УДК 004.492

Я. О. Каліновський[1], Ю. Є. Боярінова[1,2], А. С. Сукало[1]
[1]Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна
[2]Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, 03113 Київ, Україна

Побудова представлень логарифмічної функції в одному класі комутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності

Розглянуто процес побудови одного класу комутативних гіперкомплексних числових систем (ГЧС) четвертої вимірності за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда. Синтезовано представлення експоненціальної і логарифмічної функцій від гіперкомплексної змінної у цьому класі, та застосовано ці методи в інших класах комутативних ГЧС.

Ключові слова: *гіперкомплексна числова система, експоненціальна функція, логарифмічна функція, процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда.*

Вступ

Серед широкого спектра гіперкомплексних числових систем, у тому числі четвертої вимірності, в них можна виділити некомутативні та комутативні системи відносно операції множення [1]. Незважаючи на таку відмінність, комутативні та некомутативні системи мають багато спільних властивостей. Зокрема, в обох цих класах ГЧС можливо побудувати представлення нелінійностей, у тому числі й логарифмічної, що вже зроблено для системи кватерніонів [2]. У [3–6] досліджено зв'язки систем цього класу з узагальненими кватерніонами.

Побудові представлень логарифмічної функції від гіперкомплексної змінної присвячено й ряд інших робіт. У роботі [7] побудовано представлення логарифма від кватерніона як функції, що обернена до експоненціальної [8, 10].

Моделювання представлень деяких функцій у конкретній гіперкомплексній системі дає можливість її застосування для вирішення практичних задач. Саме тому авторами було вирішено побудувати представлення логарифмічної функції в новому класі комутативних ГЧС четвертої вимірності, які є результатом комутативного подвоєння систем комплексних $\boldsymbol{C}$, подвійних $\boldsymbol{W}$ та дуальних чисел $\boldsymbol{D}$ за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда (ГК-процедури) [11].

Як буде показано далі, для побудови представлень таких нелінійностей потрібно виконувати складні математичні перетворення та вирішення рівнянь із символьними коефіцієнтами. Саме тому автори використали метод автоматизованих обчислень за допомогою середовища символьних обчислень Maple. Таким чином, вдалося значно спростити виконання поставлених завдань і скоротити час розрахункових операцій.

Аналіз побудови комутативного класу ГЧС

Побудуємо клас гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності за допомогою ГК-процедури.

Аналогічно, як у випадку некомутативного подвоєння [4], будемо позначати процес подвоєння системи $\Gamma_1(e,m)$ системою $\Gamma_2(f,2)$ так:

$$Д_k(\Gamma_1(e,m),\Gamma_2(f,2))=\Gamma_3(g,2m),$$

де $Д_k$ — комутативний оператор подвоєння, а $2m$ — вимірність одержаної у результаті подвоєння ГЧС Γ_3. $2m$ елементами базису g будуть всілякі добутки елементів базисів e та f:

$$g=\{e_1f_1,e_1f_2,e_2f_1,...,e_mf_2\}.$$

Згідно з ГК-процедурою ми представляємо довільне число із будь-якої *подвоюваної системи* Γ_1 у вигляді [11]

$$z=a_1e_1+a_2e_2,$$

де e_1 — одиничний базисний елемент, а $e_2{}^2=-1,+1,0$ для систем ***C***, ***W*** та ***D*** відповідно. У загальному випадку можемо записати:

$$e_2{}^2=\alpha e_1\ \alpha\in\{-1,\ +1,\ 0\}. \tag{1}$$

На наступному кроці ГК-процедури розглядаємо гіперкомплексні числа із системи Γ_2, яку називатимемо *системою, що подвоює*:

$$u=z_1f_1+z_2f_2, \tag{2}$$

де f_1 — одиничний базисний елемент, а $f_2{}^2=-1,\ +1,\ 0$. Аналогічно з (1) можна записати:

$$f_2{}^2=\beta f_1,\ \ \beta\in\{-1,\ +1,\ 0\}. \tag{3}$$

Причому f_2 комутує з e_2, тобто:

$$f_2e_2=e_2f_2. \tag{4}$$

Тоді (2) матиме вигляд:

$$u = \left(a_1e_1 + a_2e_2\right) f_1 + \left(a_3e_1 + a_4e_2\right) f_2 = a_1e_1f_1 + a_2e_2f_1 + a_3e_1f_2 + a_4e_2f_2 . \qquad (5)$$

Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів:

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{e_1f_1, e_2f_1, e_1f_2, e_2f_2\} .$$

Таблиця Келі для ГЧС досліджуваного класу буде мати такий вигляд:

$Д_k(Г_1, Г_2, 4)$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	αg_1	g_4	αg_3
g_3	g_3	g_4	βg_1	βg_2
g_4	g_4	αg_3	βg_2	$\alpha\beta g_1$

(6)

Підставивши конкретні значення α та β в (6) та врахувавши ізоморфізм між деякими системами, можна побачити, що досліджуваний клас ГЧС складається з таких представників класів ізоморфізмів:

1) $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{K}$;
2) $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{C}, 4)$;
3) $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4) = Д_k(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}, 4)$;
4) $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$;
5) $Д_k(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$;
6) $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) = Д_k(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$.

На цьому етапі можна побачити, що таблиця множення базисних елементів (6) має аналогічний вигляд таблиці Келі узагальнених кватерніонів [3, 5], для яких визначено ряд арифметичних та алгебраїчних операцій [4, 6].

Синтез методу побудови обернених функцій

За означенням, логарифмічна функція є оберненою до експоненціальної:

$$Ln(Exp(M)) = M . \qquad (7)$$

Тому для початку потрібно побудувати представлення експоненціальної функції в цьому класі ГЧС, а потім на його основі (за законом (7)) — представлення логарифмічної функції.

Представлення експоненціальної функції побудуємо за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Такий метод детально описано в роботі [12]. Нагадаємо, що асоційована система лінійних диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X}. \qquad (8)$$

Розв'язавши характеристичне рівняння правої частини рівності (8), отримаємо такі корені:

$$\lambda_1 = m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3,$$
$$\lambda_2 = m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3,$$
$$\lambda_3 = m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3,$$
$$\lambda_4 = m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3.$$

Можна побачити, що залежно від значень α та β, загальний розв'язок (8) матиме інший вигляд, і відповідно, відрізнятиметься представлення експоненти. Розглянемо окремі випадки.

1. $\alpha \neq 0$ та $\beta \neq 0$. (9)

При таких значеннях α та β всі характеристичні корені будуть різні, і відповідно, розв'язки рівняння (8) матимуть вигляд:

$$x_i = C_{i1}e^{\lambda_1 t} + C_{i2}e^{\lambda_2 t} + C_{i3}e^{\lambda_3 t} + C_{i4}e^{\lambda_4 t}, \quad i = 1,...,4. \tag{10}$$

Із 16-ти довільних сталих C_{ik} незалежні тільки 4, а решта виражаються через них:

C_{ik}	1	2	3	4
1	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{1,4}$	$\sqrt{\beta}C_{1,4}$	$\sqrt{\alpha}C_{1,4}$	$C_{1,4}$
2	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{2,4}$	$-\sqrt{\beta}C_{1,2}$	$-\sqrt{\alpha}C_{2,4}$	$C_{2,4}$
3	$-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{3,4}$	$-\sqrt{\beta}C_{3,4}$	$\sqrt{\alpha}C_{3,4}$	$C_{3,4}$
4	$-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{4,4}$	$\sqrt{\beta}C_{4,4}$	$-\sqrt{\alpha}C_{4,4}$	$C_{4,4}$

Значення незалежних сталих можна знайти, використовуючи початкову умову:

$$Exp(0) = e_1. \tag{11}$$

Тоді матимемо:

$$C_{1,4} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}},\ C_{2,4} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}},\ C_{3,4} = -\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}},\ C_{4,4} = -\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}.$$

