рівнянням

$$y_s=\Delta_1(\alpha_s-\lambda_s)+\sum_{k=1}^{t}(\alpha_k-\lambda_k)d_{ks}(p), \qquad s=\overline{1,t}, \tag{10}$$

де величини $\{\alpha_i-\lambda_i\}_{i=1}^{t}$ є розв'язком операторного рівняння

$$\alpha_k-\lambda_k=\tilde{\Theta}_k(p,\alpha_1-\lambda_1,\dots,\alpha_t-\lambda_t), \qquad k=\overline{1,t}, \tag{11}$$

$$\tilde{\Theta}_k(p,\alpha_1-\lambda_1,\dots,\alpha_t-\lambda_t)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{k=t+1}^{n}d_{ks}(p)\alpha_s^1\right)-\frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(p)d_{ji}(p)\right]\times$$
$$\times(\alpha_j-\lambda_j)-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t}d_{kj}(p)(\alpha_j-\lambda_j)+\sum_{j=1}^{t}d_{jk}(p)(\alpha_j-\lambda_j)\right), \qquad k=\overline{1,t}.$$

постійні Δ_0, Δ_1 є заданими, їх значення вибираються з умов

$$\left(\sum_{j=n+1}^{l}d_{kj}-\Delta_1\right)\left(b_k^0-\Delta_0 b_k^0\right)>0, \qquad k=\overline{1,t},$$

$$y^m\left|\sum_{j=n+1}^{l}d_{kj}-\Delta_1\right|\le\left|b_k^0-\Delta_0 b_k^0\right|\le y^M\left|\sum_{j=n+1}^{l}d_{kj}-\Delta_1\right|, \qquad k=\overline{1,t},$$

де y^M – найвищий рівень задоволення потреб споживачів в економічній системі (він є заданий). Заданими є і сукупність параметрів $\left(\alpha_{t+1}^1,\ldots,\alpha_n^1\right)$.

Теорема. Нехай справедлива вимога

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y^M}{\pi_j}c_{sj}^0+b_{sj}-b_{sj}^1\right)<1,$$

а для заданих значень постійних Δ_0, Δ_1 та величин σ^m, σ^M, вибраних з умови

$$y^m\le\sigma^m\left(\Delta_1+\sum_{k=1}^{t}d_{ks}^1\right)\le\sigma^M\left(\Delta_1+\sum_{k=1}^{t}d_{ks}^0\right)\le y^M,\qquad s=\overline{1,t},$$

виконуються нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(b_k^0-\sum_{s=t+1}^{n}d_{ks}^1\alpha_s^1\right)-\frac{\sigma^m}{\Delta_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}d_{ki}^1d_{ji}^1+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{ki}^1+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{ik}^1\right)\le\sigma^M,\qquad s=\overline{1,t},$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(b_k^0-\sum_{k=t+1}^{n}d_{ks}^0\alpha_s^1\right)-\frac{\sigma^M}{\Delta_1^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}d_{ki}^0d_{ji}^0+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{ki}^0+\Delta_1\sum_{i=1}^{t}d_{ik}^0\right)\ge\sigma^m,\qquad s=\overline{1,t}.$$

Тоді існують додатні вектори $\{y_i\}_{i=1}^t$ з компонентами, які перебуватимуть в інтервалі значень $[y^m,y^M]$, $\{\alpha_i-\lambda_i\}_{i=1}^t$ і $\{p_i\}_{i=1}^t$, що розв'язують систему рівнянь (9)–(11).

Доведення. Щоб показати існування розв'язку системи рівнянь (9)–(11), скористаємось принципом Шаудера [4] (про існування нерухомої точки відображення). Оцінимо суму $\sum_{k=1}^{t}P_k(p)$ за умови $y^m\le y_k\le y^M$, $k=\overline{1,t}$

$$\sum_{k=1}^{t}P_k(p)\le\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n}a_{sj}p_s^0+\frac{y_j}{\pi_jx_j^0}\sum_{s=1}^{n}c_{sj}^0p_s+\frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right]\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n}a_{sj}p_s^0+\frac{y^M}{\pi_jx_j^0}\sum_{s=1}^{n}c_{sj}^0p_s+\frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right]\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n}a_{sj}p_s^0+\frac{y^M}{\pi_jx_j^0}\sum_{s=t+1}^{n}c_{sj}^0p_s^0+\frac{1}{x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n}b_{sj}p_s^0\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y^M}{\pi_j}c_{sj}^0+b_{sj}-b_{sj}^1\right)\sum_{s=1}^{t}p_s.$$

