

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СТАТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ З ДИНАМІКИ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Д.К. ЗІМЕНКОВ, А.М. СІЛЬВЕСТРОВ, О.М. СКРИННИК

Розглянуто застосування методу побудови нелінійних статичних залежностей в нелінійних динамічних електротехнічних об'єктах з метою оптимізації режимів їх функціонування. Метод побудови містить дві складові: 1) визначення непараметричної моделі статичної нелінійності з довільної динаміки об'єкта з подальшою кусково-аналітичною її ідентифікацією; 2) об'єднання часткових моделей у повну з використанням аналітичних у всьому діапазоні селективних функцій замість неаналітичних сигнум-функцій. Наведено ряд прикладів використання запропонованої методики для ідентифікації та оптимізації електротехнічних об'єктів: генератора і двигуна постійного струму як ланки системи автоматичного керування та сонячної батареї.

### ВСТУП

Спираючись на фундаментальні властивості об'єктів реального світу, а саме на закон взаємозв'язку всього з усім, можна стверджувати про відсутність ідеально-лінійної залежності між змінними стану реальних об'єктів, оскільки коефіцієнти зв'язку між ними через загальний взаємозв'язок елементів матеріального світу, будучи матеріальними, безпосередньо чи опосередковано залежатимуть від змінних стану об'єкта. Ця нелінійність разом з природною нестационарністю, невизначеністю та неавтономністю об'єктів матеріального світу суттєво ускладнює класичну задачу їх ідентифікації [4] і, як наслідок, задачу оптимального функціонування електротехнічних систем «об'єкт – підсистема керування». Як приклад деякі електротехнічні системи та задачі їх оптимізації подано в таблиці.

Електротехнічні системи та задачі їх оптимізації

№ з/п	Об'єкт управління	Мета керувальної підсистеми
1	Генератор постійного струму	Інваріантність напруги $U_{\text{я}}$ генератора постійного струму до збурення, яке змінює струм якоря $I_{\text{я}}$
2	Електродвигун постійного струму	Інваріантність швидкості $\Omega$ обертання вала електродвигуна постійного струму до зміни моменту $M_{\text{н}}$ навантаження
3	Сонячна батарея	Забезпечення режиму максимальної потужності сонячної батареї в умовах нестационарності сонячної інтенсивності

Для вирішення завдань, наведених в таблиці, необхідно побудувати нелінійні залежності «вхід–вихід» об'єктів керування, визначити зворотні моделі «вихід–вхід», які дають змогу лінеаризації системи керування і, отже, спростити задачу оптимізації функціонування цих систем.

**Мета роботи** — урахування властивості реальних об'єктів [1], необхідно на основі методів ідентифікації нелінійних об'єктів [1; 2] побудувати їх прями та інверсійні математичні моделі і використати їх у задачі лінеаризації характеристик системи «об'єкт–регулятор» та оптимізації режиму їх роботи.

**Розв'язання задачі.** Розв'язання поставлених в таблиці задач досягається на підставі трикрокового алгоритму:

- 1) із довільної динаміки об'єкта визначається непараметрична оцінка моделі статичної нелінійності [1; 3];
- 2) визначається кусково-аналітична нелінійна залежність;
- 3) кусково-аналітична нелінійність перетворюється в аналітичну у всьому діапазоні змінних об'єкта [2].

### ВИЗНАЧЕННЯ ГЛАДКОЇ СТАТИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ З ДОВІЛЬНОЇ ДИНАМІКИ ОБ'ЄКТА

Подамо динаміку нелінійного електротехнічного об'єкта моделлю Гамерштейна [4]:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)], \quad (1)$$

де  $f[x(t)]$  — статична нелінійна залежність від будь-якого вхідного сигналу  $x(t)$ .

