

МАТЕМАТИЧНІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 532.543

П.С. ВЕНГЕРСЬКИЙ, О.М. ТРОФИМЧУК

АНАЛІЗ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДЛЯ ОПИСУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В НАСИЧЕНІЙ ЗОНІ ҐРУНТУ

***Анотація.** У даній роботі для опису процесу фільтрації розглянуто два підходи: гідравлічний і гідродинамічний. Показано, на основі яких припущень отримуються системи диференціальних рівнянь для цих двох підходів. Сформульовано початково-крайові задачі, що описують процеси фільтрації для цих підходів. Побудовано варіаційні задачі, які розв'язувались методом скінченних елементів з використанням схеми лінеаризації при дискретизації по часу та схеми Гальоркіна для дискретизації по просторових змінних. Побудовано і проаналізовано чисельну схему розв'язку нелінійного рівняння фільтрації при гідравлічному підході, якщо коефіцієнт п'єзопровідності залежить від невідомої величини. Особливістю гідродинамічної моделі є врахування густини фільтруючої рідини, що важливо при дослідженні фільтрації стисливих рідин, а також при напірній фільтрації води з великими значеннями тиску.*

***Ключові слова:** основні рівняння фільтрації, напірний рух, рівняння Бусінеска, густина, тиск, потік рідини, п'єзометричний напір, швидкість фільтрації, схема Гальоркіна, метод скінченних елементів, однокрокова рекурентна схема, лінеаризація.*

Вступ

Важливим питанням для життя та діяльності людини є ефективне використання водних ресурсів планети. Для передбачення імовірних наслідків використання та управління водними ресурсами, необхідно вивчати та моделювати цикл кругообігу води в природі. Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. Гідрологічні системи складаються з багатьох взаємопов'язаних між собою етапів кругообігу води на планеті. В загальному дослідження цілої такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, що бере участь в кругообігу води. Важливим процесом для дослідження є етап фільтрації [13–15], оскільки він вагомо залежить від решти етапів гідрологічної системи, таких як випадання опадів, русловий стік, потік в

озерах і водоймах тощо. Також процес фільтрації безпосередньо залежить від діяльності людини (меліорація, будівля гідроспоруд та інше), тому його вивчення дає можливість зрозуміти процес формування ґрунтових вод і передбачувати наслідки діяльності людини. Моделі для опису фільтрації води в різних шарах ґрунту відрізняються одна від одної забезпеченістю даними, можливістю перевірки на адекватність в реальних умовах. Для опису процесу фільтрації пропонується два основних підходи: гідравлічний та гідродинамічний [1–5].

При гідравлічному підході в області фільтрації виділяють елементарний об'єм, для якого записують рівняння балансу притоку та відтоку води [6–9]. Для отримання рівняння, що описує процес фільтрації, використовують граничний перехід, коли виділений об'єм ґрунту прямує до нуля. Отримане рівняння називають рівнянням Буссінеска. За допомогою даного рівняння можна знайти скалярну характеристику потоку фільтрації – п'езометричний тиск. Для опису часткових видів фільтрації на основі рівняння Буссінеска будують його спрощені формулювання, які відомі в літературі під назвами рівнянь планової та профільної фільтрації.

При використанні гідродинамічного підходу для отримання рівнянь, що описують процес фільтрації, застосовується підхід механіки суцільного середовища до опису руху середовища [2, 6]. Отримані рівняння називають основними рівняннями фільтрації. Невідомими величинами, що входять в дані рівняння, є п'езометричний тиск, швидкість та густина потоку фільтрації. Важливо, що в цій моделі враховується густина фільтруючої рідини, яка є невідомою величиною при дослідженні фільтрації стисливих потоків.

З огляду на те, що для багатьох задач фільтрації є характерна наявність вільної поверхні [1, 3, 5], наводиться побудова та дискретизація варіаційної задачі фільтрації. Для побудови дискретизованої задачі використовувалась схема Гальоркіна та однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі [14]. Отриману дискретизовану задачу можна розв'язати методом скінченних елементів [12, 16], який дозволяє знаходити вигляд змінної області визначення задачі в часі без її перерозбиття на скінченні елементи [16].