Обчисливши значення залежних сталих, отримаємо представлення експоненціальної функції для першого випадку:

$$
\begin{aligned}
Exp(M)=&\frac{1}{4}\Big(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\Big)e_1+\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}\Big(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\Big)e_2+\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\Big(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\Big)e_3+\\
&+\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\Big(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\Big)e_4.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Умові (9) відповідають лише три системи досліджуваного класу — $\boldsymbol{K}$, $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4)$, $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$. Підставивши для кожної з них конкретні значення α та β та виконавши певні перетворення, отримаємо такі результати:

1) система $\boldsymbol{K}$ — $\alpha=-1$ та $\beta=-1$:

$$
\begin{aligned}
Exp(M)=&\frac{1}{2}\Big(e^{m_1-m_4}\cos(m_2+m_3)+e^{m_1+m_4}\cos(m_2-m_3)\Big)e_1+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1-m_4}\sin(m_2+m_3)+e^{m_1+m_4}\sin(m_2-m_3)\Big)e_2+\\
&+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1-m_4}\sin(m_2+m_3)-e^{m_1+m_4}\sin(m_2-m_3)\Big)e_3-\frac{1}{2}\Big(e^{m_1-m_4}\cos(m_2+m_3)-e^{m_1+m_4}\cos(m_2-m_3)\Big)e_4;
\end{aligned}
\tag{13}
$$

2) система $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4)$ — $\alpha=-1$ та $\beta=1$:

$$
\begin{aligned}
Exp(M)=&\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_3}\cos(m_2+m_4)+e^{m_1-m_3}\cos(m_2-m_4)\Big)e_1+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_3}\sin(m_2+m_4)+e^{m_1-m_3}\sin(m_2-m_4)\Big)e_2+\\
&+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_3}\cos(m_2+m_4)-e^{m_1-m_3}\cos(m_2-m_4)\Big)e_3+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_3}\sin(m_2+m_4)-e^{m_1-m_3}\sin(m_2-m_4)\Big)e_4;
\end{aligned}
\tag{14}
$$

3) система $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$ — $\alpha=1$ та $\beta=1$:

$$
\begin{aligned}
Exp(M)=&\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_4}ch(m_2+m_3)+e^{m_1-m_4}ch(m_2-m_3)\Big)e_1+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_4}sh(m_2+m_3)+e^{m_1+m_4}sh(m_2-m_3)\Big)e_2+\\
&+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_4}sh(m_2+m_3)-e^{m_1+m_4}sh(m_2-m_3)\Big)e_3+\frac{1}{2}\Big(e^{m_1+m_4}ch(m_2+m_3)-e^{m_1-m_4}ch(m_2-m_3)\Big)e_4.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

2. $\alpha=0$ або $\beta=0$. (16)

При таких значеннях α та β матимемо два двократні корені характеристичного рівняння, і відповідно, розв'язки рівняння (8) матимуть вигляд:

$$\lambda_{1,2}=m_1+\sqrt{\alpha}m_2,$$
$$\lambda_{3,4}=m_1-\sqrt{\alpha}m_2,$$

або

$$\lambda_{1,2}=m_1+\sqrt{\beta}m_3,$$
$$\lambda_{3,4}=m_1-\sqrt{\beta}m_3.$$

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (8) матиме інший вигляд, ніж (10), а саме:

$$x_i = \left(C_{i1} + tC_{i2}\right)e^{\lambda_1 t} + \left(C_{i3} + tC_{i4}\right)e^{\lambda_2 t}, \quad i = 1,\ldots,4. \tag{17}$$

При такому поданні загальних розв'язків залежність між довільними сталими матиме наступний вигляд:

C_{ik}	1	2	3	4
1	$\sqrt{\alpha}C_{1,2}$	$C_{1,2}$	$\sqrt{\alpha}C_{1,4}$	$C_{1,4}$
2	0	0	$\sqrt{\alpha}\left(m_4\sqrt{\alpha} + m_3\right)C_{1,2}$	$\left(m_4\sqrt{\alpha} + m_3\right)C_{1,2}$
3	$-\sqrt{\alpha}C_{3,2}$	$C_{3,2}$	$-\sqrt{\alpha}C_{3,4}$	$C_{3,4}$
4	0	0	$\sqrt{\alpha}\left(m_4\sqrt{\alpha} - m_3\right)C_{3,2}$	$-\left(m_4\sqrt{\alpha} - m_3\right)C_{3,2}$

Використавши початкову умову (11), отримаємо наступні значення незалежних сталих:

$$C_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \; C_{1,4} = 0, \; C_{3,2} = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \; C_{3,4} = 0.$$

При таких значеннях незалежних сталих і після знаходження решти сталих отримаємо наступне представлення експоненціальної функції для другого випадку:

$$\begin{aligned}Exp\left(M\right) = {} & \frac{1}{2}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)e_1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} - e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)e_2 + \\ & + \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\alpha}m_4 + m_3\right)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + \left(m_3 - \sqrt{\alpha}m_4\right)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)e_3 + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\left(\sqrt{\alpha}m_4 + m_3\right)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + \left(m_3 - \sqrt{\alpha}m_4\right)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)e_4.\end{aligned} \tag{18}$$

Оскільки умові (16) задовольняють лише дві гіперкомплексні системи комутативного класу, то після підстановки конкретних значень α та β у (18) результати будуть наступними:

1) система $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$ — $\alpha = 1$ та $\beta = 0$:

$$\begin{aligned}Exp\left(M\right) = e^{m_1}ch\left(m_2\right)e_1 + e^{m_1}sh\left(m_2\right)e_2 + \\ + e^{m_1}\left(m_3 ch\left(m_2\right) + m_4 sh\left(m_2\right)\right)e_3 + e^{m_1}\left(m_4 ch\left(m_2\right) + m_3 sh\left(m_2\right)\right)e_4;\end{aligned} \tag{19}$$

2) система $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$ — $\alpha = -1$ та $\beta = 0$:

$$\begin{aligned}Exp\left(M\right) = e^{m_1}\cos\left(m_2\right)e_1 + e^{m_1}\sin\left(m_2\right)e_2 + \\ e^{m_1}\left(m_3\cos\left(m_2\right) - m_4\sin\left(m_2\right)\right)e_3 + e^{m_1}\left(m_4\cos\left(m_2\right) + m_3\sin\left(m_2\right)\right)e_4.\end{aligned} \tag{20}$$

3. $\alpha = 0$ і $\beta = 0$. (21)

Умова (21) приводить всі корені характеристичного рівняння до вигляду $\lambda_{1,2,3,4} = m_1$, тобто матимемо один корінь кратності чотири і загальний розв'язок рівняння (8) у вигляді:

$$x_i = \left(C_{i1} + tC_{i2} + t^2 C_{i3} + t^3 C_{i4}\right) e^{m_1 t}, \quad i = 1,...,4. \tag{22}$$

Залежність між довільними сталими має наступний вигляд:

C_{ik}	1	2	3	4
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	0	$m_2 C_{1,1}$	$m_3 C_{1,1}$	$m_2 C_{1,3} + m_3 C_{1,2} + m_4 C_{1,1}$
3	0	0	0	$m_2 m_3 C_{1,1}$
4	0	0	0	0

Використовуючи початкову умову (11), отримаємо такі значення незалежних сталих:

$$C_{1,1} = 1,\ C_{1,2} = 0,\ C_{1,3} = 0,\ C_{1,4} = 0.$$

При таких значеннях залежних сталих, та після знаходження решти сталих, отримаємо наступне представлення експоненціальної функції для третього випадку:

$$Exp(M) = e^{m_1}\left(e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + \left(m_4 + m_2 m_3\right) e_4\right). \tag{23}$$

Умові (21) відповідає одна система досліджуваного класу — $Д_k$(***D***, ***D***, 4), тому (23) і буде представленням експоненціальної функції для цієї системи.