Задача полягає у згладжуванні зашумлених вимірювань виходу  $\hat{y}(t_k)$  і отриманні оцінки  $\hat{f}(x)$  невідомої статичної нелінійності  $f(x)$ . Для визначення непараметричної моделі  $\hat{f}[x(t)]$  гладкої статичної нелінійності  $f[x(t)]$  визначаємо скомпенсований вихід об'єкта  $y_{\text{ск}}$ , наприклад, для  $n = 2$ , у такому вигляді:

$$y_{\text{ск}}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \quad (2)$$

де параметри  $\beta_1, \beta_2$  визначаються за умови мінімуму критерію гладкості [3], тобто мінімуму середнього квадрата  $r$ -ї похідної від  $\hat{y}(t)$  за  $x$ :

$$(\beta_1, \beta_2) = \arg \min \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r y_{\text{ск}}(t_k)}{dx^r} \right)^2. \quad (3)$$

Для дискретних вимірювань  $\hat{y}(t_k)$  вихідної змінної замість  $r$ -ї похідної за  $x$  використовуємо відповідну різницю дискретної послідовності  $x(t_k)$ , яка вимірюється зі сталим кроком у часі  $\Delta t$  і перетворюється у послідовність зі сталим прирощенням  $\Delta x$ , але вже зі змінним кроком у часі. Для цього згладжуємо шуми у вхідній та вихідній послідовностях вимірювань, упорядковуємо значення вхідної змінної  $x(t_k)$  за зростанням. Далі для визначення значень  $t_j$ , які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполяцію отриманої послідовності за допомогою сплайнів:

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}], \quad x \in [t_k, t_{k+1}].$$

Значення  $t_{jk}$ , які відповідають  $j\Delta x$ :

$$t_{jk} = t_k + \frac{1}{2c_k} \left( -m_k + \sqrt{m_k^2 + 4jc_k\Delta x} \right), \quad j = \overline{1, l_k}, \quad l_k = [x(t_{k+1}) - x(t_k)].$$

Після визначення усіх  $t_{jk}$  обчислюємо значення  $\hat{y}(t_{jk}), d\hat{y}(t_{jk})/dt$  і  $\frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}$ . Замість похідних за  $x$  використовуємо скінченні різниці:

$$\Delta^r y_{\text{ск}} = \Delta^r \left[ \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \quad (4)$$

Так, для  $r = 2$

$$\Delta^2 y_{\text{ск}} = [y_{\text{ск}}(t_{k+2}) - 2y_{\text{ск}}(t_{k+1}) + y_{\text{ск}}(t_k)] / (\Delta x)^2.$$

Мінімізація (3) за  $\beta_1, \beta_2$  функціонала (4) приводить до системи нормальних рівнянь методу найменших квадратів (МНК):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left[ \Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2 \right] \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} = 0, \\ \sum_{k=1}^N \left[ \Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2 \right] \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

За визначенням із системи рівнянь (5) МНК-оцінок параметрів  $\beta_1, \beta_2$  непараметричну модель гладкої статичної нелінійності визначаємо за формулою

$$\hat{f}[x(t)] = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \quad (6)$$

де права частина рівняння (6) — це  $y_{\text{ск}}(t)$  у виразі (2).

### ПОБУДОВА АНАЛІТИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ $f(x)$ ДЛЯ ВСЬОГО ДІАПАЗОНУ $x$

Отримана на попередньому кроці непараметрична модель (6) за теоремою Вейерштрасса [5] може бути апроксимована степеневим поліномом. Однак, якщо степінь полінома досить високий, то в проміжках між дискретними вимірюваннями можуть бути істотні пульсації, а для невисокого степеня — істотні похибки апроксимації. Щоб забезпечити бажану точність апроксимації, нелінійність  $f(x)$  описують кусково-аналітичними моделями з логікою переходу від однієї області до сусідньої за допомогою негладких селективних сигнум-функцій. Це ускладнює подальше їх диференціювання в точках переходу. Сутність методу [3] опису непараметричних моделей параметричними, аналітичними в усьому діапазоні зміни  $x$ , полягає в застосуванні для кусково-аналітичних моделей замість сигнум-функцій гладких (диференційованих) селективних функцій, подібних до частотних фільтрів, якщо замість частоти мати змінну  $x$ . Тоді аналітичний вираз  $f(x)$  набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) f_i(x),$$

де  $f_i(x)$  — прості і досить точні локальні моделі  $f(x)$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\eta_i(x)$  — аналітичні для всього діапазону селективні для інтервалу  $[x_{i-1}, x_i]$  функції, наприклад:

$$\eta_i(x) = \frac{1}{1 + (x_{i-1}/x)^m} - \frac{1}{1 + (x/x_i)^m}. \quad (7)$$

За досить великих значень  $m$  селективні аналітичні функції-«фільтри» (7) наближаються до сигнум-функцій

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i], \end{cases} \quad (8)$$

залишаючись на відміну від (8) диференційованими.