Розглянемо основні рівняння двох різних підходів, які використовуються для побудови математичних моделей процесу фільтрації рідини в ґрунті.

1. Геометрична модель ґрунтового шару

Проведемо вертикальну декомпозицію області задачі – ця область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху (рис. 1). В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов.

На рис. 1 введено наступні позначення:

$\eta = \eta(x, y)$, $\eta_0 = \eta_0(x, y)$ – відмітки поверхні землі та поверхні водопідпору;

$M = M(x, y)$ – потужність водоносного пласту для напірного руху;

$H = H(x, y)$ – рівень ґрунтової води (для напірного руху – п'езометричний напір).

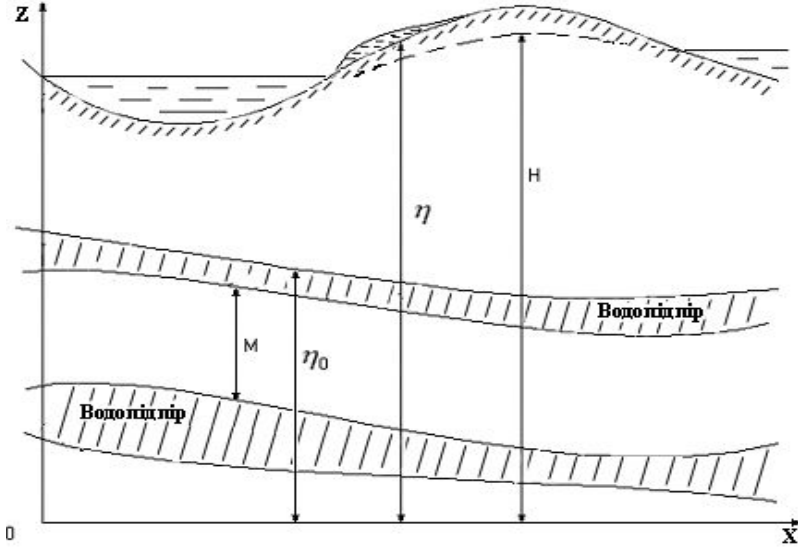


Рисунок 1 – Вертикальний розріз розглядуваної області задачі

2. Опис задачі фільтрації при гідравлічному підході

Спочатку сформулюємо рівняння, отримані при гідравлічному підході. Це так звані рівняння планової або профільної фільтрації. Опишемо для них постановку початково-крайової та варіаційної задач.

2.1 Формулювання початково-крайової задачі фільтрації

Рух ґрунтової води описується моделлю, основою на рівнянні Буссінеска [4, 5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + E, \text{ в області } \Omega \times (0; T] \\ H|_{t=0} = H_0(x, y); \\ -K \nabla H \cdot \vec{n} = \bar{q}, \text{ на } \Gamma = \partial \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

де

$$K = K(x, y, t) = \begin{cases} k_s(\eta(x, y) - \eta_0(x, y)), & H(x, y, t) \geq \eta(x, y) \\ k_s(H(x, y, t) - \eta_0(x, y)), & \eta_0(x, y) < H(x, y, t) < \eta(x, y) \\ 0, & H(x, y, t) \leq \eta_0(x, y) \end{cases}$$

де $H = H(x, y)$ – рівень ґрунтової води (для напірного руху – п’єзометричний напір);

$\mu = \mu(x, y)$ – коефіцієнт питомої водовіддачі;

$K = K(x, y, t)$ – коефіцієнт рівнепровідності для безнапірного руху або п’єзопровідності для напірного руху;

$k_s = k_s(x, y)$ – коефіцієнт фільтрації, залежить від типу ґрунту;

$E = E(x, y, t)$ – відома функція джерел притоку води;

$q^* = q^*(x, y)$ – відома функція розходу потоку.

Для коефіцієнтів задачі виконуються наступні включення:

$$\begin{cases} \mu, \eta, \eta_0, k_s \in L^\infty(\Omega); H_0 \in L^2(\Omega); \\ E \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

Невідомою величиною в (1) виступає функція $H = H(x, y, t)$.