Моделювання представлення логарифмічної функції

У роботах [3, 7, 10] наведено алгоритм моделювання обернених нелінійностей, у тому числі й логарифма, у вигляді:

$$Ln \sum_{k=1}^{4} x_k e_k = \sum_{k=1}^{4} f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) e_k. \tag{24}$$

Тобто, необхідно визначити функції $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Для цього потрібно розв'язати систему чотирьох рівнянь відносно m_1, m_2, m_3, m_4.

Оскільки немає єдиного представлення експоненти для цілого класу комутативних систем, а розглядаються три окремі випадки, то і для представлення логарифма також розглядатимемо три випадки.

1. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

У цьому випадку система для визначення вигляду функцій $f_k(x_1,x_2,x_3,x_4)$ матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\right)=x_1 \\ \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\right)=x_2 \\ \frac{1}{4\sqrt{\beta}}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\right)=x_3 \\ \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}+e^{m_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4+\sqrt{\alpha}m_2-\sqrt{\beta}m_3}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4-\sqrt{\alpha}m_2+\sqrt{\beta}m_3}\right)=x_4 \end{cases} \quad (25)$$

Розв'язавши систему (25) за допомогою комп'ютерної математики Maple, маємо такий результат:

$$\begin{cases} m_1=\frac{1}{4}\ln\left(\begin{array}{l}\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)\times \\ \times\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\end{array}\right) \\ m_2=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)}{\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)}\right) \\ m_3=\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\ln\left(\frac{\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)}{\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)}\right) \\ m_4=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\ln\left(\frac{\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(-x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)}{\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4+\sqrt{\alpha}x_2+\sqrt{\beta}x_3\right)\left(x_1+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}x_4-\sqrt{\alpha}x_2-\sqrt{\beta}x_3\right)}\right) \end{cases} \quad (26)$$

Для побудови представлення логарифмічної функції достатньо підставити конкретні значення α та β в (26) та виконати елементарні перетворення. Як було зазначено вище, умові (9) відповідають наступні представники класів ізоморфізмів:

1) система $\boldsymbol{K}$:

$$\begin{cases} m_1=\frac{1}{8}\ln\left(\left(x_1^2-2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2\right)^2\left(x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2\right)^2\right)+ \\ \quad +\frac{1}{4}I\left(arctg\left(x_2+x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(x_2-x_3,-x_1-x_4\right)+arctg\left(-x_2-x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(-x_2+x_3,-x_1-x_4\right)\right) \\ m_2=\frac{1}{4}\left(arctg\left(x_2+x_3,x_1-x_4\right)-arctg\left(x_2-x_3,-x_1-x_4\right)-arctg\left(-x_2-x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(-x_2+x_3,-x_1-x_4\right)\right) \\ m_3=\frac{1}{4}\left(arctg\left(x_2+x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(x_2-x_3,-x_1-x_4\right)-arctg\left(-x_2-x_3,x_1-x_4\right)-arctg\left(-x_2+x_3,-x_1-x_4\right)\right) \\ m_4=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\left(x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2\right)^2}{\left(x_1^2-2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2\right)^2}\right)+ \\ \quad +\frac{1}{4}I\left(-arctg\left(x_2+x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(x_2-x_3,-x_1-x_4\right)-arctg\left(-x_2-x_3,x_1-x_4\right)+arctg\left(-x_2+x_3,-x_1-x_4\right)\right) \end{cases}$$

Взявши до уваги, що в даному випадку $I = e_2$, та скориставшись таблицею Келі системи квадриплексних чисел, матимемо:

$$\begin{aligned}
Ln(X) = &\frac{1}{8}\ln\left(\left(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right)^2\left(x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right)^2\right)e_1 + \\
&+\frac{1}{2}\left(arctg\left(x_2 + x_3, x_1 - x_4\right) + arctg\left(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4\right)\right)e_2 + \\
&+\frac{1}{2}\left(arctg\left(x_2 + x_3, x_1 - x_4\right) - arctg\left(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4\right)\right)e_3 + \\
&+\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\left(x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right)^2}{\left(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right)^2}\right)e_4;
\end{aligned} \tag{27}$$

2) система $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4)$.