## ПРИКЛАДИ ІДЕНТИФІКАЦІ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТАХ

### Забезпечення інваріантності напруги $u_{я}$ до струму $i_{я}$ якоря генератора постійного струму

Рівняння генератора постійного струму (ГПС) являє собою модель, подібну до моделі (1) з нелінійністю  $E_{я}(I_3)$ :

$$\begin{cases} U_{я} = E_{я}(I_3) - I_{я} R_{я}, \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} + I_3(t) R_3 = U_3(t), \end{cases}$$

де  $R_{я}$  — електричний опір якоря ГПС;  $L_3, R_3, I_3$  — відповідно індуктивність, опір і струм кола збудження магнітного потоку, від якого нелінійно залежить електрорушійна сила якоря  $E_{я}$ .

Згідно з вище наведеними методами отримано (рис. 1, а) аналітичну функцію в усьому діапазоні моделі нелінійності  $E(I_3)$ :

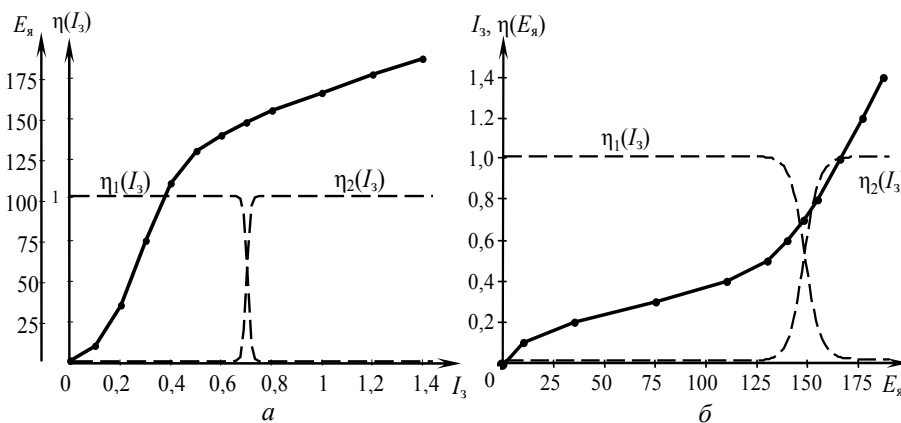


Рис. 1. Графіки залежності: а —  $E_{я}(I_3)$  (точки) та її апроксимація (лінія); б —  $I_3(E_{я})$  (точки) та її апроксимація (лінія)

$$E(I_3) \cong (\beta_0 + \beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3) \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 I_3) \eta_2(I_3), \quad (9)$$

$$\eta_1(I_3) = (1 + (1,43 \cdot I_3)^{40})^{-1}, \quad \eta_2(I_3) = (1 + (0,7 I_3^{-1})^{40})^{-1}. \quad (10)$$

Параметри  $(\beta_0, \dots, \beta_4)$  параметричної моделі (9) отримано за МНК з непараметричної моделі (рис. 1, а), а непараметричну — з умови (3).

Для компенсації інерційності і лінеаризації каналу керування ГПС по-спідовно ввімкнено інверсну до моделі (9), (10) коректувальну ланку (КЛ) (рис. 2). Символом  $p$  на рис. 2 позначено операцію диференціювання. Інверсна до залежності (9) модель  $\hat{I}_3(E_{\text{я}})$  (рис. 1, б) є розв'язком рівняння (9) відносно  $I_3$ :

$$\hat{I}_3(E_{\text{я}}) = \hat{I}_{31}(E_{\text{я}}) \eta_1(E_{\text{я}}) + \hat{I}_{32}(E_{\text{я}}) \eta_2(E_{\text{я}}),$$