Рівняння задачі (1) запишемо так:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s (\Psi - \eta_0(x, y)) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_s (\Psi - \eta_0(x, y)) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + E,$$

де

$$\Psi = \begin{cases} \eta(x, y), & H(x, y, t) \geq \eta(x, y) \\ H(x, y, t), & \eta_0(x, y) < H(x, y, t) < \eta(x, y) \\ \eta_0(x, y), & H(x, y, t) \leq \eta_0(x, y) \end{cases}$$

Якщо $\Psi = \eta(x, y)$ або $\Psi = \eta_0(x, y)$, то рівняння є параболічного типу, коли $\Psi = H(x, y, t)$, то рівняння стає нелінійним відносно функції H .

2.2 Варіаційне формулювання задачі фільтрації

Прийmemo такі позначення:

$$\begin{aligned} m(H', v) &= \iint_{\Omega} \mu H' v d\Omega; \\ a(\Psi, H, v) &= \iint_{\Omega} k_s (\Psi - \eta_0(x, y)) \nabla H \cdot \nabla v d\Omega; \\ K(H) &\equiv K(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ \langle l(t), v \rangle &= \iint_{\Omega} E v d\Omega - \int_{\Gamma} q^* v d\gamma, \end{aligned}$$

тоді варіаційна задача запишеться так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } H_0 \in L^2(\Omega), l \in L^2(0, T; V'); \\ \text{знайти функцію } H \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(H', v) + a(\Psi, H, v) = \langle l(t), v \rangle; \quad \forall v \in V \\ m(H(0) - H_0, v) = 0 \end{array} \right.$$

де

$$\Psi = \begin{cases} \eta(x, y), & H(x, y, t) \geq \eta(x, y) \\ H(x, y, t), & \eta_0(x, y) < H(x, y, t) < \eta(x, y); \\ \eta_0(x, y), & H(x, y, t) \leq \eta_0(x, y) \end{cases}$$

$V := \{v \in H^1(\Omega)\}$; $V' := \{v \in H^{-1}(\Omega)\}$ є простір допустимих функцій та спряжений до нього простір.

2.3 Напівдискретизація Гальоркіна

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів $\{V_h\}$ із простору V таку, що

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim V_h = N(h) \rightarrow \infty, \quad \text{при } h \rightarrow 0 \\ \bigcup_{h>0} V_h \text{ щільно вкладене в } V, \text{ тобто :} \\ \forall v \in V \quad \forall \delta > 0 \exists h > 0, v_h \in V_h : \|v - v_h\| \leq \delta \\ \{\varphi_i\}_{i=1}^N \text{ - базис простору } V_h \end{array} \right.$$

тоді напівдискретизована задача запишеться так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } h > 0, H_0 \in L^2(\Omega), l \in L^2(0, T; V'); \\ \text{знайти функцію } H_h \in L^2(0, T; V_h) \text{ таку, що} \\ m(H_h'(t), v) + a(\Psi_h, H_h(t), v) = \langle l(t), v \rangle; \quad \forall v \in V_h \\ m(H_h(0) - H_0, v) = 0 \end{array} \right.$$

де

$$\Psi_h = \begin{cases} \eta(x, y), & H_h(t) \geq \eta(x, y) \\ H_h(t), & \eta_0(x, y) < H_h(t) < \eta(x, y) \\ \eta_0(x, y), & H_h(t) \leq \eta_0(x, y) \end{cases}$$

Оскільки ми прийняли, що $H_h \in L^2(0, T; V_h)$, то функцію H_h ми можемо розкласти за базисом цього простору:

$$H_h(t) = \sum_{k=1}^N H_k(t) \varphi_i(x, y).$$

Тепер задача звелась до відшукування коефіцієнтів

$$H(t) = \{H_k(t) \in L^2(0, T)\}_{k=1}^N.$$

2.4 Дискретизація за часовою змінною

Розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ на $(N_T + 1)$ рівних частин

$$[t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, N_T + 1.$$

Для дискретизації по часу використаємо однокрокову рекурентну схему

$$H_{h\Delta t}(t) = H_h^j + \Delta t \omega(t_j, t) \dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}}; \quad t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, N_T \quad (2)$$

$$\text{де } \dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}} = \frac{H_h^{j+1} - H_h^j}{\Delta t}.$$

Тут невідомими в (2) виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функції H_h в моменти часу t_j, t_{j+1} , тобто H_h^j, H_h^{j+1} .