Виконавши аналогічні перетворення як і для системи квадриплексних чисел $\boldsymbol{K}$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
Ln(X) = &\frac{1}{8}\ln\left(\left(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2\right)^2\left(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2\right)^2\right)e_1 + \\
&+\frac{1}{2}\left(arctg\left(x_2 + x_4, x_1 + x_3\right) + arctg\left(-x_2 + x_4, x_3 - x_1\right)\right)e_2 + \\
&+\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\left(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2\right)^2}{\left(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2\right)^2}\right)e_3 \\
&+\frac{1}{2}\left(arctg\left(x_2 + x_4, x_1 + x_3\right) - arctg\left(-x_2 + x_4, x_3 - x_1\right)\right)e_4;
\end{aligned} \tag{28}$$

3) система $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$:

$$\begin{aligned}
Ln(X) = &\frac{1}{4}\ln\left(\left(x_1 + x_4 + x_2 + x_3\right)\left(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3\right)\left(x_1 + x_4 - x_2 - x_3\right)\left(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3\right)\right)e_1 + \\
&+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(x_1 + x_4 + x_2 + x_3\right)\left(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3\right)}{\left(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3\right)\left(x_1 + x_4 - x_2 - x_3\right)}\right)e_2 + \\
&+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(x_1 + x_4 + x_2 + x_3\right)\left(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3\right)}{\left(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_4 - x_2 - x_3\right)}\right)e_3 + \\
&+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3\right)\left(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3\right)}{\left(x_1 + x_4 + x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_4 - x_2 - x_3\right)}\right)e_4.
\end{aligned} \tag{29}$$

2. $\beta = 0$.

У цьому випадку система, з якої визначатиме $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2}+e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)=x_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2}-e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)=x_2 \\ \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\alpha}m_4+m_3\right)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2}+\left(m_3-\sqrt{\alpha}m_4\right)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)=x_3 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\left(\sqrt{\alpha}m_4+m_3\right)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2}+\left(m_3-\sqrt{\alpha}m_4\right)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}\right)=x_4 \end{cases} \tag{30}$$

Розв’язки (30) мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1=\ln\left(\left(x_1-\sqrt{\alpha}x_2\right)\sqrt{-\frac{-x_1-\sqrt{\alpha}x_2}{x_1-\sqrt{\alpha}x_2}}\right) \\ m_2=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\ln\left(-\frac{-x_1-\sqrt{\alpha}x_2}{x_1-\sqrt{\alpha}x_2}\right) \\ m_3=\frac{-x_3x_1+\alpha x_2x_4}{\alpha x_2^2-x_1^2} \\ m_4=-\frac{-x_3x_2+x_1x_4}{\alpha x_2^2-x_1^2} \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} m_1=\ln\left(-\left(x_1-\sqrt{\alpha}x_2\right)\sqrt{-\frac{-x_1-\sqrt{\alpha}x_2}{x_1-\sqrt{\alpha}x_2}}\right) \\ m_2=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(-\sqrt{-\frac{-x_1-\sqrt{\alpha}x_2}{x_1-\sqrt{\alpha}x_2}}\right) \\ m_3=\frac{-x_3x_1+\alpha x_2x_4}{\alpha x_2^2-x_1^2} \\ m_4=-\frac{-x_3x_2+x_1x_4}{\alpha x_2^2-x_1^2} \end{cases} \tag{31}$$

Підставивши значення α, наприклад у першу систему (31), отримаємо:

— система $Д_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$$Ln(X)=\frac{1}{2}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)e_1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)e_2+\frac{x_3x_1-x_2x_4}{x_1^2-x_2^2}e_3-\frac{x_3x_2-x_1x_4}{x_1^2-x_2^2}e_4; \tag{32}$$