де

$$\begin{aligned} \hat{I}_{31}(E_{\text{я}}) = & \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}} + \\ & + \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} - \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}}, \\ \hat{I}_{32}(E_{\text{я}}) = & \frac{E_3 - \beta_3}{\beta_4} - \frac{\beta_3}{\beta_4}, \end{aligned}$$

$$\eta_1(E_{\text{я}}) = (1 + (0,0067 \cdot E_{\text{я}})^{40})^{-1}, \quad \eta_2(E_{\text{я}}) = (1 + (150 \cdot E_{\text{я}}^{-1})^{40})^{-1}.$$

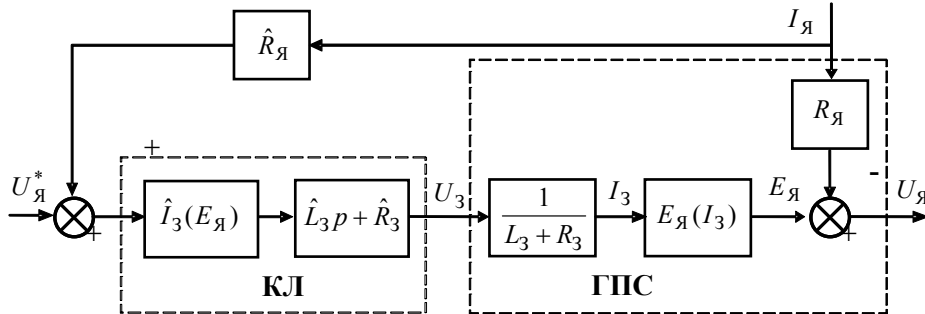


Рис. 2. Лінеаризована та інваріантна до збурення  $I_{\text{я}}$  система розімкненого керування ГПС

Як випливає з рівнянь (9), (10) ГПС і (11), (12) КЛ, якщо оцінки  $\hat{L}_3, \hat{R}_3, \hat{R}_{\text{я}}, \hat{E}_{\text{я}}(I_3)$  близькі до дійсних значень параметрів об'єкта, то в системі (рис. 2) відбувається лінеаризація каналу керування — компенсація інерційності залежності дії струму  $I_3(U_3)$  і  $I_{\text{я}}$  — як збурювального впливу  $I_{\text{я}}$ :

$$U_{\text{я}} = U_{\text{я}}^* - (R_{\text{я}} - \hat{R}_{\text{я}}) I_{\text{я}}.$$

**Забезпечення інваріантності швидкості обертання вала двигуна постійного струму до моменту навантаження як збурювального фактора**

Інваріантність швидкості обертання вала забезпечується аналогічно забезпеченню інваріантності напруги в генераторі постійної напруги. Розглянемо лише спосіб визначення з динаміки статичної нелінійної залежності швидкості  $\Omega(t)$  обертання вала двигуна постійного струму  $U_{\text{я}}$ . Модель (1) двигуна постійного струму має вигляд

$$a_2 \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = f[U_{\text{я}}(t)],$$

де  $U_{\text{я}}$  змінюється східчасто від  $-U_{\text{я max}}$  до  $+U_{\text{я max}}$ :

$$U_{\text{я}}(t) = U_{\text{max}} \left[ -1 + \frac{1}{q/2} \sum_{k=1}^q 1(t - k\Delta t) \right], \quad q = 16, \quad 1(t - k\Delta t) = \begin{cases} 1, & t > k\Delta t; \\ 0, & t < k\Delta t. \end{cases}$$

Числові значення параметрів  $a_1, a_2$  невідомі. Параметри тестувального впливу  $U_{\text{я}}(t)$ :  $U_{\text{max}} = 120 \text{ В}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$ . Початкові умови:  $\Omega(0) = -\Omega_{\text{max}} = -300 \text{ рад/с}$ ,  $d\Omega(0)/dt = 0$ . Вихідний сигнал вимірюється з кроком  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ ,  $(k = \overline{1, N})$ ,  $N = 200$  з 10%-ю похибкою типу білого шуму.