Для апроксимації лінійного функціоналу використаємо кусково-постійні апроксимації:

$$\langle l_{\Delta t}, v \rangle = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v \rangle = \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), v \rangle, \quad t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2} \Delta t, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \quad (3)$$

Отже, тепер приймаємо, що $H_h(t) \cong H_{h\Delta t}(t), \langle l(t), v \rangle = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v \rangle$ і (2)

підставляємо ці апроксимації в напівдискретизовані рівняння та початкову умову. Після підстановки ми отримаємо рівняння з залежністю від часу. Для того щоб позбутись цієї залежності, з отриманих рівнянь будемо проєкційні рівняння.

Початкова умова дає нам рівняння для знаходження початкового наближення H_h^0 :

$$m(H_h^0 - H_0, v) = 0, \quad \forall v \in V_h,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано параметри } \Delta t > 0, \theta > 0 \text{ та } H_h^0 \in V_h; \\ \text{знайти } H_h^{j+1} \in V_h \text{ таку, що} \\ m(H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}}, v) + \theta \Delta t \tilde{a}(\Psi_h, H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}}, v) = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v \rangle - a(\Psi_h, H_h^j, v); \forall v \in V_h, \\ H_h^{j+1} = H_h^j + \Delta t H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}}; j = 0, \dots, N_T - 1 \end{array} \right.$$

тут

$$\tilde{a}(\Psi_h, H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}}, v) = \begin{cases} \iint_{\Omega} \Psi_h \nabla H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}} \cdot \nabla v d\Omega, & H(x, y, t) \geq \eta(x, y) \\ \iint_{\Omega} H_h^{j+\frac{1}{2}} \nabla H_h^{\bullet j+\frac{1}{2}} \cdot \nabla v d\Omega, & H(x, y, t), \eta_0(x, y) < H(x, y, t) < \eta(x, y) \\ 0, & H(x, y, t) \leq \eta_0(x, y) \end{cases}$$

$$\theta = \frac{(\xi, \omega(t_j, t))}{(\xi, 1)},$$

де $\xi(t) \in L^2((t_j, t_{j+1}))$, (\cdot, \cdot) скалярний добуток в $L^2((t_j, t_{j+1}))$ і функція задовольняє умові $(\xi, 1) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) dt \neq 0$.

2.5 Аналіз властивостей варіаційної задачі

Варіаційні задачі виду (1) та (3) є варіаційними задачами, побудованими для рівнянь параболічного типу, тому вони є коректно поставлені [16]. Варіаційна задача у виді (2) є побудована для нелінійного диференціального рівняння. Для цієї задачі виведена нерівність

$$\| H(t) \|_H \leq \| H(0) \|_H + \int_0^t \left\{ \| E \|_H + \| q^* \|_{L^2(\Gamma)} \right\} dt,$$

яка показує існування розв'язку та його залежність від початкових даних задачі.

3. Гідродинамічний підхід для отримання рівнянь фільтрації

Для отримання рівнянь, що описують процес фільтрації, застосовується підхід механіки суцільного середовища до опису руху середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями фільтрації [6–11].

3.1 Побудова математичної моделі

Для побудови математичної моделі використаємо основні рівняння фільтрації:

– рівняння збереження енергії [5, 6]:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{k} \mathbf{v} + \nabla h = 0, \quad (4)$$

де $h = \frac{p}{\rho g} + z$ – п'єзометричний тиск,

та

– рівняння збереження маси:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho n) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (4) та (5) утворюють систему чотирьох скалярних рівнянь з п'ятьма невідомими v_x, v_y, v_z, h, ρ , тому для замикання цієї системи рівнянь їх необхідно доповнити рівнянням стану рідини. Загальний вид рівняння стану виберемо у вигляді (6), в якому задається залежність густини рідини фільтрації від тиску:

$$\rho = \rho(p). \quad (6)$$

Одним з прикладів аналітичного вигляду рівняння стану рідини [6] може бути

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p - p_0)}, \quad (7)$$

де ρ_0, p_0 – деякі початкові значення густини та тиску відповідно, β – певна задана функція, яка залежить від типу рідини.