В той же час, можна підібрати параметр $\rho_0>0$, для якого матимемо ланцюжок нерівностей

$$P_k(p) \geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y_j}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=1}^{n} c_{sj}^1 p_s + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=1}^{n} c_{sj}^1 p_s + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{sj}^1)p_s\right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y^m}{\pi_j x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^1 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0}\sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0\right] +$$

$$+\rho_0\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{y^m}{\pi_j}c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1\right) \geq \rho_0, \qquad k=\overline{1,t}.$$

Виберемо

$$\frac{\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\left[x_j^0\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0 + \frac{y^M}{\pi_j}\sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj}p_s^0\right]}{1-\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\frac{1}{x_j^0}\max_{s\in[1,t]}\left(\frac{y^M}{\pi_j}c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1\right)} \leq \rho,$$

тоді, якщо справедливі обмеження $y^m \leq y_k \leq y^M$, $k=\overline{1,t}$, оператор $\{P_k(p)\}_{k=1}^{t}$ переводитиме саму в себе компактну опуклу множину

$$\mathsf{P}_y = \left\{p_k \geq \rho_0, \qquad k=\overline{1,t}, \qquad \sum_{k=1}^{t} p_k \leq \rho\right\}.$$

Зауважимо, що відповідно до припущення про властивості матриці попиту $C(p)$ на множині P_y мають виконуватись умови щодо її елементів $c_{kj}^1 \leq c_{kj}(p) \leq c_{kj}^0$, звідки випливатиме обмеження

$$d_{kj}^1 = \sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}c_{sj}^1 \leq d_{kj}(p) \leq d_{kj}^0 = \sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}c_{sj}^0.$$

Тому для кожного вектора з множині P_y на підставі умов теореми можна записати оцінки

$$\tilde{\Theta}_k \leq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}^1\alpha_s^1\right) - \frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^1 d_{ji}^1\right](\alpha_j-\lambda_j) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^1(\alpha_j-\lambda_j) + \sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1(\alpha_j-\lambda_j)\right) \leq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}^1\alpha_s^1\right) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\sigma^m\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^1 + \sum_{j=1}^{t} d_{jk}^1\right) - \frac{1}{\Delta_1^2}\sigma^m\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^1 d_{ji}^1\right] \leq \sigma^M \qquad k=\overline{1,t}$$

$$\tilde{\Theta}_k \geq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0 - \sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}^0\alpha_s^1\right) - \frac{1}{\Delta_1^2}\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^0 d_{ji}^0\right](\alpha_j-\lambda_j) -$$

$$-\frac{1}{\Delta_1}\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^0\left(\alpha_j-\lambda_j\right)+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^0\left(\alpha_j-\lambda_j\right)\right)\geq\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2}\left(b_k^0-\sum_{k=t+1}^{n} d_{ks}^0\alpha_s^1\right)-$$

$$-\frac{1}{\Delta_1^2}\sigma^M\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{ki}^0 d_{ji}^0\right]-\frac{1}{\Delta_1}\sigma^M\left(\sum_{j=1}^{t} d_{kj}^0+\sum_{j=1}^{t} d_{jk}^0\right)\geq\sigma^m,\qquad k=\overline{1,t}.$$

Це означає, що $\forall p\in \mathrm{P}_y$ оператор $\{\widetilde{\Theta}_i(\alpha_1-\lambda_1,\ldots,\alpha_t-\lambda_t)\}_{i=1}^{t}$ переводитиме саму в себе множину

$$\mathrm{M}_p=\left\{\alpha_k-\lambda_k\in R,\quad\left|\frac{\sigma^M+\sigma^m}{2}-\alpha_k+\lambda_k\right|\leq\frac{\sigma^M-\sigma^m}{2},\quad k=\overline{1,l}\right\}.$$

За таких умов компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{t}$, визначені виразом (10), міститимуться в потрібному інтервалі значень

$$y^m\leq\Delta_1\sigma^m+\sigma^m\sum_{k=1}^{t} d_{ks}^1\leq y_s\leq\Delta_1\sigma^M+\sigma^M\sum_{k=1}^{t} d_{ks}^0\leq y^M,\qquad s=\overline{1,t}.$$

Теорему доведено.