Процес ідентифікації  $f[U_{\text{я}}(t_k)]$  складається з таких кроків:

- згладжування вхідних  $[U_{\text{я}}(t_k)]$  та вихідних  $\hat{y}_k$  змінних, що вимірюються;
- розміщення значень  $U_{\text{я}}(t_k)$  у порядку їх зростання;
- інтерполяція цих значень сплайнами;
- визначення моментів часу  $t_k$ , які відповідають рівномірному змінюванню  $U_{\text{я}}(t_k)$  зі сталим кроком  $\Delta U$ ;
- обчислення значень  $\hat{y}(t_k)$ , кінцевих різниць першого та другого порядків від цих значень;
- отримання оцінок  $\hat{a}_1 = 0,0196$ ,  $\hat{a}_2 = 0,000134$  з мінімізації за  $\beta_1, \beta_2$

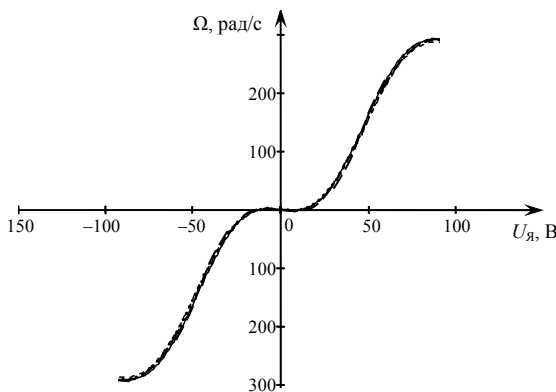


Рис. 3. Непараметрична оцінка  $f(U_{\text{я}})$  статичної нелінійності  $\Omega(U_{\text{я}})$  за методом компенсації динаміки для  $r = 2$  унаслідок симетрії  $\Omega(U_{\text{я}})$  беруться за модулем  $U_{\text{я}}$ .

функціонала (3).

Непараметрична модель нелінійності  $f(U_{\text{я}})$  за формулою (6):

$$f[U_{\text{я}}(t_k)] = y(t) - 0,0196 \frac{dy(t)}{dt} - 0,000134 \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

Результати ідентифікації для  $r = 2$  у виразі (4) подано на рис. 3. Похибка апроксимації менша за 0,5%. Параметрична модель буде подібною до моделі (9). Вагові функції  $\eta_1, \eta_2$

## ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОЇ ПОТУЖНОСТІ СОНЯЧНОЇ БАТАРЕЇ

У системі «сонячна батарея – навантаження» оптимальне керування (у сенсі зняття максимальної потужності) полягає в регулюванні опору навантаження  $R_H$  залежно від електрорушійної сили  $E$  і струму  $I$  батареї, які у свою чергу залежать від освітлення, повільна зміна якого в часі має випадковий характер. Статистично оптимальна система, налаштована на найбільш імовірну освітленість, буде малоефективною. Максимальна ефективність досягається, якщо періодично за дуже короткий час визначати з динаміки вольт-амперну характеристику (ВАХ)  $U(I)$  батареї і відповідно до неї регулювати  $R_H$ . Для цього батарея за допомогою електронних ключів на дуже малий час відключається від навантаження і підключається до котушки індуктивності  $L$  з малим додатковим опором  $R_D$ , з якого знімається напруга, пропорційна струму  $i(t)$ . Сигнали напруги  $u(t)$  і струму  $i(t)$  (рис. 4) фіксуються і обробляються швидкодіючим електронним пристроєм, який на основі наведених вище методів визначає ВАХ  $U(I)$ , максимум  $U^*I^*$  потужності  $UI$  і відповідно до нього оптимальний опір  $R_H^*$ :

$$R_H^* = \frac{U^*}{I^*}. \quad (11)$$

Вимірювання  $u(t)$  і  $i(t)$  (рис. 4, а) містять шумову складову, динамічну коливальну складову на початку процесу розряду батареї на  $R_D L$ -навантаження (коливальність пов'язана з паразитною ємністю  $C_0$ ), систематичну майже сталу похибку  $\Delta U$ , зумовлену впливом на  $u(t)$  опору паралельної батареї  $R_D L$ -гілки:

$$\Delta U = E - \frac{E \frac{1}{R_{BH}} + L \frac{di}{dt} \frac{1}{R_D}}{\frac{1}{R_{BH}} + \frac{1}{R_D}}.$$

За досить великої сталої  $L/R_D$  спостережувана частина експоненти струму котушки має лінійний характер, тому похідна  $di/dt$  є сталою.