Використавши (7), виразимо залежність тиску та п'єзометричного напору від густини рідини. Ці залежності мають вигляд (8) та (9) відповідно:

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (8)$$

$$h = \frac{1}{\rho g} \left(p_0 + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right) + z. \quad (9)$$

Виключивши з (4) та (5) тиск та п'єзометричний тиск, приходимо до замкнутої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{k} \mathbf{v} + f(\rho) \nabla \rho + \vec{i}_3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho n) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \text{ в } \Omega \times [0, T], \quad (10)$$

де

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right).$$

3.2 Постановка початково-крайової задачі

Розглянемо (10) в певній області $\Omega \subset R^3$ на проміжку часу $(0; T]$.

В (10) шуканими величинами виступають швидкість $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ та густина $\rho = \rho(x, y, z)$.

Доповнимо (10) початковими та крайовими умовами:

$$\begin{cases} \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^* \\ \rho|_{t=0} = \rho^* \end{cases} \text{ в } \Omega. \quad (11)$$

Крайову умову виберемо у вигляді

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = q^* \text{ на } \Gamma_1 \subset \partial \Omega, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \partial \Omega. \quad (12)$$

В загальному випадку область фільтрації Ω є трьохвимірною областю. Приймаючи, що параметри фільтраційного потоку є незмінні вздовж

горизонтального виміру, будемо розглядати двохвимірну область фільтрації $\tilde{\Omega}$, що є вертикальним перерізом області Ω (див. рис. 2).

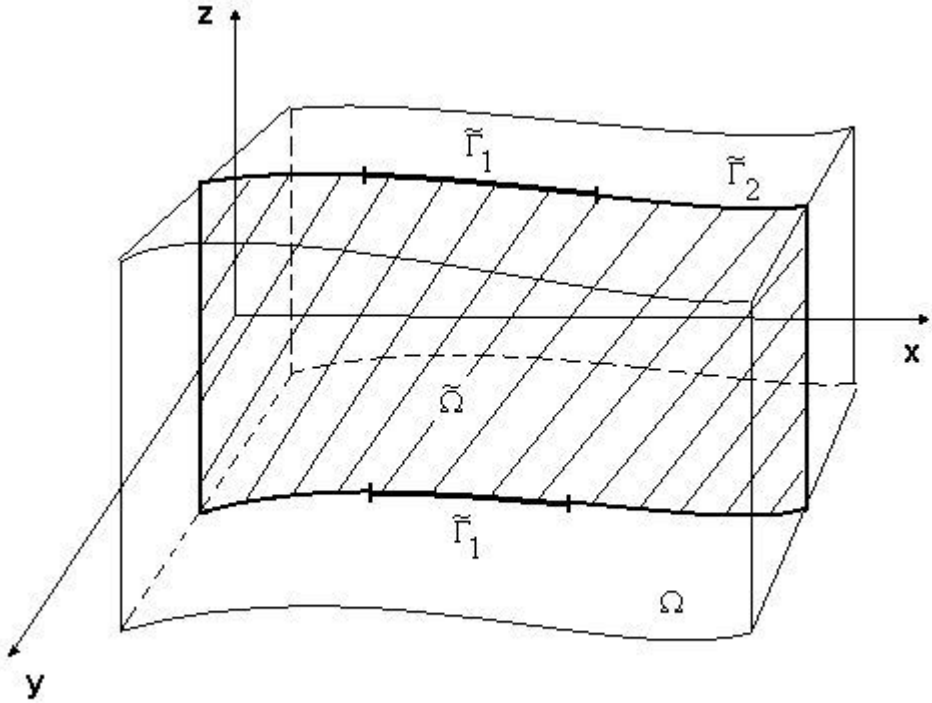


Рисунок 2 – Область фільтрації Ω

Запишемо математичну постановку задачі для області $\tilde{\Omega} \subset R^2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{k} \mathbf{v} + f(\rho) \nabla \rho + \bar{i}_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho n) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad \text{в } \tilde{\Omega} \times [0, T) \quad (13)$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right)$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^* \\ \rho|_{t=0} = \rho^* \end{cases} \quad \text{в } \tilde{\Omega}. \quad (14)$$