Рівняння вигляду (11) з'являються в процесі розв'язання оптимізаційної задачі [5]

$$\min_{(y_1,\ldots,y_n)}\mathrm{F}^0(p),\qquad \mathrm{F}^0(p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_j(p)-y_j\right]^2,\tag{12}$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_j+\Delta_1 y_k=\Delta_0 b_k^0,\qquad k=\overline{1,t}.\tag{13}$$

де величини $\{\beta_i(p)\}_{i=1}^{n}$ подаються виразами

$$\beta_s(p)=\Delta_1\alpha_s+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks}(p),\qquad s=\overline{1,t},$$

$$\beta_s(p)=\Delta_0\alpha_s^1+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k d_{ks}(p),\qquad s=\overline{t+1,n}.$$

Функція Лагранжа оптимізаційної задачі (12), (13) матиме вигляд

$$\mathrm{L}^0(p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_j(p)-y_j\right]^2+\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\left[\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(p)y_j+\Delta_1 y_k-\Delta_0 b_k^0\right].$$

Відповідно, перевірка необхідних і достатніх умов існування мінімуму призведе до умови

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\mathrm{L}^0(p)}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{y}_i\mathrm{y}_j=\sum_{s=1}^{n}\mathrm{y}_s^2>0,$$

яка виконується для довільно вибраного ненульового вектора $(\mathrm{y}_1,\ldots,\mathrm{y}_n)$, та до появи рівнянь

$$\frac{\partial\mathrm{L}^0(p)}{\partial y_s}=y_s-\beta_s(p)+\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\left(\Delta_1\delta_{ks}+d_{ks}(p)\right)=0,\qquad s=\overline{1,n},\tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}^0(p)}{\partial \lambda_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(p) y_j + \Delta_1 y_k - \Delta_0 b_k^0 = 0, \qquad k = \overline{1,t}. \tag{15}$$

З рівностей (14), (15) і отримаємо рівняння відносно множників Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1}^{t}$ (11).

Щодо рівноважних значень компонентів вектора ступенів задоволення потреб споживачів $\left(y_{t+1},\ldots,y_n\right)$, то вони отримуються з виразу (14).

Для того, щоб вони містились у потрібному діапазоні значень $[y^m, y^M]$ достатньо виконання умови, наведеної у публікації [5]

$$y^m - \Delta_0 \alpha_s^1 \le \sigma^m \sum_{k=1}^{t} d_{ks}^1 \le \sigma^M \sum_{k=1}^{t} d_{ks}^0 \le y^M - \Delta_0 \alpha_s^1, \qquad s = \overline{t+1,n},$$

Для знаходження решти компонентів $\{y_i\}_{i=n+1}^{l}$ використовуємо екстремальну задачу

$$\min_{(y_{n+1},\ldots,y_l)} \mathrm{F}^1(p), \qquad \mathrm{F}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{l} \left[\beta_j(p) - y_j\right]^2, \tag{16}$$

за додаткових вимог

$$b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k = \sum_{j=n+1}^{l} d_{kj}(p) y_j, \qquad k = \overline{1,t}, \tag{17}$$

$$y^m \le y_k \le y^M, \qquad k = \overline{n+1,l}. \tag{18}$$

Існує додатний вектор $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^{t}$, за якого величини $\{\beta_i(p)\}_{i=1}^{n}$ описуються виразом

$$\beta_s = \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^1 d_{ks}(p), \qquad s = \overline{n+1,l},$$