Непараметричну модель ВАХ  $U(I)$  (рис. 4, б) і параметричну модель, що збігається з нею, отримано відповідно до розглянутих алгоритмів непараметричної та параметричної ідентифікації:

$$U(I) = \eta_1(I)(\alpha_1 + \alpha_2 I^2) + \eta_2(I)(\beta_1 + \beta_2 I + \beta_3 I^2), \quad (12)$$

де  $\eta_1(I) = \frac{1}{1 + (0,67 \cdot I)^{45}}$ ,  $\eta_2(I) = \frac{1}{1 + (1,5 \cdot I^{-1})^{45}}$ ,  $\alpha_1 = 20$ ,  $\alpha_2 = -1,06$ ,  $\beta_1 = -315$ ,  $\beta_2 = 432$ ,  $\beta_3 = -140$ .

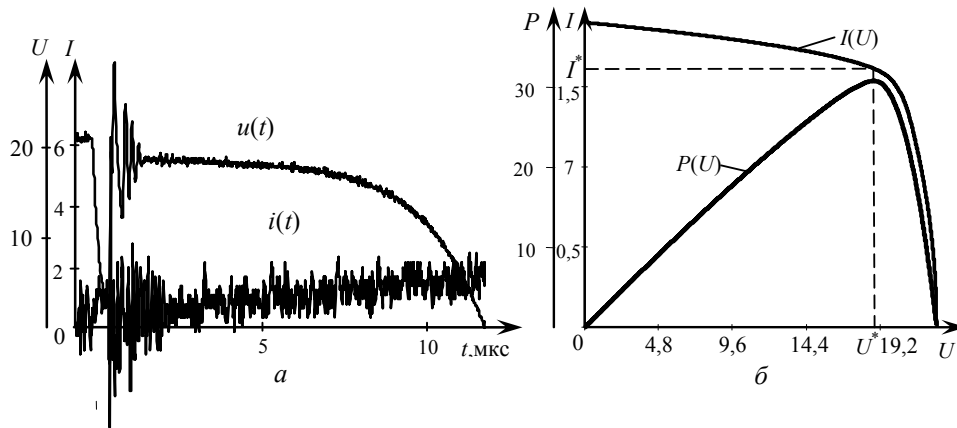


Рис. 4. Графіки: а — вимірювань  $u(t)$  і  $i(t)$ ; б — непараметрична і параметрична (12) моделі ВАХ  $I(U)$  та залежність  $P(U)$

Аналітичну модель залежності потужності  $P$  від  $U$  будемо як добуток  $U(I)$  (12) на струм  $I$  (рис. 4, б). Оптимальне значення  $I^*$  струму, визначене за умови максимальної потужності батареї,  $I^* = \arg \max_U P = 1,56$  А, оптимальне навантаження (11)  $R_H^* \cong 12,3$  Ом, максимальна потужність  $P_{\max} = 29.9$  Вт.

## ВИСНОВОК

Як проілюстровано на прикладах, розглянуті методи непараметричної ідентифікації нелінійності відображення «вхід–вихід» з довільних динамічних режимів та параметричної ідентифікації кусково-аналітичних з перетворенням у цілком аналітичну модель у реальних умовах нестационарності, невизначеності та нелінійності об'єктів ідентифікації дають змогу забезпечити оптимальність функціонування відповідних електротехнічних систем.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Самсонов В.В. Нариси з теорії ідентифікації / В.В. Самсонов, А.М. Сільвестров. — К.: НУХТ, 2012. — 222 с.
2. Сільвестров А.М. Застосування теорії фільтрів для аналітичного опису логіко-аналітичних залежностей / А.М. Сільвестров, О.М. Скринник, Г.І. Кривобока // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2013. — № 2. — С. 64–69.
3. Пухов Г.Е. Модели технологических процессов / Г.Е. Пухов, Ц.С. Хатиашвили. — К.: Техніка, 1974. — 200 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем / Л. Льюнг; пер с англ.; под ред. Я.З. Цыпкина. — М.: Наука, 1991. — 432 с.
5. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1974. — 831 с.

Надійшла 15.05.2015