Крайові умови:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = q^* \text{ на } \tilde{\Gamma}_1 \subset \tilde{\partial\Omega}, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \subset \tilde{\partial\Omega}. \quad (15)$$

3.3 Варіаційне формулювання задачі

Варіаційна постановка задачі (13)-(15) має формулювання:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } \mathbf{v}_0, \rho_0 \in L^2(\tilde{\Omega}), l \in L^2(0, T; V_2'). \\ \text{Знайти } \mathbf{v} \in L^2(0, T; V_1), \rho \in L^2(0, T; V_2) \text{ такі, що} \\ \frac{1}{g}(\mathbf{v}', \varphi) + \frac{1}{k}(\mathbf{v}, \varphi) + (\mathbf{i}_2, \varphi) + b(f(\rho), \nabla \rho, \varphi) = 0; \quad \forall \varphi \in V_1 \\ ((\rho n)', \psi) - b_n(\rho; \mathbf{v}, \psi) = \langle l, \psi \rangle; \quad \forall \psi \in V_2 \\ (\mathbf{v}(0) - \mathbf{v}_0, \phi) = 0, \\ (\rho(0) - \rho_0, \psi) = 0, \end{array} \right. \quad (16)$$

де V_2' – спряжений до V_2 простір.

Форми, що входять в (16), мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \langle l, u \rangle &= \int_{\Gamma_1} \{q^* u\} d\gamma, \\ b(c; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\tilde{\Omega}} \{c \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\tilde{\Omega}, \\ b_n(c; \mathbf{u}, v) &= b(c; \mathbf{u}, \nabla v) - \int_{\Gamma_2} \{c \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\gamma, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\tilde{\Omega}} \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

3.4 Напівдискретизація Гальоркіна

Виберемо послідовність щільно вкладених скінченновимірних просторів

$\{V_h^1\} \subset V_1$ та $\{V_h^2\} \subset V_2$ таких, що $\dim V_h^i = N(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty, i = 1, 2$.

Розкладемо шукані величини за базисом вибраних відповідних скінченновимірних просторів:

$$\mathbf{v}_h(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k(t) C_i(x, y), \quad (17)$$

$$\rho_h(t) = \sum_{k=1}^N \rho_k(t) L_i(x, y),$$

тоді напівдискретизована варіаційна задача задачі (16) запишеться наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } h > 0, \mathbf{v}_0, \rho_0 \in L^2(\tilde{\Omega}), l \in L^2(0, T; V_2'). \\ \text{Знайти } \mathbf{v}_h \in L^2(0, T; V_h^1), \rho_h \in L^2(0, T; V_h^2) \text{ такі, що} \\ \frac{1}{g}(\mathbf{v}_h', \varphi) + \frac{1}{k}(\mathbf{v}_h, \varphi) + (\mathbf{i}_2, \varphi) + b(f(\rho_h), \nabla \rho_h, \varphi) = 0; \quad \forall \varphi \in V_1. \\ ((\rho_h', \psi) - \frac{1}{n}(\rho_h; \mathbf{v}_h, \psi) - \langle l, \psi \rangle; \quad \forall \psi \in V_2 \\ (\mathbf{v}_h(0) - \mathbf{v}_0, \phi) = 0, \\ (\rho_h(0) - \rho_0, \psi) = 0, \end{array} \right. \quad (18)$$

Враховавши (17), очевидно, що розв'язання задачі (16) звелось до відшукування коефіцієнтів $\mathbf{v}_h(\mathbf{t}), \rho_h(t)$ з (18).

3.5 Дискретизація задачі за часовою змінною

Розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ на $(N_T + 1)$ рівних частин $[t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, N_T + 1$.

Застосувавши до (18) однокрокову рекурентну схему дискретизації в часі, метод побудови проекційного рівняння [16] та знехтувавши нелінійними доданками порядку $O(\Delta t^2)$, перейдемо до дискретизованої рекурентної системи рівнянь.

Задано параметри $\Delta t > 0, \theta > 0$ та $h > 0, \mathbf{v}_h^0, \rho_h^0 \in L^2(\tilde{\Omega}), l \in L^2(0, T; V'_2)$.