— система $Д_k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} ln\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\right) \\ m_2 = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2x_2x_1}{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}, \frac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}}{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}\right) \\ m_3 = \frac{x_3x_1 + x_2x_4}{x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}} \\ m_4 = \frac{-x_3x_2 + x_1x_4}{x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}} \end{cases}$$

І, відповідно, представлення логарифма матиме вигляд:

$$Ln(X) = \frac{1}{2}\ln\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\right)e_1 + \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2x_2x_1}{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}, \frac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}}{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}\right)e_2 + \frac{x_3x_1 + x_2x_4}{x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}}e_3 + \frac{-x_3x_2 + x_1x_4}{x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}}e_4 . \quad (33)$$

3. $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Система, з якої визначатимемо $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$, та її розв’язок, відповідно, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} e^{m_1} = x_1 \\ m_2 e^{m_1} = x_2 \\ m_3 e^{m_1} = x_3 \\ \left(m_4 + m_3 m_2\right) e^{m_1} = x_4 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} m_1 = \ln\left(x_1\right) \\ m_2 = \frac{x_2}{x_1} \\ m_3 = \frac{x_3}{x_1} \\ m_4 = \frac{-x_2x_3 + x_1x_4}{x_1^{\ 2}} \end{cases}$$

Тобто, для системи $Д_k$(***D***, ***D***, 4) логарифмічна функція має наступне представлення:

$$Ln(X) = \ln\left(x_1\right)e_1 + \frac{x_2}{x_1}e_2 + \frac{x_3}{x_1}e_3 + \frac{-x_2x_3 + x_1x_4}{x_1^{\ 2}}e_4 . \quad (34)$$

Висновки

Побудовано клас комутативних ГЧС за допомогою ГК-процедури подвоєння. Виконано моделювання представлень експоненціальної функції і логарифмічної, як оберненої до першої. Такі побудовані представлення дозволяють використовувати системи досліджуваного класу для вирішення практичних задач.

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. Москва: Наука, 1973. 144 с.

2. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Сукало А.С. Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних.* 2015. Т. 17. № 4. С. 11–20.

3. Mamagami A.B., Jafari M. On Properties of Generalized Quaternion Algebra. *Journal of Novel Applied Sciences*. 2013. Vol 2. N 12. P. 683–689.

4. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Туренко А.С. Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда. *Electronic Modeling*. 2015. Vol 37. N 2. P. 17–26.

5. Szeto G. On generalized quaternion algebras. *Internat. I. Math. And Math. Sci.* 1980. Vol. 3. N 2. P. 237–245.

6. Jafari M., Yayli Y. Generalized quaternion and rotation in 3-space $E^3_{\alpha\beta}$. Department of Mathematics, Faculty of Science Ankara University, 06100 Ankara, Turkey. 11 p.

7. Калиновский Я.А., Синьков М.В., Постникова Т.Г., Синькова Т.В. Логарифмическая функция от кватерниона. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2002. Т. 4. № 1. С. 35–37.

8. Catoni F. Hypercomplex numbers, Functions of hypercomplex variable and Physical Fields (RT/ERG/94/18). URL: http//www.studi131.casaccia.enea.it/enea/it/rt/exg9418.html (1994).

9. Brackx F. The Exponential Function of a Quaternion Variable. *Applicable Analysis*. 1979. Vol. 19. P. 265–276.

10. Синьков М.В., Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є. Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2005. Т. 7. № 1. С. 32–42.

11. Сильвестров В.В. Системы чисел. *Соросовский образовательный журнал.* 1998. № 8. С. 121–127.

12. Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010. 38 с.

13. Kalinovsky Y.O. Lande D.V., Boyarinova Y.E., Turenko A.S. Computing Characteristics of One Class of Non-commutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension. URL: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf

14. Каліновський Я.О. Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. … докт. техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007. 417 с.

15. Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В. Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел. *Кибернетика и системный analіз.* 1996. № 4. С. 178–181.

16. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Туренко А.С. Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2015. Т. 17. № 1. С. 36–45.

Надійшла до редакції 06.12.2016