а задача (16)–(18) розв'язна [5]. Рівноважні значення ступенів задоволення потреб чистих споживачів $\{y_i\}_{i=n+1}^{l}$ визначаються формулою

$$y_s = \sum_{k=1}^{t} d_{ks}(p) \sum_{j=1}^{t} \tilde{\mu}_{kj}^{-1} \left(b_j^0 - \Delta_0 b_j^0 + \Delta_1 y_j\right), \qquad s = \overline{n+1,l},$$

де p – рівноважний вектор цін, $\{y_i\}_{i=1}^{t}$ – рівноважні ступені задоволення потреб споживачів, а $\left\|\tilde{\mu}_{kj}^{-1}\right\|_{k,j=1}^{t}$ – матриця, обернена до $\left\| \sum_{i=n+1}^{l} d_{ki}(p) d_{ji}(p) \right\|_{k,j=1}^{t}$.

Зауважимо, що компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ одночасно задовольняють рівнянням (13) і (17), тому вони задовольнятимуть і рівнянню (8).

Рівноважні обсяги випуску товарів монополістами $\left(x_{t+1},\ldots,x_n\right)$ однозначно визначаються за рівноважними цінами і ступенями задоволення потреб споживачів

$$x_k = \sum_{j=1}^{l} d_{kj}(p) y_j + \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{si} - \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^1 + e_s - i_s \right], \qquad k = \overline{t+1,n}.$$

Гарантувати їх додатні значення можна, у випадку виконання умови

$$x_k^m = y^m \sum_{j=1}^{l} d_{kj}^1 + \sum_{s=1}^{n} (E-A)_{ks}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{si} - \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^1 + e_s - i_s \right] > 0, \qquad k = \overline{t+1, n}.$$

Ступені задоволення потреб споживачів є розв'язком оптимізаційних задач, і в цьому сенсі знайдені рівноважні характеристики описують оптимальний стан рівноваги економічної системи. Його реалізацію можна забезпечити вибором стратегії оподаткування кожного з монополістів. З виразу (7) отримаємо,

$$\pi_j = \frac{\sum_{s=1}^{t} c_{sj}(p) y_j p_s + \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}(p) y_j p_s^0}{p_j^0 x_j - \sum_{k=1}^{t} \left(a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1 \right) p_k - \sum_{k=t+1}^{n} \left(a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1 \right) p_k^0}, \qquad j = \overline{t+1, n}. \quad (19)$$

Визначимо межі можливих значень рівноважних характеристик. Умови теореми допускають існування додатного розв'язку рівняння (7) з матрицею $C(p) = \left\| c_{kj}^0 \right\|_{k=1,\, j=1}^{n,\ \ l}$ і вектором $y = y^M$. Для цього розв'язку $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$ вираз (7) можна переписати у вигляді

$$p_k = \sum_{s=1}^{n} \tilde{G}_{sk}[n, y^M, c^0] p_s, \qquad k = \overline{1, n},$$

$$\tilde{G}_{sk}[\kappa, \theta, \xi] = \sum_{j=1}^{\kappa} (E-A)_{jk}^{-1} \left[\frac{\theta}{\pi_j x_j} \xi_{sj} + \frac{1}{x_j} (b_{sj} - b_{sj}^1) \right], \qquad s, k = \overline{1, n}.$$

Вектор цін додатний, тому, згідно з теоремою Перрона (про існування власного вектора з додатними компонентами, який відповідає найбільшому власному значенню), спектральний радіус матриці $\left\| \tilde{G}_{sk}[n, y^M, c^0] \right\|_{k,s=1}^{n}$ дорівнюватиме одиниці. З властивостей невід'ємних матриць [7], що ґрунтуються на оцінках $\tilde{G}_{sk}[n, y, c^0] \geq \tilde{G}_{sk}[t, y^M, c^0]$, $\quad k, s = \overline{1, t}$, випливає, що спектральний радіус матриці $\left\| G_{sk}(n, x) \right\|_{k,s=1}^{t}$ буде меншим за одиницю. Тому справедливе відображення

$$p_k(y^M, c^o) = \sum_{j=1}^{t} (E - G[t, y^M, c^o])_{jk}^{-1} \sum_{s=t+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{t} (E-A)_{ij}^{-1} a_{si} + G_{sk}[t, y^M, c^o] \right) p_s^0,$$

$$k = \overline{1, t},$$

На підставі цього відображення отримуємо оцінки щодо можливих значень рівноважних цін

$$p_k^M = p_k(y^M, c^o) \geq p_k \geq p_k^m = p_k(y^m, c^1), \quad k = \overline{1, t}.$$