Знайти $\mathbf{v}_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2(0, T; V_h^1), \rho_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2(0, T; V_h^2)$ такі, що

$$\begin{aligned}
 & \Delta t \frac{1}{g} v_m^{j+\frac{1}{2}}(\mathbf{i}_m, \varphi) + \frac{1}{k} v_m^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta(\mathbf{i}_m, \varphi) + \rho_i^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta b(f(\rho), L_i, \varphi) = \\
 & -(\mathbf{i}_2, \varphi) - \frac{1}{k} v_m^j(\mathbf{i}_m, \varphi) - \rho_i^j b(f(\rho), L_i, \varphi); \quad \forall \varphi \in V_1 \\
 & \rho_i^{j+\frac{1}{2}} (n_m^{j+1} + \theta \Delta t n_m^{j+\frac{1}{2}})(L_i L_m, \psi) - \\
 & \Delta t \theta (\rho_i^{j+\frac{1}{2}} v_m^j + v_m^{j+\frac{1}{2}} \rho_i^j) b_n(L_i; C_m, \psi) = \\
 & \langle l_{j+\frac{1}{2}}, \psi \rangle - \rho_i^j n_m^{j+\frac{1}{2}}(L_i L_m, \psi) + \rho_i^j v_m^j b_n(L_i; C_m, \psi); \quad \forall \psi \in V_2
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_h^{j+1} &= \mathbf{v}_h^j + \Delta t \mathbf{v}_h^{j+\frac{1}{2}}; \quad j = 0, \dots, N_T - 1; \\
 \rho_h^{j+1} &= \rho_h^j + \Delta t \rho_h^{j+\frac{1}{2}}; \quad j = 0, \dots, N_T - 1
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{h\Delta t}(t) &= \mathbf{v}_h^j + \Delta t \omega(t_j, t) \mathbf{v}_h^{j+\frac{1}{2}}; \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T, \\
 \mathbf{v}_h^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{v}_h^{j+1} - \mathbf{v}_h^j}{\Delta t},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{h\Delta t}(t) &= \rho_h^j + \Delta t \omega(t_j, t) \rho_h^{j+\frac{1}{2}}; \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T, \\
 \rho_h^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\rho_h^{j+1} - \rho_h^j}{\Delta t},
 \end{aligned}$$

$$\langle l_{\Delta t}, v \rangle = \langle l_{j+\frac{1}{2}}, v \rangle = \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), v \rangle, \quad t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2} \Delta t, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Невідомими в (19) виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функцій \mathbf{v}_h, ρ_h в момент часу t_{j+1} , тобто $\mathbf{v}_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$. Значення

v_h^{j+1}, ρ_h^{j+1} знаходяться за допомогою рекурентної формули, стартові значення для якої v_h^{j+1}, ρ_h^{j+1} ми отримуємо з початкових умов задачі (18).

Висновки

Результати застосування побудованих чисельних схем апробовувалися на тестових прикладах [1–5]. Спочатку в задачі планової фільтрації вибиралася поверхня, яка завжди знаходиться над рівнем поверхні ґрунту. В цьому випадку рівняння вихідної задачі перетворюється в параболічне рівняння. Праву частину було підібрано так, що можна знайти аналітичний розв’язок вихідного рівняння. Було досліджено в [1] норму абсолютної похибки в $L^2(\Omega)$. Також було досліджено квадратичний порядок збіжності апроксимаційної схеми по просторових змінних. Далі дані тестової задачі було підібрано так, щоб точки поверхні ґрунтових вод лежали між поверхнею землі та водопідпором. Для цього випадку проаналізовано норму зміни відносної похибки і було показано, що також витримується квадратична збіжність для наближення розв’язку по просторових змінних. Побудовані чисельні схеми апробовувалися на класичному тестовому прикладі фільтрації ґрунтової води через насипну дамбу. Цей приклад поєднує в собі два види руху – напірний та безнапірний, бо на одній частині області відбувається рух під поверхнею, а на іншій – рух з вільною поверхнею. Межі області напірної та безнапірної фільтрації змінювалися з часом. Швидкість протікання процесу фільтрації залежить від типу ґрунту. Порівняння отриманих результатів підтверджує фізичне трактування коефіцієнта фільтрації. Видно, що фільтрація води в ґрунті з більшим коефіцієнтом фільтрації відбувається скоріше, ніж в ґрунті з меншим. При тестуванні чисельних схем ми знаходимо невідому величину, яка в області напірного руху характеризує п’езометричний напір, а в області безнапірного руху – вільну поверхню ґрунтової води. У випадку лінійної фільтрації для визначення швидкості фільтраційного потоку було використано закон Дарсі і було показано, що критерій застосування закону Дарсі визначається числом Рейнольдса, яке змінюється від 0 до 7.9. Також було перевірено виконання закону збереження для об’єму рідини в області фільтрації. Нехтуючи змінами потоку рідини в розглядуваній області, можемо стверджувати про наближену рівність значень п’езометричного тиску і глибини.

Таким чином, в даній роботі розроблено уточнені постановки початково-крайових та варіаційних задач фільтрації ґрунтової води, виходячи з рівняння Буссінеска. Показано і обґрунтовано постановку задачі у випадку залежності коефіцієнта фільтрації від невідомої величини п’езометричного тиску. Для цієї задачі доведена нерівність, яка показує існування розв’язку та його залежність від початкових даних задачі. Проведено лінеаризацію дискретизованої задачі в часі і використано ефективні методи для розв’язування системи лінійних рівнянь.

Авторами виведено систему основних рівнянь фільтрації ґрунтової води із загальних законів збереження енергії, маси і стану рідини відносно невідомого вектора швидкості і густини потоку. Сформульовано постановки

початково-крайової та варіаційної задач. Особливістю цієї гідродинамічної моделі є врахування густини фільтруючої рідини, що важливо при дослідженні фільтрації стисливих рідин, а також при напірній фільтрації води з великими значеннями тиску.

Перспективи дослідження таких постановок можна очікувати у чисельному порівнянні розглянутих різних підходів фільтрації рідини. Також необхідно враховувати зміни нахилів поверхонь водопідпору та ґрунтового покриву. Цікавим було дослідити підвищення порядку апроксимацій в апроксимаційних схемах за часом та просторовими змінними, це привело б до уточнення значень рівня ґрунтової води та зменшення норми похибки обчислень. Також точність обчислень суттєво збільшилася б у використанні ефективних інтервальних ітераційних методів розв'язування систем нелінійних проекційних рівнянь. Дослідження динаміки зміни глибини ґрунтової води необхідно було б апробувати на тестових прикладах, близьких до реальних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Венгерський П.С. Чисельне дослідження задач фільтрації ґрунтової води в насиченій зоні / П.С. Венгерський, О.Р. Демкович // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип. 6. – Львів, 2003. – С. 106–116.
2. Венгерський П.С. Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті / П.С. Венгерський, О.Р. Демкович // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 15 – 2009. – С. 170–177.
3. Венгерський П.С. Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і ґрунтових вод з території водозбору / П.С. Венгерський // Математичне та комп'ютерне моделювання. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. Вип. 10. – 2014. – С. 33–42.
4. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування задачі руху ґрунтової води в насиченій зоні / П.С. Венгерський, О.Р. Демкович // Восьма Всеукраїнська наукова конференція 25–27 вересня 2001 р. “Сучасні проблеми прикладної математики”. Львів, 2001. – С. 19.
5. Венгерський П.С. Використання гідродинамічного підходу для моделювання задач руху рідини в ґрунті. / П.С. Венгерський, О.Р. Демкович // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. Львів, 2005. – С. 125.
6. Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем с примерами из электроэнергетики. – М.; 1976.
7. Корявов П.П. Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна. // Вод.ресурсы. 1981. № 3 – С. 54–64.
8. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. – Ленинград; 1980.
9. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев; 1991.
10. Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. – Киев; 1977.
11. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.; 1977.
12. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. – Львів; 1999.
13. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. – К.:Наукова думка – 1990 – 222 с.
14. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах, АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – Киев; 1991.

15. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К.:Наукова думка – 2003. – 232 с.
16. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: НМК ВО, 1991 – 87 с.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2016