Можна отримати граничні оцінки і для рівнів оподаткування монополістів. Згідно із функціональною залежністю величин $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$ у виразі (19) від елементів матриці $C(p)$, компонентів векторів p, y, x, запишемо

$$\Pi_j(\xi,\eta,\theta,\chi)=\frac{\theta\sum_{s=1}^{t}\xi_{sj}\eta_s+\theta\sum_{s=t+1}^{n}\xi_{sj}p_s^0}{p_j^0\chi_j-\sum_{k=1}^{t}\left(a_{kj}\chi_j+b_{kj}-b_{kj}^1\right)\eta_k-\sum_{k=t+1}^{n}\left(a_{kj}\chi_j+b_{kj}-b_{kj}^1\right)p_k^0}, \qquad j=\overline{t+1,n}.$$

Тоді значення рівнів оподаткування i-го монополіста перебуватимуть в межах інтервалу $[\Pi_i(c^1,p^m,y^m,x^M),\Pi_i(c^0,p^M,y^M,x^m)]$, де величини

$$x_k^M=y^M\sum_{j=1}^{l}d_{kj}^0+\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{si}-\sum_{j=1}^{n}b_{sj}^1+e_s-i_s\right], \qquad k=\overline{t+1,n}.$$

визначатимуть верхні границі рівноважних значень обсягів випуску товарів і послуг монополістами, а $x^m=\{x_i^m\}_{i=t+1}^{n}$, відповідно, – нижні границі.

Висновки

В результаті здійсненого дослідження були узагальнені раніше отримані результати [1, 3, 6] стосовно врахування впливу цін товарів і послуг на формування споживчих уподобань суб'єктів національної економічної системи, що ставить елементи матриці попиту такої системи у моделі Вальрасового типу в залежність від вектора цін.

На відміну від [1], в нашій версії моделі враховано наявність монополістів в національній економічній системі.

У [3] нами розглядався випадок заданих рівнів задоволення потреб споживачів. У [6] нами досліджена рівновага у випадку матриці попиту спеціального вигляду $C(p)=\left\|c_{kj}f_k^0(p)\right\|_{k=1,\,j=1}^{n,\;\;l}$. Тепер же ми пропонуємо визначати рівні задоволення потреб споживачів з умови економічної рівноваги.

Запропонований алгоритм визначення характеристик станів рівноваги національної економічної системи дає змогу з'ясувати умови функціонування всіх суб’єктів економічної системи в прийнятному для них режимі, із запобіганням проявам потенційно негативних впливів монопольних явищ. Наведено засіб реалізації (вибір стратегії оподаткування) прийнятних станів рівноваги.

Наведені результати можуть бути застосовані до аналізу реальних економічних систем. Зокрема, у [8] зазначено, як пов'язати модельні економічні характеристики (в тому числі й елементи матриці попиту) зі статистичними даними, зібраними за міжнародною методикою системи національних рахунків (відомою в Україні також як таблиця витрати-випуск), які описують економіку України, та виконані деякі сценарні розрахунки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гончар М.С. Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар – К.: Ін-т теор. фізики, 2007, – 464 с.
2. Debreu G. Existence of competitive equilibrium. Handbook of Mathematical Economics / Debreu G. / ed. by K.J. Arrow and M.D. Intriligator. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. – vol. II. – P. 698–742.

3. Махорт А.Ф. О влиянии зависимости структуры потребления товаров от цены на равновесие в экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ, 2015. – № 2. – С. 52–61.
4. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М.: Наука, 1977, – 442 с.
5. Махорт А.П. Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 4.
6. Махорт А.П. Вплив монополізму та оподаткування на економічну систему / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 3. – С. 30–44.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер – М.: Наука, 1966, – 576 с.
8. Махорт А.Ф. О влиянии потребительских предпочтений на равновесие в открытой экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – № 4. – С. 11–28.

Стаття надійшла до редакції 19.07.16.